

УДК 368.03:303.09:005.931.11

Череп А. В.

доктор економічних наук, професор, декан економічного факультету
Запорізького національного університету, Україна;
e-mail: cherep.av.znu@gmail.com; ORCID ID: 0000-0001-5253-7481

Череп О. Г.

доктор економічних наук, професор,
професор кафедри управління персоналом і маркетингу
Запорізького національного університету, Україна;
e-mail: cherep2508@gmail.com; ORCID ID: 0000-0002-3098-0105

Кисільова І. Ю.

кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри фінансів, банківської справи та страхування
Запорізького національного університету, Україна;
e-mail: inna_kisileva@ukr.net; ORCID ID: 0000-0002-6486-6546

Швець Ю. О.

кандидат економічних наук, доцент,
доцент кафедри фінансів, банківської справи та страхування
Запорізького національного університету, Україна;
e-mail: yuliashvets@ukr.net; ORCID ID: 0000-0002-0294-1889

МОДЕЛЮВАННЯ ЙМОВІРНОСТІ НЕРОЗОРЕННЯ СТРАХОВОЇ ОРГАНІЗАЦІЇ У КРИЗОВИХ УМОВАХ

Анотація. Метою роботи є побудова динамічної математичної моделі ймовірності розорення страхової організації, яку можна вважати критерієм платоспроможності, з урахуванням норми дохідності та показника інфляції. Використано загальнонаукові і спеціальні методи дослідження: метод критичного аналізу, наукової абстракції та узагальнення наукового досвіду сучасних теоретичних досліджень, системно-комплексний підхід і метод динамічного математичного моделювання. Побудова динамічної математичної моделі нерозорення страхової організації з урахуванням рівня інфляції (оскільки інфляція негативно впливає на всі аспекти страхової справи, у тому числі й на стан страхових резервів) і норми дохідності інвестиційних вкладень. Визначено особливості інвестиційної діяльності страхових компаній. Проведено оцінку величини страхового внеску, який забезпечує формування достатньої величини страхового фонду, тобто платоспроможність страхової організації. Відповідно, визначено страховий тариф і величину навантаження до страхового тарифу, яке відповідає заданій ймовірності розорення страховика. Дістали подальшого розвитку методичні підходи до моделювання ймовірності неплатоспроможності (ймовірності нерозорення) страхової організації. Запропоновано динамічну математичну модель ймовірності нерозорення, яка враховує показник інфляції та норму дохідності. Запропонована модель оцінки ймовірності нерозорення страхової організації дозволяє оцінити і прогнозувати платоспроможність страховика та може бути використана при стратегічному, поточному та оперативному плануванні діяльності страхової організації. Отримана залежність навантаження до страхового тарифу дозволяє страховій компанії більш оперативно реагувати на можливі зміни ринкової кон'юнктури шляхом зміни страхового тарифу.

Ключові слова: страхова організація, динамічна модель, ймовірність нерозорення, інфляція, норма дохідності.

Формул: 36; рис.: 0; табл.: 0; бібл.: 12.

Cherep A.

Doctor of Economics, Professor, Dean of the Faculty of Economics,
Zaporizhzhia National University, Ukraine;
e-mail: cherep.av.znu@gmail.com; ORCID ID: 0000-0001-5253-7481

Cherep O.

*Doctor of Economics, Professor,
Professor of Department of Personnel Management and Marketing,
Zaporizhzhia National University, Ukraine;
e-mail: cherep2508@gmail.com; ORCID ID: 0000-0002-3098-0105*

Kisilyova I.

*Ph. D. in physical and mathematical sciences, Associate Professor,
Associate Professor of Department of Finance, Banking and Insurance,
Zaporizhzhia National University, Ukraine;
e-mail: inna_kisileva@ukr.net; ORCID ID: 0000-0002-6486-6546*

Shvets Yu.

*Candidate of Economic Sciences (Ph. D. in Economics), Associate Professor,
Associate Professor of Department of Finance, Banking and Insurance,
Zaporizhzhia National University, Ukraine;
e-mail: yuliashvets@ukr.net; ORCID ID: 0000-0002-0294-1889*

BANKRUPTCY PROBABILITY MODELLING OF INSURANCE COMPANIES IN CRISIS

Abstract. To develop scientific and methodological foundations, for creating an dynamic mathematical model of insurance company solvency (bankruptcy probability) considering interest rate and inflation ratio. The study used the general scientific and special methods such as: the method of critical analysis, scientific abstraction and generalization of scientific expertise of recent theoretical studies, system-integrated approach, method of dynamic mathematical modeling. Elaboration of dynamic mathematical model of bankruptcy probability modelling considering inflation (as inflation has negative impact on all aspects of insurance business including insurance reserves) and rate of interest. The peculiarities of insurance companies investment activity have been defined. The estimation of insurance premium that ensures adequate insurance fund value formation, i.e. insurance company solvency formation has been performed. Insurance tariff and supplement value correspondent to defined probability of insurance company bankruptcy have been defined. Methodological approaches of insurance companies solvency (bankruptcy probability) modelling were further developed. The dynamic mathematical model of bankruptcy probability considering inflation and rate of interest has been proposed. Theoretical study was developed to the level of specific techniques and suggestions for improvement of the estimation and prognosing of insurance companies solvency and could be used in strategic, current and operational planning. A comprehensive methodology of supplement estimation allows to respond to the changing market situation by changing the values of insurance tariffs.

Keywords: insurance organization, dynamic model, probability of bankruptcy, inflation, rate of interest.

JEL Classification C15, G22, L6, H12

Formulas: 36; fig.: 0; tabl.: 0; bibl.: 12.

Постановка проблеми. В умовах економічної кризи, коли страхові компанії вимушені скорочувати обсяги діяльності, на перший план виходить забезпечення платоспроможності страховиків. Це дозволяє більш виважено підійти до формування тарифних ставок і провадження інвестиційної діяльності.

Визначення ризику неплатоспроможності є одним із найбільш важливих завдань як для окремої страхової організації, так і для національного страхування. Важливу роль у забезпеченні платоспроможності страховиків відіграє інвестиційна політика і формування інвестиційного портфеля.

Крім того, можна констатувати, що більшість запропонованих моделей платоспроможності є статичними, а динамічна теорія страхування описує стан страхової організації більш адекватно, ніж статичні моделі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій (виділення нерозв'язаних раніше частин загальної проблеми). Питання управління платоспроможністю страхових компаній

у контексті забезпечення їхньої фінансової стійкості досліджує багато вітчизняних і зарубіжних науковців. Так, І. Ненно [2, с. 261] розглядає платоспроможність як основну ознаку фінансової стійкості страховиків, специфіка якої проявляється в особливостях формування зобов'язань і ресурсів для їх виконання.

Класичний підхід до розв'язання задачі про розорення страхової компанії для моделі Крамера — Лундберга та інших стохастичних варіантів ризикових моделей полягає в отриманні інтегральних або інтегро-дифференціальних рівнянь [1–4] для ймовірності нерозорення. Серед вітчизняних та зарубіжних вчених, роботи яких присвячено обчисленню ймовірності розорення страхової компанії, прогнозній оцінці ефективності діяльності, дослідженню ризиків, слід відзначити таких як: А. В. Мельников [3], А. В. Бойков [4, с. 550—552], О. М. Андрощук [5, с. 1448—1450], Б. В. Бондарев [7], А. Г. Реннер і А. В. Єрофеев [8], Т. Пентікайнен [9—10], І. М. Пістунов [11], К. В. Мельник [12] та ін. У роботі О. В. Жуміка і Ю. А. Стадника [6, с. 150] для оцінки ймовірності банкрутства страхової компанії застосовано методи актуарної математики.

На фінансову стійкість страхових організацій значно впливає рівень інфляції. Інфляція спотворює економічні розрахунки, робить невизначеними перспективи розвитку, посилює інвестиційні ризики. Однак у моделях платоспроможності показник інфляції не використовується.

Мета. Метою роботи є побудова динамічної математичної моделі ймовірності розорення страхової організації, яку можна вважати критерієм платоспроможності, з урахуванням норми дохідності та показника інфляції.

Методика. У дослідженні було використано загальнонаукові і спеціальні методи дослідження: метод критичного аналізу, наукової абстракції та узагальнення наукового досвіду сучасних теоретичних досліджень, системно-комплексний підхід і метод динамічного математичного моделювання.

Виклад основного матеріалу дослідження. Під ймовірністю розорення будемо розуміти кількісну оцінку можливості настання події, за якої страхова позика в певний момент часу буде більшою за суму резервів страхової організації та зібраних страхових премій. У моделі колективного ризику ймовірність розорення можна розглядати або в певний момент часу, або на кінцевому чи безкінечному інтервалі часу. Визначення ймовірності розорення є однією з ключових завдань класичної теорії ризику [6—8].

Оцінка ймовірності розорення не лише як відсутність банкрутства, а і його недопущення, є основою побудови основної концепції забезпечення платоспроможності страхової компанії. Кількісне оцінювання ймовірності нерозорення, з другого боку, дозволяє знайти оптимальну (раціональну) величину страхового внеску, достатнього для формування адекватного страхового фонду.

Можливість прогнозувати з максимальним ступенем ймовірності ризик неплатоспроможності страхової організації в майбутньому дозволяє відпрацювати у планах і прогнозах стратегію протидії ризику.

Різноманіття форм прояви ризику, частота і тяжкість наслідків його реалізації зумовлюють необхідність проведення поглибленого аналізу ризику й економіко-математичного обґрунтування фінансової політики страхової компанії. Використання економіко-математичних методів дозволяє отримати більш обґрунтовані і достовірні оцінки основних характеристик платоспроможності страхових організацій.

Динамічна теорія страхування описує стан страхової організації більш адекватно, ніж статичні моделі. Основні ідеї динамічного моделювання ймовірності розорення і стану страхової компанії можна визначити таким чином [7]:

1. Динамічна модель ураховує фактор часу t , а процеси надходження внесків і вимог описуються випадковим процесом.
2. Величина поточного капіталу страхової організації залежить від фактору часу t .
3. Характеристикою платоспроможності є ймовірність розорення страхової організації.

Загальноприйнятою мірою ризику у страхуванні є ймовірність банкрутства страхової організації (ризик неплатоспроможності) упродовж часу T , яку можна визначити (за формулою 1) [7]:

$$1 - P(\{\omega: R(t) \geq 0, t \in (0, T)\}). \quad (1)$$

Припустімо, що кількість можливих вимог страхувальників N є невідомою. Слід зазначити, що в динамічній колективній моделі ризику залежність кількості вимог від часу $N = N(t)$ є випадковим процесом, який визначає кількість вимог, які виникли за проміжок часу $[0, t]$. Як зазначено в роботі [7], колективна модель ризику є більш реалістичною та надає більш можливостей управління ризиком для страхової компанії. Модель ризику із урахуванням того, що кількість вимог X_i позитивна і незалежна від N , є такою:

$$X = \sum_{i=1}^N X_i. \quad (2)$$

Тут функція $\varphi(x, k) = P(\{\omega: R(j) \geq 0, j = 0, 1, \dots, k\})$ визначає ймовірність нерозорення, тобто платоспроможність страхової організації на певному часовому інтервалі $[0, k]$, а функція $\varphi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x, k)$ визначає цю ймовірність на нескінченному інтервалі $[0, \infty]$. Визначення аналітичного вигляду цих функцій дозволить оцінити платоспроможність страхової компанії.

Інфляція негативно впливає на всі аспекти страхової справи, у тому числі й на стан страхових резервів, причому такий вплив має достатньо складний і багатогранний характер. Розглянемо основні напрями впливу:

1) вплив на відповідність страхових резервів зобов'язанням, прийнятим на себе страховиком. Не можна вважати, що темпи знецінення зобов'язань і страхових резервів є однаковими, оскільки співвідношення зобов'язань і резервів в умовах інфляції залежить також від структури страхового портфеля та розподілу ризиків. У роботі [9] зазначено, що при визначенні розмірів збитків за індивідуальними договорами страхування вплив інфляції є різним для різних видів страхування, що, у свою чергу, може змінити вартісну структуру портфеля;

2) вплив інфляції є різним залежно від тривалості дії зобов'язань страховика. За незначних термінів дії зобов'язань, як, наприклад, у короткостроковому страхуванні, страховик має можливість адаптувати умови страхування до реального інфляційного процесу;

3) інфляція серйозно впливає на розміщення коштів страхових резервів і структуру резервів страховика, унаслідок цього розрив між очікуваним відсотком і реальним може бути серйозною проблемою для страхової компанії, оскільки страховики тією чи іншою мірою зобов'язані інвестувати частку активів у «безпечні» цінні папери, які мають заздалегідь визначену облікову ставку. Збільшення відсоткових ставок може викликати як знецінення таких паперів, так і знецінення портфеля в цілому. Крім того, в умовах інфляції суворе регулювання розміщення коштів страхових резервів відставатиме від швидких змін ринкової ситуації і може призвести до значних втрат;

4) інфляція впливає на інвестиційний дохід страхової організації як основу індексування зобов'язань, унаслідок чого прибуток страховика з інвестиційних операцій може бути від'ємним.

Однак слід зазначити, що врахування всіх аспектів впливу інфляції може викликати технічні складнощі. У зв'язку з цим, зазвичай, величиною інфляції приймають річний індекс зміни роздрібних цін, який найчастіше використовується страховиками на практиці.

У роботі [9] запропоновано детермінований підхід до врахування показника інфляції в моделі платоспроможності страхової організації:

$$f(t) = \bar{f} + 0.5 \cdot A(t), \quad (3)$$

де $f(t) = +0.5 \cdot A$ — величина інфляції на проміжку часу (t) \bar{f} — середня величина інфляції, $A(t)$ — амплітуда циклу ВВП.

Інша модель інфляції заснована на авторегресійному процесі першого порядку [10], що передбачає вираження коефіцієнта інфляції у відносній величині роздрібних цін. У зв'язку з цим маємо:

$$\Delta \ln RP(t) = \bar{f} + \alpha[\Delta \ln RP(t-1) - \bar{f}] + \delta(t), \quad (4)$$

де $RP(t)$ — величина роздрібних цін; $\bar{f} = E(\Delta \ln RP(t))$, $\delta(t)$ — нормально розподілений білий шум з нульовим математичним очікуванням і дисперсією σ .

$$\text{Оскільки } \Delta \ln RP(t) = \ln PR(t) - \ln PR(t-1) = \ln \left(\frac{PR(t)}{PR(t-1)} \right) = \ln(1+f(t)),$$

то $\ln(1+f(t)) = \bar{f} + \alpha[\ln(1+f(t)) - \bar{f}] + \delta(t)$.

Важливим питанням при оцінці платоспроможності є врахування інфляції премій. Варто врахувати вплив інфляції на фінансовий стан компанії при розрахунку страхових тарифів, розробленні інвестиційної політики, плануванні тощо. Для цього страховики мають прогнозувати величину інфляції і на основі цього прогнозу ухвалювати управлінські рішення. Величина, яку страховик приймає як прогноз інфляції, має назву «інфляція премій». Таким чином, для визначення величини інфляції премій страховикові потрібно визначити величину інфляції попередніх періодів, а також спрогнозувати її рівень на майбутнє. Страховики не мають можливості оцінити величину інфляції за певний проміжок часу одразу ж після його закінчення. Крім того, страховик ухвалює рішення не одразу, а через певний час після отримання достовірної інформації щодо величини інфляції. І, вочевидь, страхова організація має узгодити тарифи (перераховані з новим прогнозним значенням інфляції) з органами страхового нагляду.

Отже, на практиці після закінчення часового періоду, який досліджуємо, існує певний часовий лаг. Підхід, запропонований у роботі, визначає інфляцію за період часу (рік) t дорівнює значенню інфляції з річним часовим лагом:

$$f_{\text{пр}}(t+1) = f(t-1-t_d), \quad (5)$$

де t_d — число років затримки при визначенні фактичної величини інфляції.

Такий метод дозволяє визначити величину інфляції премій на найближчий рік, однак він припускає, що тривалість періоду дії договору може перевищувати рік. При визначенні величини інфляції премій на найближчі декілька років страховик не може орієнтуватися тільки на результат останнього відомого йому року, а має спрогнозувати розмір інфляції на декілька років уперед. Наприклад, величина інфляції премій дорівнює середньому арифметичному відомих значень інфляції за останні p років:

$$f_{\text{пр}}(t+j) = \frac{\sum_{y=2}^6 f(t-y)}{5}, \quad (6)$$

де $j: 0 \div d$, j — показник тривалості прогнозу; y — змінна глибини бази прогнозу; d — максимальна довжина періоду дії договору.

Слід визнати, що такий простий метод є точним, але застосування середнього значення дозволить попередити виникнення помилки прогнозування, викликані різкими коливаннями величини інфляції. Можна побачити, що прогноз інфляції премій однаковий для всіх j за фіксованого значення t . Тоді для отримання сумарної інфляції премій за декілька років з моменту t потрібно величину $(1+f(j))$ підвести до ступеня j .

Також треба ввести змінну, яка позначатиме сумарну інфляцію, тобто величину зростання роздрібних цін за період, що розглядаємо:

$$f_{\text{сум}}(t) = \prod_{j=1}^{t-1} [1+f(j)], \quad t > 1.$$

$$f_{\text{сум}}(t) = 1 \quad \text{за } t = 1.$$

Відповідно, зручно використати значення сумарної інфляції при визначенні сумарної інфляції премій:

$$f_{\text{сум}}(t) = \prod_{j=1}^{t-1} f(t-j) \cdot f_{\text{сум}}(t-t_d), \quad \text{за } t > t_d$$

$$f_{\text{сум}}(t) = 1 \quad \text{за } t \leq t_d.$$

Оцінимо вплив інфляції на величину норми дохідності. Сумарний рівень інфляції за n періодів можна визначити так:

$$f_{\text{сум}} = \prod_1^n (1 + f_i) - 1. \quad (7)$$

Середньорічний рівень інфляції визначимо з припущенням, що інтервали визначення показника інфляції однакові та застосуємо поняття середнього за період рівень інфляції. За такого підходу можна враховувати, що рівень інфляції протягом усіх місяців року є постійним. Отримаємо середньорічний рівень інфляції:

$$\bar{f} = n \sqrt[n]{\prod_1^n (1 + f_i)} - 1. \quad (8)$$

Оцінимо вплив інфляції на річну відсоткову ставку. Для реально чинної в умовах інфляції річної відсоткової ставки дохідності маємо:

$$r^* = \frac{r - f_{\text{сум}}}{1 + f_{\text{сум}}}. \quad (9)$$

Отже, у подальших розрахунках урахувуватимемо норму дохідності з поправкою на показник інфляції (r^*). Для зручності далі позначку $*$ опустимо.

В умовах ринкової економіки страхування є важливим чинником розгортання інвестиційної діяльності. Страхові компанії, з одного боку, у процесі здійснення своєї основної (операційної) діяльності страхують економічні інтереси суб'єктів господарювання від імовірних ризиків і, тим самим, стимулюють інвестиційну активність, а з другого — є безпосередніми інвесторами (за напрямками, визначеними законодавством про страхування), тобто фінансові ресурси, що акумулюються страховими компаніями, можуть бути джерелом інвестицій в економіку. Слід зазначити, що кожна страхова компанія дотримується власної інвестиційної політики, яка виступає одним з основних чинників забезпечення ефективного функціонування компанії.

Інвестиційний потенціал страхової організації складається з двох основних частин — власного капіталу і залучених ресурсів, причому внаслідок галузевої специфіки залучена частина значно перевищує власну.

Діяльність страхової організації заснована на створенні грошових фондів, джерелом яких є кошти страхувальників, які надходять у формі страхових премій та які лише тимчасово перебувають у розпорядженні страховика. Далі ці кошти спрямовуються або на сплату страхувальникам певних обумовлених договором сум, або перетворюються в дохід страховика. Але перш ніж перетворитись на дохід, ці кошти можуть бути використані лише як інвестиційне джерело або на інші, передбачені законодавством цілі.

Залучений характер страхових резервів, які формує страховик, вимагає від нього продуманої інвестиційної політики і врахування ризику інвестиційної діяльності при виборі напрямів інвестицій. Від результатів інвестиційної діяльності страховика залежить його можливість виконання зобов'язань за договорами страхування: якщо інвестиційна програма страховика обрана недостатньо продумано і об'єкт інвестицій виявиться незадовільним, то банкрутство може очікувати і самого страховика. Тому формування інвестиційного довгострокового і короткострокового портфеля страховика, оцінка ризикованості активів відіграють не менш важливу роль для страховика, як і достовірна оцінка страхового ризику.

На наш погляд, інвестиційна діяльність страхових компаній має певні особливості.

1. Страховики в розвинутих країнах завжди перебувають у першій трійці великих інвесторів (банки, страхові компанії та пенсійні фонди). Співвідношення вказаних трьох складових розрізняється в кожній країні, але склад є незмінним.

2. Страхова компанія володіє двома видами інвестиційних ресурсів: власними засобами (які не мають випадкового характеру і не є пов'язаними напряму зі страховими зобов'язаннями) і засобами, які представляють страхові резерви (пов'язані із зобов'язаннями за договорами страхування, які мають випадковий характер). Слід зазначити, що кожна з цих складових має певну специфіку та обмеження щодо можливості їхнього інвестування.

3. Інвестиційна діяльність страхових компаній досить суворо регламентується з боку держави, особливо це стосується інвестування коштів, які представляють страхові резерви.

4. Для страхової компанії інвестиційна діяльність має не основний, а допоміжний характер, хоча для лайфових страхових компаній цей тезис є менш значним. При цьому основна діяльність – страхова накладає свої обмеження на інвестиційну діяльність.

Розглянемо модель ризику страхової компанії, яка функціонує на двовимірному (B, S) -ринку, тобто здійснює розміщення тимчасово вільних коштів в акції S (ризиковий актив із прибутковістю ρ_n) і на депозитний рахунок B (безризиковий актив зі ставкою дохідності r) [7], для якого:

$$\Delta B_n = r \cdot B_{n-1}, B_0 > 0;$$

$$\Delta S_n = \rho_n \cdot S_{n-1}, S_0 > 0, n \leq N,$$

де $r \geq 0$ — норма дохідності інвестиційних вкладень, причому $(a < r < b)$, і рівнем прибутковості:

$$\rho_n = \begin{cases} b \text{ з імовірністю } p \in [0,1], \\ a \text{ з імовірністю } q = 1 - p, \\ n = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Модель ризику страхової організації, як показано вище, ураховує норму дохідності, на яку, у свою чергу, впливає показник інфляції. Визначення показників інфляції є одним зі складних моментів у здійсненні інвестиційної діяльності та оцінці платоспроможності страхової організації.

Вважатимемо, що страхова організація із капіталом $x = R_0$ формує інвестиційний портфель (β_1, γ_1) у момент часу $n = 0$:

$$R_0 = \beta_1 \cdot B_0 + \gamma_1 \cdot S_0. \quad (10)$$

У момент часу $n = 1$ величина капіталу дорівнює:

$$R_0 = \beta_1 \cdot B_1 + \gamma_2 \cdot S_1 + V - Z_1, \quad (11)$$

де V — надходження страхових премій; Z_1 — позитивна випадкова величина, яка являє собою загальну величину вимог страхувальників щодо страхових виплат впродовж визначеного періоду. Цей капітал реінвестується в портфель (β_2, γ_2) , так що величина капіталу становить $R_2 = \beta_2 \cdot B_2 + \gamma_2 \cdot S_1$. Тоді на момент часу n маємо:

$$R_n = \beta_n \cdot B_n + \gamma_n \cdot S_n + V - Z_n, \quad (12)$$

де послідовність $\pi = (\beta_n, \gamma_n)$ $n \geq 0$ являє собою інвестиційну стратегію, а Z_n — позитивну випадкову величину, яка характеризує загальну кількість вимог упродовж часу $\{(n-1); n\}$.

Позначимо диференціальну функцію розподілу Z_n як $F(Z_n) \equiv F(Z)$.

Отже, динаміка капіталу страхової компанії характеризується формулою:

$$R_{n+1} = \beta_n \cdot B_{n+1} + \gamma_n \cdot S_{n+1} + V - Z_{n+1} = R_n \cdot (1 + r) + \gamma_n \cdot S_n (\rho_{n+1} - r) + V - Z_{n+1}. \quad (13)$$

Показано [6], що інтегральне рівняння ймовірності неплатоспроможності в загальному варіанті має формулу:

$$\psi_{k+1}(x) = e^{-\mu[x(1+r)+V]} + \int_0^{x(1+r)+V} \psi_k(x(1+r) + V - y) \mu \cdot e^{-\mu y} dy, \quad (14)$$

де $\psi_1(x) = e^{-\mu[x(1+r)+V]}$.

Якщо норма дохідності $r = 0$, тоді рівняння для визначення ймовірності неплатоспроможності страхової організації буде таким:

$$\psi_{k+1}(x) = e^{-\mu[x(1+r)+V]} + \int_0^{x+V} \psi_k(x+V-y)\mu \cdot e^{-\mu y} dy. \quad (15)$$

Розглянемо випадок розміщення страховою організацією грошових коштів як у ризикові, так і в безризикові активи, коефіцієнт співвідношення яких в інвестиційному портфелі страхової організації позначимо α і припустимо наявність постійного співвідношення $\alpha_n \equiv \alpha$. У разі існування функції експоненціального розподілу F отримаємо відповідну оцінку:

$$\alpha_n = \frac{\gamma_{n+1} Z_n}{R_n}. \quad (16)$$

Зазначимо, що $\gamma_n + 1$ — кількість найменувань активів S , які купує компанія після укладення договорів страхування на загальну суму V і сплати за вимогами страхувальників суми Z_n , і таким чином величина капіталу становить R_n . Динаміка власного капіталу страхової організації може бути описана рівнянням:

$$R_{n+1} = R_n \cdot (1+r) + \gamma_n \cdot S_n(\rho_{n+1} - r) + V - Z_{n+1}. \quad (17)$$

Та ймовірність неплатоспроможності страхової організації можна визначити так:

$$\varphi_1(R_0) = P(\omega: R_1 < 0) = 1 - pF_Z(R_0[1+r+\alpha(b-r)]+V) - qF_Z(R_0[1+r+\alpha(a-r)]+V). \quad (18)$$

Для варіанта, коли потік вимог описується функцією експоненціального розподілу $F(y) = 1 - e^{-\lambda y}$, маємо таку оцінку:

$$\varphi_\infty(x) \leq \varphi_1(x) \left[1 - \frac{r+p\alpha(b-r)+q\alpha(a-r)}{[r+\alpha(b-r)][r+\alpha(a-r)]} e^{-\lambda V} \right]^{-1}. \quad (19)$$

Для варіанта інвестування в безризикові активи, тобто $r\alpha = 0$, і за умов: $e - \lambda c$ маємо:

$$\varphi_\infty(x) \leq \varphi_1(x) \left[1 - \frac{e^{-\lambda V}}{r} \right]^{-1}. \quad (20)$$

Якщо страхова компанія здійснює вкладення лише в ризикові активи, тобто $\lambda a = 1$, маємо для ймовірності нерозорення:

$$\varphi_\infty(x) \leq \varphi_1(x) \left[1 - \frac{pb+qa}{ab} e^{-\lambda V} \right]^{-1}. \quad (21)$$

Оцінимо величину страхового внеску, достатнього для забезпечення страхового фонду, який, у свою чергу, зможе забезпечити платоспроможність страхової організації. Страхова компанія укладає N типових договорів страхування, причому вимоги страхувальників утворюють потоки з однаковими інтенсивностями $\pi(V)$. Тоді інтенсивність сумарного потоку вимог N клієнтів до страхової компанії можна визначити так: $N\pi(V)$. Тоді маємо:

$$\begin{aligned} \int_a^K \pi(dy) &= V_0, \\ \int_a^K y\pi(dy) &= V_1. \end{aligned} \quad (22)$$

Ціна одного страхового поліса становить $V > 0$, тоді сума загальних надходжень до страхової компанії на початку страхування дорівнює VN , тоді K — власний капітал страхової компанії на початку періоду страхування.

Припустімо, що сума $K + VN$ розміщена на банківському рахунку, наприклад, під складні відсотки із відсотковою ставкою $r > 0$. Тоді через період часу t на рахунку страхової компанії буде накопичена сума: $(K + VN)(1 + r)^t$. За той самий період страховою організацією на вимоги клієнтів буде сплачена сума:

$$\int_0^t \int_d^K (y + \rho K_s) \omega_N(dy, ds), \quad (23)$$

де K_s — величина поточного капіталу страхової компанії на момент часу t :

$$K_t = (K + VN)(1 + r)^t - \int_0^t \int_d^K (y + \rho K_s) \omega_N(dy, ds). \quad (24)$$

Надходження страхових внесків забезпечує приріст капіталу страхової компанії до кінця терміну страхування. Маємо формулу:

$$\begin{aligned} \mu(A, t) &= v_N(A, t) - N\pi(A, t), \\ Mv_N(A, t) &= N\pi(A, t). \end{aligned} \quad (25)$$

Тоді величина власного капіталу така:

$$K_t = (K + VN)(1 + r)^t - \int_0^t \int_d^K (y + \rho K_s) \pi_N(dy, ds) - \int_0^t \int_d^K (y + \rho K_s) \mu_N(dy, ds). \quad (26)$$

Нехай $\varphi_t = MK_t$, тоді в силу того, що $M \int_0^t \int_d^K (y + \rho K_s) \mu_N(dy, ds) = 0$.

Маємо:

$$\begin{aligned} \varphi_t &= (K + VN)(1 + r)^t - N \int_0^t \int_d^K (y + \rho K_s) \pi_N(dy, ds), \\ &\text{або} \\ \frac{d\varphi_t}{dt} &= (K + VN) \ln(1 + R) (1 + r)^t - NV_1 - NV_0 \varphi_t, \quad \varphi_0 = K + VN. \end{aligned} \quad (27)$$

Розв'язання цього рівняння дозволяє отримати формулу:

$$\begin{aligned} \varphi_t &= e^{-Nc_0 t} \left[\int_0^t e^{Nc_0 s} [(K + VN) \ln(1 + r) (1 + r)^s - NC_1] ds + (K + VN) \right] = \\ &= e^{-NV_0 t} \int_0^t e^{NV_0 s} (1 + r)^s ds - \frac{V_1}{V_0} [1 - e^{-NV_0 t}] + (K + VN)e^{-NV_0 t}. \end{aligned} \quad (28)$$

Або після перетворень маємо формулу:

$$\varphi_t = \frac{(K + VN) \ln(1 + r)}{NV_0 + \ln(1 + r)} [(1 + r)^t - e^{-NV_0 t}] - \frac{V_1}{V_0} + \frac{V_1}{V_0} e^{-NV_0 t} + (K + VN)e^{-NV_0 t}. \quad (29)$$

Наприкінці періоду страхування, тобто за $t = T$, за значного обсягу укладених договорів страхування ($N \rightarrow \infty$), середній капітал страхової організації може бути розрахований за формулою:

$$\varphi_t = \frac{V \ln(1 + r)(1 + r)^T}{V} - \frac{V_1}{V_0}. \quad (30)$$

Для забезпечення платоспроможності страхової організації необхідне перевищення початкового капіталу на величину d . Для визначення величини страхового внеску потрібно розв'язання рівняння:

$$\varphi_t = \frac{V \ln(1 + r)(1 + r)^T - V_1}{V_0} = K + d. \quad (31)$$

Маємо: $V = \frac{KV_0 + V_1}{\ln(1 + r)(1 + r)^T} + \Delta$, де $\Delta = \frac{dV_0}{\ln(1 + r)(1 + r)^T} + \Delta^*$ — навантаження.

Тоді страховий тариф можна визначити за формулою:

$$Tariff = \frac{V}{S} = \frac{KV_0 + V_1}{S \ln(1+r)(1+r)^T} + \Delta^*. \quad (32)$$

У разі нарахування простих відсотків маємо:

$$K_t = (K + VN)(1+r)^t - \int_0^t \int_d^K (y + \rho K_s) \pi_N(dy, ds) + \int_0^t \int_d^K (y + \rho K_s) \mu_N(dy, ds). \quad (33)$$

Розв'язуючи це рівняння, маємо: $\varphi_t = e^{-NV_0 t} \left[\int_0^t e^{NV_0 s} [(K + VN) - NV_1] ds + (K + VN) \right] = e^{-NV_0 t} \int_0^t e^{NV_0 s} (1+r)^s ds - \frac{V_1}{V_0} [1 - e^{-NV_0 t}] + (K + VN)e^{-NV_0 t}$.

У разі масового страхування, тобто за $N \rightarrow \infty$, маємо: $\varphi_t = \frac{rV - cV_1}{V}$, або $\frac{rV - V_1}{V_0} = K + d$, звідки маємо: $V = \frac{(K+d)V_0 + V_0}{r} = \frac{KV_0 + V_1}{r} + \Delta$.

Далі визначимо величину навантаження, щоб імовірність розорення страховика складала α . Використовуючи центральну граничну теорему для варіанта нарахування простих відсотків, маємо:

$$P\{\sum_{k=1}^N (K_k - MK_k) > fN\} = 1 - \Phi\left(\frac{f}{b} \sqrt{\frac{1+rT}{\lambda T}}\right) = \alpha. \quad (34)$$

Нехай x_α — розв'язання рівняння (34). Тоді величину навантаження для варіанта нарахування простих відсотків можна визначити так:

$$f = x_\alpha b \sqrt{\frac{\lambda T}{(1+rT)N}}. \quad (35)$$

У разі нарахування складних відсотків маємо: $P\{\sum_{k=1}^N (K_k - MK_k) > fN\} = 1 - \Phi\left(\frac{\delta}{b} \sqrt{\frac{2N \ln(1+r)}{\lambda \left[1 - \frac{1}{(1+r)^{2T}}\right]}}\right) = \alpha$.

$$\text{Тоді } \frac{f}{b} \frac{f_{\text{складн}}}{\sqrt{\frac{2N \ln(1+r)}{\lambda \left[1 - \frac{1}{(1+r)^{2T}}\right]}}} = x_\alpha.$$

Звідки маємо для варіанта нарахування складних відсотків:

$$f = x_\alpha b \sqrt{\frac{\lambda \left[1 - \frac{1}{(1+r)^{2T}}\right]}{2N \ln(1+r)}}. \quad (36)$$

Отримання залежності для визначення навантаження дозволить страховій компанії більш оперативно реагувати на зміни ринкової кон'юнктури шляхом зміни страхового тарифу, проводити більш гнучку тарифну політику або вивільнити кошти для цілей інвестування.

Висновки із дослідження і далі перспективи. Із застосуванням стохастичного підходу отримано інтегральне рівняння ймовірності неплатоспроможності страхових організацій, яке може бути використано для оцінювання і прогнозування ризику неплатоспроможності страхових організацій.

Подальшим напрямом досліджень є дослідження розподілу основних параметрів (зокрема, норми дохідності або показника інфляції) інтегрального рівняння ймовірності неплатоспроможності страхової організації та визначення їхніх чисельних характеристик. З використанням функції перетворення випадкових величин можна отримати диференціальну функцію розподілу ймовірності неплатоспроможності страхових організацій.

Література

1. Гусак А. С., Кабанов А. І. Аналіз сучасної практики страхування інвестиційних проектів у вуглевидобуванні. *Бізнес Інформ*. 2013. № 3. С. 129—135.
2. Ненно І., Зубаль А. Економічна сутність фінансової стійкості страхових компаній. *Вісник Донбаської державної машинобудівної академії*. 2012. № 4 (9). С. 260—263.
3. Melnikov A. Risk analysis in finance and insurance. 2011. URL : <https://www.crcpress.com/Risk-Analysis-in-Finance-and-Insurance-Second-Edition/Melnikov/p/book/9781420070521> (date of access: 11.04.2018).
4. Бойков А. В. Модель Крамера — Лундберга со стохастическими премиями. *Теория вероятностей и ее применение*. 2002. Т. 47. № 3. С. 549—553.
5. Андрощук О. М., Мішура Ю. С. Оцінка ймовірності банкрутства страхової компанії, яка функціонує на BS-ринку. *Український математичний журнал*. 2007. Т. 59. № 11. С. 1443—1453.
6. Жумік О. В., Стадник Ю. А. Застосування методів актуарної математики для визначення ймовірності банкрутства страхової компанії. *Науковий вісник Херсонського державного університету. Економічні науки*. 2014. Вип. 8 (5). С. 149—152.
7. Бондарев Б. В. Математические модели в страховании. Донецк : Апекс, 2002. 116 с.
8. Реннер А. Г., Ерофеев А. В. Анализ вероятности неразорения страховой компании в коллективных моделях риска. *Вестник Одесского государственного университета*. 2007. № 8. С. 69—72.
9. Pentikainen T. Solvency of Insurers and Equalization reserves. Helsinki : Finnish insurance training and publishing company Ltd. 1982. Vol. 1. P. 3—8.
10. Daykin C. D., Pentikainen T., Pesonen M. Practical Risk Theory for Actuaries. London : Chapman & Hall, 1994. P. 218—224.
11. Пістунов І. М. Розрахунок коефіцієнта коректування тарифних нетто-ставок в безризиковому страхуванні. *Науковий вісник Національного гірничого університету*. 2010. № 4. С. 145—147.
12. Мельник К. В. Удосконалення методики прогнозу оцінки економічної ефективності розробки родовищ рудних корисних копалин. *Науковий вісник Національного гірничого університету*. 2017. № 5. С. 146—151.

Статтю рекомендовано до друку 17.03.2021

© Череп А. В., Череп О. Г., Кисільова І. Ю., Швець Ю. О.

References

1. Husak, A. S., & Kabanov, A. I. (2013). Analiz suchasnoi praktyky strakhuvannia investytsiinykh proektiv u vuhlevydobuvanni [Analysis of modern practice of insurance of investment projects in coal mining]. *Biznes Inform — Business Inform*, 3, 129—135 [in Ukrainian].
2. Nienno, I. & Zubal, A. (2012). Ekonomichna sutnist finansovoi stiikosti strakhovykh kompanii [The economic essence of financial stability of insurance companies]. *Visnyk Donbaskoi derzhavnoi mashynobudivnoi akademii — Scientific bulletin of Donbass state machinebuilding academy*, 4, 260—263 [in Ukrainian].
3. Melnikov, A. (2011). Risk analysis in finance and insurance. Retrieved April 11, 2018, from <https://www.crcpress.com/Risk-Analysis-in-Finance-and-Insurance-Second-Edition/Melnikov/p/book/9781420070521>.
4. Boykov, A. V. (2002). Model' Kramera — Lundberga so stohasticheskimi premiyami [Cramer — Lundberg model with stochastic premiums]. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniye — Probability theory and its application*, 3 (47), 549—553 [in Russian].
5. Androshchuk, M. O. & Mishura, Yu. S. (2007). Otsinka ymovirnosti bankrutstva strakhovoi kompanii, yaka funktsionuiye na BS-rynku [Estimation of bankruptcy probability of insurance company at BS-market]. *Ukrainskyi matematychnyi zhurnal — Ukrainian Mathematical Journal*, 11 (59), 1443—1453 [in Ukrainian].
6. Zhumik, O. V. & Stadnyk, Yu. A. (2014). Zastosuvannia metodiv aktuarnoi matematyky dlia vyznachennia ymovirnosti bankrutstva strakhovoi kompanii [Application of actuarial mathematics methods to determine the probability of bankruptcy of an insurance company]. *Naukovyi visnyk Khersonskoho derzhavnoho universytetu. Ekonomichni nauky — Scientific bulletin of Kherson state university Economical sciences*, 8 (5), 149—152 [in Ukrainian].
7. Bondarev, B. V. (2002). *Matematicheskie modeli v strahovanii [Mathematical models in insurance]*. Donetsk: Apeks [in Russian].
8. Renner, A. G., & Erofeev, A. V. (2007). Analiz veroyatnosti nerazoreniya strakhovoy kompanii v kolektivnih modelyakh riska [The analysis of insurance company bankruptcy in collective risk models]. *Vestnik Odesskogo gosudarstvennogo universiteta — Scientific bulletin of Odessa state university*, 8, 69—72 [in Russian].
9. Pentikainen, T. (1982). Solvency of Insurers and Equalization reserves. Vol. 1. Helsinki: Finnish insurance training and publishing company Ltd.
10. Daykin, C. D., Pentikainen, T., & Pesonen, M. (1994). Practical Risk Theory for Actuaries. London: Chapman & Hall.
11. Pistunov, I. M. (2010). Rozrakhunok koefitsiienta korektuvannia taryfnykh netto-stavok v bezryzykovomu strakhuvanni [Calculation of the coefficient of adjustment of net tariff rates in risk-free insurance]. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho hirnychoho universytetu — Scientific Bulletin of the National Mining University*, 4, 145—147 [in Ukrainian].
12. Melnyk, K. V. (2017). Udoskonalennia metodyky prohnaznoi otsinky ekonomichnoi efektyvnosti rozrobky rodovyshch rudnykh korysnykh kopalyn [Improving the methodology of forecast assessment of economic efficiency of development of ore deposits]. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho hirnychoho universytetu — Scientific Bulletin of the National Mining University*, 5, 146—151 [in Ukrainian].

The article is recommended for printing 17.03.2021

© Cherep A., Cherep O., Kisilyova I., Shvets Yu.