УДК 330.34: 351.77

ПАВЛОВ К. В.

НЕЕВКЛИДОВА ЭКОНОМИКА: ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ

В статье обосновывается целесообразность более широкого использования в разнообразных экономико-математических моделях неевклидовой метрики в целях упрощения математического выражения самих моделей и облегчения решения связанных с ними задач, а также для выявления с помощью моделей тенденций и закономерностей социально-экономического развития на разных уровнях управленческой иерархии. Обосновано, что использование косоугольных координат при изучении социально-экономических процессов может стать важным дополнением к традиционному применению прямоугольных декартовых координат в системе экономико-математического моделирования.

Ключевые слова: неевклидовы геометрии, метрика, неевклидова экономика, производственные функции, экономико-математические модели.

Постановка проблемы. В последнее время при изучении социально-экономических процессов широко используются математические и инструментальные методы исследования. Уже первые опыты экономико-математического моделирования (например, использование производственной функции Кобба-Дугласа более ста лет назад) дали значительный результат в процессе исследования и поиска резервов повышения эффективности системы общественного воспроизводства.

Однако, как показывает анализ, в качестве теоретико-методологической основы, базиса разработки экономико-математических моделей, как правило, используется только лишь евклидова метрика и, прежде всего, категория евклидова n-мерного пространства (в основном, двух- или трехмерного, однако, если местоположение точки определяется n-координатами, то в этом случае речь идет об n-мерном евклидовом пространстве). На наш взгляд, такое положение дел вполне оправдано. Но при разработке экономико-математических моделей в принципе можно основываться и на ином теоретическом базисе, а именно, использовать неевклидову метрику. В этой связи следует уточнить, о чем идет речь.

Евклидово пространство – это пространство, свойства которого описываются аксиомами евклидовой геометрии. Кроме этого, это векторное пространство над полем действительных чисел, в котором каждой паре векторов ставится в соответствие действительное число, называемое скалярным произведением этих векторов. Здесь также вводится понятие ортогональности: ортогональными считаются векторы, если их скалярное произведение равно нулю.

Анализ последних исследований и публикаций. К неевклидовым геометриям относятся все геометрические системы, отличные от геометрии Евклида. Среди неевклидовых геометрий особое значение имеют геометрия Лобачевского и геометрия Римана (в честь великих математиков русского Н.И. Лобачевского и немца Б. Римана, впервые сообщивших о своих открытиях соответственно в 1826 и в 1854 годах) [1]. Причем геометрия Лобачевского – первая в историческом аспекте геометрическая система, отличная от геометрии Евклида, а также первая более общая, включающая евклидову геометрию как крайний, предельный случай. На наш взгляд, неевклидовая метрика также может быть использована при разработке различных экономико-математических моделей.

Более того, в ряде случаев она может оказаться более эффективной, чем евклидовая метрика – как в математическом аспекте (например, позволяя существенно упростить математический вид модели или облегчить решение связанной с ней задачи), так и в экономическом плане (скажем, для выявления глубинных тенденций и закономерностей социально-экономического развития, для определения скрытых эффектов и явлений в системе общественного воспроизводства). Данную сферу экономики условно можно назвать неевкли-

ЧАСОПИС ЕКОНОМІЧНИХ РЕФОРМ №1(29)/2018 ISSN 2221-8440

довой экономикой (более того, сказанное выше вполне применимо и к определенной группе экологических моделей, особенно эколого-экономических). Чтобы было более понятным, о чем идет речь, рассмотрим данную проблему подробнее.

Цель статьи является обоснование целесообразности более широкого использования в разнообразных экономико-математических моделях неевклидовой метрики в целях упрощения математического вы-ражения самих моделей.

Изложение основного материала исследования. В используемых в настоящее время в процессе исследования различных воспроизводственных процессов экономико-математических моделях практически постоянно применяется метрика, основанная на применении декартовой системы координат, т.е. прямоугольной системы координат в евклидовом пространстве. Под метрикой понимается расстояние между двумя элементами а и в множества А – это действительная числовая функция ρ (а, в), удовлетворяющая следующим трем условиям: 1) ρ (а, в) ≥ 0, причем ρ (а, в) = 0 тогда и только тогда, когда а=в; 2) ρ (а, в) = ρ (в, а) и 3) ρ (а, в) + ρ (в, с) ≥ ρ (а, с). Под евклидовым пространством понимается векторное пространство Е над полем действительных чисел, в котором каждой паре векторов а и в из Е ставится в соответствие действительное число, называемое скалярным произведением (а, в) этих векторов [2]. Через скалярное произведение в евклидовом пространстве определяются длины этих векторов и угол между ними, а также вводится понятие ортогональности (перпендикулярности) между векторами: они ортогональны в том случае, если их скалярное произведение равно 0. При этом в экономических исследованиях наиболее часто используется множество всех векторов плоскости (т.е. двухмерного) или трехмерного пространства евклидовой геометрии с обычным скалярным произведением, однако в отдельных случаях применяют и более общую модель, основанную на евклидовом n-мерном пространстве (т.е. конечномерное векторное пространство над множеством действительных чисел, в котором скалярное произведение векторов $а=(а_1,\ldots, а_n)$ и $в=(в_1,\ldots, в_n)$ определяется формулой $(а, в) = а_1*в_1+. а_2*в_2+\ldots+а_n*в_n$).

Выше нами упоминалась декартовая система координат в евклидовом пространстве. В этой связи целесообразно напомнить, что общая декартовая система координат, называемая также аффинной системой координат, задается точкой О (начало координат) и упорядоченной системой приложенной к этой точке n неколлинеарных (непараллельных) векторов $а_1$, $а_2$,.., $а_n$, называемых также базисными векторами. Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат данной декартовой системы координат. В экономико-математических моделях чаще всего ограничиваются двумерным случаем (т.е. плоскостью) и тогда эти оси называются осью абсцисс и осью ординат (в случае трехмерного пространства добавляется третья ось аппликат).

При анализе воспроизводственных процессов и явлений в основном используют прямоугольную декартовую систему координат. В этом случае базисные векторы ортонормированы, т.е. взаимно перпендикулярны и по длине равны единице [3]. Однако вполне возможно, на наш взгляд, также и использование косоугольной декартовой системы координат, отличающейся от прямоугольной тем, что угол между единичными базисными векторами не является прямым. При использовании производственных функций, особенно с переменной эластичностью замещения производственных факторов, переход по известным математическим формулам от одной декартовой системы косоугольных координат к другой системе координат позволит наилучшим образом упростить математический вид такого рода производственных функций, что наверняка приведет не только к более широкому их использованию в обозримом будущем, но и позволит выявить скрытые тенденции и закономерности социально-экономического развития на разных уровнях управленческой иерархии.

Таким образом, использование косоугольных координат при изучении соци-

ЧАСОПИС ЕКОНОМІЧНИХ РЕФОРМ № 1(29)/2018 ISSN 2221-8440

ЧАСОПИС ЕКОНОМІЧНИХ РЕФОРМ №1(29)/2018 ISSN 2221-8440

ально-экономических процессов может стать важным дополнением к традиционному применению прямоугольных декартовых координат в системе экономико-математического моделирования. Однако данная форма обобщения не только не является единственной, но и далеко не самой важной. На наш взгляд, гораздо более перспективным направлением обобщения, имеющим значительные внутренние резервы упрощения как самих моделей, так и расширение возможностей их использования в экономическом анализе является применение подходов неевклидовой математики.

Здесь следует уточнить, что к неевклидовым геометриям относят все геометрические системы, отличные от геометрии Евклида. Среди них особое значение имеют геометрия Лобачевского и геометрия Римана. Геометрия Лобачевского является первой геометрической системой, отличной от геометрии Евклида. Она же является и первой более общей теорией, включающей евклидову геометрию как предельный случай. Позднее открытая великим немецким математиком Б. Риманом геометрия, названная его именем, в некоторых отношениях противоположна геометрии Лобачевского, однако вместе с тем геометрия Римана служит для последней необходимым дополнением. Напомним, что если в геометрии Евклида к любой данной прямой через точку, лежащую вне этой прямой, можно провести только одну параллельную ей прямую, то в геометрии Лобачевского такого рода параллельных прямых через эту точку можно провести бесчисленное множество, а в геометрии Римана – ни одной, т.е. в этом случае все прямые на плоскости обязательно пересекаются.

Для экономико-математического моделирования важно то, что в неевклидовых геометриях метрические отношения существенно отличаются от метрических пропорций, характерных для евклидова пространства. В этой связи заметим, что по аналогии с поверхностью в евклидовом пространстве в неевклидовой плоскости также могут быть введены внутренние координаты U, V таким образом, что дифференциал dS дуги кривой, соответствующий дифференциалам dU и dV координат, определяется равенством $dS^2 = Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$, где E, F, G - коэффициенты.

Для евклидовой плоскости это равенство преобразуется следующим образом: $dS^2 = du^2+ dv^2$.

Для плоскости Лобачевского общая формула оценки дифференциальных свойств плоскости будет иметь вид:

$$dS^2 = du^2+ ch^2 \left(\frac{u}{R}\right)dv^2, \qquad (1)$$

а для плоскости Римана $dS^2 = du^2+ \cos^2 \left(\frac{u}{R}\right)dv^2$,

где R - радиус кривизны анализируемой поверхности (кстати при $R= \infty$, т.е. при стремлении радиуса кривизны к бесконечности каждое из двух последних равенств дает метрическую форму евклидовой плоскости).

Полученные результаты можно использовать в процессе математических преобразований в различных экономических моделях, например, в теории производственных функций [4]. Так, даже простейший вариант - двухфакторная производственная функция P = f(C, T) (например, производственная функция Кобба-Дугласа

$$P = A\times C^{\lambda}\times T^{1-\lambda}, \qquad (2)$$

где P - результаты производства, C - затраты капитала, T - затраты труда, A - коэффициент масштаба, λ- показатель степенной функции) при использовании вышеуказанных формул, характерных для неевклидовых геометрических систем, приобретет вид, в котором тот или иной фактор - труд или капитал - получит большее значение (типа весовых коэффициентов) по сравнению с другим фактором в зависимости от реальных хозяйственных условий.

Все это позволит расширить возможности математического описания реальных производственных ситуаций и различных хозяйственных условий, в том числе в зависимости от различных пропорций производственных факторов. Разумеется, данный подход может быть использован и в более сложных случаях применения производственных функций, например, когда кроме факторов труда и капитала в этих функциях используются также фактор научно-технического прогресса и земельный фактор, а также в случае применения производственных функций с переменной эластичностью замещения факторов. На наш взгляд, использование метрических соотношений неевклидовых геометрий позволит также более глубоко изучить явление эффекта от масштаба (в производственных функциях он количественно характеризуется коэффициентом А), а, значит, изучить также и тенденции, характеризующие рост концентрации и централизации производства и капитала.

Возможно, неевклидовые метрические соотношения можно использовать (хотя бы в целях упрощения математического вида модели) при решении оптимизационных задач нелинейного программирования. Например, в процессе использования одного из наиболее популярных методов нелинейного программирования - метода штрафных функций. Как известно, этот метод позволяет свести задачу нелинейного программирования с ограничениями к задаче нелинейного программирования без ограничений путем формирования штрафной функции, образующейся из целевой функции задачи путем вычитания «штрафов» за нарушение ее ограничений, причем, чем выше штрафы, тем ближе задача максимизации штрафной функции к исходной задаче.

Процесс решения задачи нелинейного программирования складывается из нескольких этапов, на каждом из которых решается задача линейного или квадратичного программирования, т.е. решается более простой вариант задачи или ее части. Математическое выражение штрафных функций, на наш взгляд, может быть упрощено при правильном использовании неевклидовой метрики. Это возможно и в случае разработки оптимальной стратегии в теории игр [5]. Применимо это также в функциях спроса и в функциях предложения.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Таким образом, при анализе различных проблем, связанных с функционированием системы производственных отношений на основе использования разнообразных экономико-математических моделей, наряду с традиционным применением декартовой прямоугольной системы координат в евклидовом пространстве во многих случаях более эффективным оказывается использование математических моделей, сконструированных на основе применения неевклидовой метрики. Все это позволит не только упростить математическое выражение используемых моделей, но и на их основе обнаружить скрытые тенденции и закономерности развития воспроизводственных систем. Данная сфера экономической науки названа нами неевклидовой экономикой.

Как уже выше отмечалось, широкие возможности использования неевклидовой метрики, на наш взгляд, имеются и в отношении применения математических моделей, используемых в экологической сфере, т.е. при изучении экологических процессов и явлений. Результаты развития неевклидовой математики можно использовать и при осуществлении разнообразных статистических исследований в эколого-экономической области, например, при осуществлении дисперсионно-регрессионного анализа. Таким образом, направления и формы развития неевклидовой математики весьма многочисленны и разнообразны, что свидетельствует о целесообразности ее использования и дальнейшего ее развития в системе экономического моделирования. Более того, все это может, в свою очередь, повлиять на развитие самих неевклидовых геометрий подобно тому, как и еще при жизни Н. И. Лобачевского его геометрические изыскания повлияли на развитие теории интегральных и дифференциальных уравнений [6], а эта теория, в свою очередь, оказала позитивное обратное воздействие на развитие неевклидовой геометри.

Литература

1. Мир математики: в 45т. Т. 36: Висенте Муньос. Деформируемые формы. Топология / Пер. с исп. – М.: Де Агостини, 2014. – 176с.

2. *Ефимов Н. В.* Высшая геометрия: 6-ое издание. – М.: Высшая школа, 1978. – 482с.

3. Математика: Энциклопедия / Под ред. Ю. В. Прохорова. – М.: Большая Российская энциклопедия, 2003. – 845с.

4. *Браун М.* Теория и измерение технического прогресса / Пер. с анг. – М.: Статистика, 1981. – 147с.

ЧАСОПИС ЕКОНОМІЧНИХ РЕФОРМ № 1(29)/2018 ISSN 2221-8440

5. Теория игр: Учеб. пособие для университетов / Л. А. Петросян, Н.А. Зинкевич, Е.А. Селина – М.: Высшая школа, 1998. – 304 с.

6. Мир математики: в 45 т. Т. 4: Жуан Гомес. Когда кривые искривляются. Неевклидовы геометрии / Пер. с исп. – М.: Де Агостини, 2014. – 160 с.

References

1. *Muños, Vicente.* (2014). World of mathematics: in 45 t. T. 36: Deformable forms. The topology / Lane with sp. Moscow: De Agostini, 176.

2. *Yefimov, N.V.* (1978). The higher geometry: 6th issuing. Moscow: The higher school, 482.

3. *Prokhorov, Yu.V.* (2003). Mathematician: The encyclopedia. Moscow: Big Russian encyclopedia, 845.

4. *Brown, M.* (1981). The theory and measurement of technical progress. Moscow: Statistics, 147.

5. *Petrosyan, L. A. & Zinkevich, N. A. & Selin E. A.* (1998). Games theory: Studies. the manual for the universities. Moscow: The higher school, 304.

6. *Gómez, Zhuan.* (2014). World of mathematics: in 45 t. T. 4: When curves are bent. Non-Euclidean geometries. Moscow: De Agostini, 160.

Павлов К. В.

Неевклідової економіка: проблеми і перспективи розвитку

У статті обґрунтовується доцільність більш широкого використання в різноманітних економіко-математичних моделях неевклідової метрики з метою спрощення математичного виразу самих моделей і полегшення вирішення пов'язаних з ними завдань, а також для виявлення за допомогою моделей тенденцій і закономірностей соціально-економічного розвитку на різних рівнях управлінської ієрархії. Обґрунтовано, що використання косокутних координат при вивченні соціально-економічних процесів може стати важливим доповненням до традиційного застосування прямокутних декартових координат в системі економіко-математичного моделювання.

Ключові слова: неевклидова геометрії, метрика, неевклидова економіка, виробничі функції, економіко-математичні моделі.

Pavlov K.

Non-Euclidean economy: problems and prospects of development

The article proves the expediency of the wider use of the non-Euclidean metric in various economic and mathematical models in order to simplify the mathematical expression of the models themselves and to facilitate the solution of the problems associated with them, as well as to identify trends and patterns of socio-economic development at different levels of the management hierarchy using models. It is substantiated that the use of oblique coordinates in the study of socio-economic processes can be an important addition to the traditional application of rectangular Cartesian coordinates in the system of economic and mathematical modeling.

Key words: non-Euclidean geometry, metric, non-Euclidean economy, production functions, economic-mathematical models.

Рецензент: Нусратуллин В. К. – доктор экономических наук, профессор, заместитель директора по научной работе Института экономики и социологии Уфимского центра Российской Академии наук, г. Уфа, Российская Федерация.

Reviewer: Nusratullin V. – Professor, Ph.D. in Economics, Deputy Director for Research of the Institute of Economics and Sociology, Ufa Centre of the Russian Academy Sciences, Ufa, Russian Federation.

e-mail: nvk-ufa@rambler.ru

Статья подана
17.01.2018 р.

ЧАСОПИС ЕКОНОМІЧНИХ РЕФОРМ №1(29)/2018 ISSN 2221-8440