

## **Ітераційні методи розв'язування задачі про розподіл тиску газу в трубопроводах**

Ярослав П'янило<sup>1</sup>, Мирослав Притула<sup>2</sup>, Богдан Землянський<sup>3</sup>

<sup>1</sup> к. ф.-м. н., ст. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: pгом@cmm.lviv.ua

<sup>2</sup> к. ф.-м. н., ст. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: prytula@cmm.lviv.ua

<sup>3</sup> аспірант, Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: zbv@action.com.ua

*Побудовано ітераційну процедуру знаходження розв'язку задачі про розподіл тиску газу в трубопроводі в умовах його нестационарного руху, якщо граничні умови є змінними і залежать від знайденого розподілу тиску.*

**Ключові слова:** моделювання фізичних процесів, нестационарні задачі математичної фізики, інтегральні перетворення, обчислювальний експеримент.

**Вступ.** Керування потоками газу в складних газотранспортних мережах, зазвичай, здійснюється компресорними станціями. У загальному випадку, внаслідок надходження та відведення газу в систему, увімкнення та вимкнення газоперекачуючих агрегатів компресорних станцій, характер руху газу є нестационарним [1, 2]. Для існуючих математичних моделей таких мереж побудова алгоритму та розрахунок гідродинамічного спряження параметрів руху в нестационарному випадку пов'язані зі значними труднощами. При цьому виникають принципові проблеми у формулюванні й узгодженні початково-граничних умов. Узгодження умов приводить до необхідності розв'язування нелінійних алгебраїчних систем рівнянь високого порядку [3, 4]. До того ж, у реальних задачах заміряні дані отримують у дискретному вигляді та зі значною похибкою. Це обмежує можливість використання числових методів. У такій ситуації доцільно розбити газотранспортні мережі на підмережі таким чином, щоб локальне збурення нестационарного потоку газу в них не впливало, в певному інтервалі часу, на сусідні підмережі. Тоді, в окремих випадках, граничні умови є змінними і залежать від розв'язку задачі.

### **1. Постановка задачі**

Нестационарний процес течії газу в ізотермічному режимі описується нелінійною системою взаємозв'язаних диференціальних рівнянь у часткових похідних [1-5]

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} + \rho\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\lambda v^2}{2D} \rho + \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де  $p$  — тиск газу;  $\rho$  — густина;  $v$  — швидкість;  $\lambda$  — коефіцієнт гідравлічного опору;  $g$  — прискорення вільного падіння;  $h$  — перепад висот вздовж трубопроводу;  $D$  — діаметр труби;  $c$  — швидкість звуку в газі;  $\alpha$  — коефіцієнт Коріоліса;  $t$  — час;  $x$ ,  $x \in [0, l]$  — біжуча координата;  $l$  — довжина трубопроводу.

Шукані фізичні параметри газу  $p$  і  $\rho$  пов'язані між собою рівнянням стану [2, 6]

$$p = \chi RT\rho, \quad (2)$$

де  $T$  — абсолютна температура,  $R$  — газова стала,  $\chi$  — коефіцієнт надстисливості, який характеризує відмінність ідеального газу від реального і може бути обчислений згідно емпіричної формули [2, 6]

$$\chi = \frac{1}{1 + fp}, \quad (3)$$

в якій  $f = (24 - 0,21t^\circ C)1,01302 \cdot 10^{-10}$ ,  $t^\circ C$  — температура газу за шкалою Цельсія.

Для знаходження розв'язку системи (1) необхідно задати початкові та граничні умови.

У даному випадку за початковий розподіл доцільно прийняти стаціонарний розподіл тиску газу в трубі, який встановився до збурення газового потоку.

Обмежимося випадком, коли збурення потоку газу обумовлено зміною об'ємної витрати на одному з кінців трубопроводу. При цьому відомими є об'ємні витрати газу  $q_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  у певні моменти часу  $t_i$ . На основі цих даних будується загальна функціональна залежність витрат  $q = q(t)$ . Обробка та аналіз існуючих даних показали, що таку залежність можна вибрати у вигляді

$$q(t) = \alpha + \beta \exp(-\gamma t),$$

де параметри  $\alpha, \beta, \gamma$  визначаються на основі значень  $q_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

Ефективними методами розв'язування такого класу задач є ітераційні. Ітераційні схеми є стійкими й швидкозбіжними в тому випадку, коли вихідне наближення є близьким до шуканого розв'язку. Зазвичай, за вихідне наближення приймають розв'язок лінеаризованої задачі. Слід зауважити, що в багатьох випадках лінеаризована задача дозволяє розв'язати певну кількість практичних проблем, які виникають при дослідженні параметрів нестационарного руху газу [2].

Для горизонтальних трубопроводів, за умови постійного значення коефіцієнта надстиєливості  $\chi$  та двочленної апроксимації функції  $v^2 \approx a + bv$ , лінеаризований варіант системи (1) має вигляд [2, 5]

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t} + a\omega - bp = 0, \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

де  $\omega = \rho v$  — масова витрата газу,  $b = \lambda v_1 v_2 / (2Dg\chi RT)$  і  $a = \lambda (v_1 + v_2) / (2D)$  — сталі апроксимації.

Знайдемо розв'язок системи (4) за таких початкових

$$p(x, 0) = p_0 + p_k \exp(-b(l-x)), \quad \omega(x, 0) = \rho_0 q_0 \quad (5)$$

та граничних умов

$$p(l, t) = p_l, \quad \omega(0, t) = \rho_0 q(t). \quad (6)$$

Параметри, що входять у співвідношення (5) та (6), обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{p_{00} - p_{kk} \exp(-bl)}{1 - \exp(-bl)}, \quad p_k = \frac{p_{00} - p_{kk}}{1 - \exp(-bl)}, \\ q(t) &= \alpha + \beta \exp(-\gamma t), \quad \alpha = q_1, \quad \beta = q_0 - q_1, \\ \gamma &= -\frac{1}{t_1} \ln \frac{q_2 - q_1}{q_0 - q_1} \end{aligned} \quad (7)$$

$p_{00}, p_{kk}$  — значення тисків при  $t = 0$  відповідно на початку і в кінці труби;  $q_0, q_1$  — об'ємні витрати газу при  $t = 0$  та  $t \rightarrow \infty$ ;  $q_2$  — об'ємна витрата газу в деякий перехідний момент часу  $t_1$ .

## 2. Розв'язування сформульованої задачі

**2.1. Побудова розв'язку в зображеннях Лапласа-Карсона.** Якщо  $s$  — параметр перетворення Лапласа-Карсона [7, 8], а  $\bar{p} \equiv \bar{p}(x, s)$  та  $\bar{\omega} \equiv \bar{\omega}(x, s)$  — зображення оригіналів  $p(x, t)$  та  $\omega(x, t)$ , то в просторі Лапласа-Карсона система (4) має вигляд

$$\begin{cases} (s+a)\bar{\omega} + \frac{d\bar{p}}{dx} - b\bar{p} = s\omega(x, 0), \\ s\bar{p} + c^2 \frac{d\bar{\omega}}{dx} = sp(x, 0). \end{cases} \quad (8)$$

Оскільки

$$\bar{\omega} = \frac{1}{s+a} \left[ s\omega(x,0) - \frac{d\bar{p}}{dx} + b\bar{p} \right], \quad (9)$$

то для визначення зображення тиску отримується таке диференціальне рівняння

$$\frac{d^2\bar{p}}{dx^2} - b\frac{d\bar{p}}{dx} - s_1\bar{p} = \varphi_1, \quad (10)$$

де  $s_1 = s(s+a)/c^2$ ,  $\varphi_1 = -s_1 p(x,0)$ .

Для диференціального рівняння (10) функцією Гріна є [5, 9]

$$G(x, z) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{\exp(\lambda_1(l-z)) - \exp(\lambda_2(l-z))}{\exp(\lambda_1 l) - \exp(\lambda_2 l)} (\exp(\lambda_1 x) - \exp(\lambda_2 x)) - \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq z \leq l, \\ \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\exp(\lambda_1(x-z)) - \exp(\lambda_2(x-z))), & z \leq x \leq l, \end{cases}$$

де  $\lambda_1 = b/2 - \sqrt{(b/2)^2 + s_1}$ ,  $\lambda_2 = b/2 + \sqrt{(b/2)^2 + s_1}$ .

З використанням функції Гріна загальний розв'язок рівняння (10) запиється у вигляді

$$\bar{p}(x, s) = \int_0^l G(x, z)\varphi_1(z)dz + C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x). \quad (11)$$

Постійні величини  $C_1$  та  $C_2$  визначаються граничними умовами.

З виразів (9) і (11) отримується співвідношення для масової витрати газу

$$\bar{\omega}(0, s) = \rho_0(s+a)\bar{q}_1(s) = s\omega(0,0) - \int_0^l G'_x(0, z)\varphi_1(z)dz + A(b-\lambda_1) + B(b-\lambda_2).$$

Тоді розв'язком вихідної задачі в зображеннях Лапласа-Карсона буде

$$\bar{p}(x, s) = \int_0^l G(x, z)\varphi_1(z)dz + \frac{\lambda_1 p_l - \mu(s)\exp(\lambda_2 l)}{\lambda_1 \exp(\lambda_1 l) - \lambda_2 \exp(\lambda_2 l)} \exp(\lambda_1 x) + \frac{\mu(s)\exp(\lambda_1 l) - \lambda_2 p_l}{\lambda_1 \exp(\lambda_1 l) - \lambda_2 \exp(\lambda_2 l)} \exp(\lambda_2 x), \quad (12)$$

де

$$\mu(s) = \rho_0(s+a)\bar{q}_1(s) + \int_0^l G'_x(0, z)\varphi_1(z)dz - s\omega(0,0),$$

$$G'_x(0, z) = -\frac{\exp(\lambda_1(l-z)) - \exp(\lambda_2(l-z))}{\exp(\lambda_1 l) - \exp(\lambda_2 l)}.$$

Якщо в рівності (12) перейти до оригіналу, то отримаємо розподіл тиску вздовж трубопроводу для довільного часу. Оскільки значення тиску на вихідному кінці трубопроводу фіксоване, то для керування потоком газу необхідно знати розподіл тиску за часом на початку трубопроводу ( $x = 0$ ).

З формули (12) випливає, що зображення початкового значення тиску обчислюється за формулою

$$\bar{p}(0, s) = p_l \exp(-bl/2) \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) \exp(-\lambda l)}{\lambda_2 - \lambda_1 \exp(-2\lambda l)} + \mu(s) \frac{1 - \exp(-2\lambda l)}{\lambda_2 - \lambda_1 \exp(-2\lambda l)}. \quad (13)$$

Після перетворень формула (13) набуде вигляду

$$\bar{p}(0, s) = -\eta \left\{ (p_k - p_l) H_1(s) + \frac{c}{2\eta} H_2(s) - \frac{c^2 p_0}{2\eta} H_3(s) + \frac{1}{2} \eta c^2 p_k H_4(s) \right\}, \quad (14)$$

де

$$H_1(s) = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{l\lambda_0}{c} \left[ 1 + \frac{b_c}{\lambda_0} \operatorname{th} \frac{l\lambda_0}{c} \right]} = 2 \exp\left(-\frac{l\lambda_0}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{b_c}{\lambda_0}\right)^n,$$

$$\begin{aligned} H_2(s) &= H_1(s) \frac{1}{\lambda_0} \left( \exp\left(-\frac{\lambda_0 l}{c}\right) - \exp\left(\frac{\lambda_0 l}{c}\right) \right) \left[ \rho_0(s+a)\bar{q}(s) - s\omega(0,0) \right] = \\ &= -\frac{2}{\lambda_0} \left[ \rho_0(s+a)\bar{q}(s) - s\omega(0,0) \right] \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{b_c}{\lambda_0}\right)^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_3(s) &= H_1(s) \frac{s_1}{\lambda_0^2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{b_c}{\lambda_0}\right)^m \left( \exp\left(\frac{\lambda_0 l}{c}\right) + (-1)^m \exp\left(-\frac{\lambda_0 l}{c}\right) \right) = \\ &= \frac{2s_1}{\lambda_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{b_c}{\lambda_0}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{b_c}{\lambda_0}\right)^m, \end{aligned}$$

$$H_4(s) = H_1(s) \frac{s_1}{\lambda_0^2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{b_c}{\lambda_0}\right)^m \left( \exp\left(-\frac{\lambda_0 l}{c}\right) + (-1)^m \exp\left(\frac{\lambda_0 l}{c}\right) \right) =$$

$$= \frac{2s_1}{\lambda_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{b_c}{\lambda_0} \right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{b_c}{\lambda_0} \right)^m,$$

$$\lambda_0 = \sqrt{s^2 + as + b_c^2}, \quad s_1 = \frac{s(s+a)}{c^2}, \quad b_c = \frac{bc}{2}, \quad \eta = \exp\left(-\frac{lb_c}{c}\right).$$

**2.2. Знаходження оригіналу.** Якщо знехтувати доданками, що мають експоненціальний порядок малості, то головні члени розкладу оригіналу  $p(0,t)$  зображення  $\bar{p}(0,s)$  мають вигляд

$$p(0,t) = -\rho \left\{ (p_k - p_l) f_1(t) + \frac{c}{2\eta} f_2(t) - \frac{c^2 p_0}{2\eta} f_3(t) + \frac{1}{2} \eta c^2 p_k f_4(t) \right\}. \quad (15)$$

Тут прийняті такі позначення

$$f_1(t) = 2 \exp\left(\frac{l(s_2 - s_1)}{c} \frac{t}{2}\right) +$$

$$+ 2 \frac{(s_2 - s_1)}{2} \frac{l}{c} \frac{t}{\frac{l}{c}} \int \exp\left(\frac{(s_2 - s_1)}{2} \tau\right) \frac{I_1\left(\frac{(s_2 - s_1)}{2} \sqrt{\tau^2 - (l/c)^2}\right)}{\sqrt{\tau^2 - (l/c)^2}} d\tau +$$

$$+ 2b_c \int \frac{l}{c} \exp\left(\frac{(s_2 - s_1)}{2} \tau\right) I_1\left(\frac{(s_2 - s_1)}{2} \sqrt{\tau^2 - (l/c)^2}\right) d\tau$$

для  $t > l/c$  та  $f_1(t) = 0$  для  $t < l/c$ ,

$$f_2(t) = -2\rho_0 \int_0^t f_{22}(\tau) [aq_k - (q_0 - q_k)(a - q_c) \exp(-q_c(t - \tau))] d\tau,$$

$$f_{22}(\tau) = (-b_c)^n \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \left(\frac{t}{s_2 - s_1}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{(s_2 - s_1)}{2} t\right) I_{\frac{n}{2}}\left(\frac{s_2 - s_1}{2} t\right),$$

$$f_3(t) = \frac{2}{c^2} \int_0^t f_{33}(\tau) \frac{(a + s_2) \exp(s_2(t - \tau)) - (a + s_1) \exp(s_1(t - \tau))}{s_2 - s_1} d\tau,$$

$$f_{33}(\tau) = \mu_0 \frac{s_2 \exp(s_1 \tau) - s_1 \exp(s_2 \tau)}{s_2 - s_1} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^2 \mu_k b_c^k \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(\frac{t}{s_2 - s_1}\right)^{\frac{k-1}{2}} \exp\left(-\frac{a}{2}t\right) I_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{s_2 - s_1}{2}t\right), \\
 f_4(t) & = \frac{2}{c^2} \int_0^t f_{44}(\tau) \frac{(a + s_2) \exp(s_2(t - \tau)) - (a + s_1) \exp(s_1(t - \tau))}{s_2 - s_1} d\tau, \\
 f_{44}(t) & = \gamma_0 \frac{s_2 \exp(s_1 t) - s_1 \exp(s_2 t)}{s_2 - s_1} + \\
 & + \sum_{k=1}^2 \gamma_k b_c^k \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(\frac{t}{s_2 - s_1}\right)^{\frac{k-1}{2}} \exp\left(-\frac{a}{2}t\right) I_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{s_2 - s_1}{2}t\right).
 \end{aligned}$$

В останніх формулах коефіцієнти  $\gamma_k$  та  $\mu_k$  при  $k = 0, 1, 2$  набувають значень  $\{1; 0; 1\}$  та  $\{1; -2; 3\}$  відповідно. Значення цих коефіцієнтів для інших  $k$  визначаються на основі розкладу функцій  $H_i(s)$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , у ряди Тейлора-Діріхле.

### 3. Обчислювальний експеримент

На рис. 1 та 2 показано зміну з часом розподілу тиску газу в кінці трубопроводу довжиною 100 км і діаметром 1 м для таких значень параметрів  $\lambda = 0,01$ ,  $R = 500$  Дж/(кг·К),  $\rho = 0,7$  кг/м<sup>3</sup>,  $v_1 = 5$  м/с,  $v_2 = 15$  м/с,  $\chi$  обчислювалось за формулою (3), температура  $T_c = 288$  К, тиск на вході труби —  $P_0 = 5 \cdot 10^6$  Па.

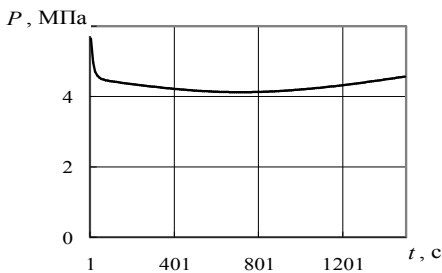


Рис. 1. Зміна тиску з часом у кінці газопроводу упродовж 0,5 год

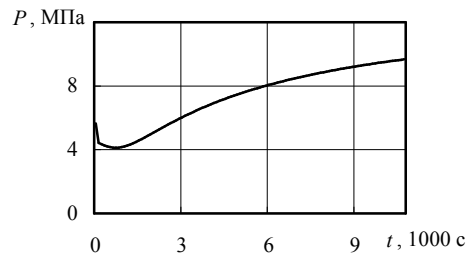


Рис. 2. Зміна тиску з часом у кінці газопроводу упродовж 3 год

#### 4. Висновки та ітераційний алгоритм уточнення розв'язку задачі

Оригінал  $p(0, t)$  знаходився шляхом розкладу відповідного зображення в асимптотичний ряд при великих значеннях параметра Лапласа-Карсона, тобто знайдено розклад оригіналу для малих значень часів. Згідно теорії операційного числення [8], якщо ряд в області зображень є збіжним, то збіжним є і відповідний ряд в області оригіналів. У багатьох випадках цього достатньо для вивчення перехідних процесів. В іншому разі при переході до оригіналу можна врахувати наступні доданки асимптотичного розкладу.

Залежно від того, за якими базовими функціями розкладено ряд в області зображень, ряди в області оригіналів будуть збігатися з різною швидкістю.

Оскільки  $\omega = \rho v$ , то формула (2) і знайдені функції  $\omega(x, t)$  та  $p(x, t)$  дають змогу визначити швидкість течії газу  $v(x, t)$  для лінеаризованого варіанту вихідної системи.

Як було зазначено вище, однією з причин збурення потоку газу в трубопроводі є ввімкнення (вимкнення) газоперекачуючих агрегатів (ГПА). У процесі цього змінюється й об'ємна витрата газу, що призводить до зміни відповідної граничної умови. Тому пропонується наступний ітераційний алгоритм розв'язування задач такого типу.

- Знайти розв'язок задачі в загальному випадку зміни об'ємної витрати газу для невизначених коефіцієнтів  $\alpha, \beta, \gamma$ .
- З використанням замірів об'ємної витрати газу  $q_1$  у момент часу  $t_1$  уточнюється значення сталої  $\gamma$  в формулах (7).
- Визначаються значення вхідного тиску.
- За обчисленим значенням тиску уточнюється режим роботи ГПА та об'ємна витрата газу.
- Згідно кроку 2 уточнюється значення сталої  $\gamma$ .
- Уточнення сталої  $\gamma$  проводиться до того часу, поки ГПА не вийдуть на стаціонарний режим роботи.

#### Література

- [1] Александров А. В., Яковлев Е. И. Проектирование и эксплуатация систем дальнего транспорта газа. — М.: Недра, 1974. — 443 с.
- [2] Бобровский С. А., Щербаков С. Г. и др. Трубопроводный транспорт газа. — М.: Наука, 1976. — 495 с.
- [3] Жидкова М. А. О точности линеаризации уравнений неустановившегося движения газа // Газовая промышленность. — 1965. — № 11. — С. 20-26.
- [4] Ковалко М. П., Грудз В.Я. та ін. Трубопровідний транспорт газу. — К.: Арена, 2002. — 600 с.
- [5] П'янило Я. Д. Розподіл гідравлічного тиску при нестационарному русі газу в трубопроводах при наявності компресорних станцій та відборів // Нелінійні коливання. — Вип. 2. — 1998. — С. 84-88.



- [6] *Вольский Э. Л., Константинова И. М.* Режим работы магистрального газопровода. — Л: Недра, 1970. — 168 с.
- [7] *Диткин В. А., Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. — М.: Высшая шк., 1975. — 407 с.
- [8] *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление. — М.: Высшая шк., 1975. — 407 с.
- [9] *П'янило Я. Д.* Дослідження неусталеного руху газу в пористих середовищах // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2004. — Вип. 2. — С. 178-184.

## **Iterative Methods of Solving the Problem of Gas Pressure Distribution in Pipelines**

Yaroslav P'yanylo, Myroslav Prytula, Bogdan Zemlyansky

*The distribution of gas pressure in pipeline is investigated in nonstationary case when boundary conditions are variable and depend on the initial task solution. An iterative algorithm for problem solving is offered.*

## **Итерационные методы решения задачи о распределении давления газа в трубопроводах**

Ярослав Пянило, Мирослав Притула, Богдан Землянский

*Построена итерационная процедура определения решения задачи о распределении давления газа в трубопроводе в условиях его нестационарного течения, когда граничные условия являются переменными и зависят от найденного распределения давления.*

Отримано 15.09.04