УДК 518.5

Чебишовське наближення сумою многочлена і функції з одним нелінійним параметром

Петро Малачівський

к. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ НАН України, м. Львів, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: psmal@cmm.lviv.ua

Розглядається чебишовське наближення сумою многочлена і функції з одним нелінійним параметром. Встановлено умову, за якої чебишовське наближення з найменшою абсолютною похибкою таким виразом існує й єдине. Наведено приклади таких виразів і класів функцій, для яких чебишовське наближення цими виразами існує.

Ключові слова: чебишовське (рівномірне) наближення, точки чебишовського альтернансу, абсолютна похибка, характеристична властивість.

Вступ. Чебишовське наближення сумою многочлена і функції з одним нелінійним параметром

$$V_n(a;x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + A\varphi(p;\,x),\ A\neq 0,\ p_1<p<p_2,\ n=0,\,1,\,2,\,\ldots, \tag{1}$$

де $\varphi(p;x)$ — функція з нелінійним параметром p, розглядалось у багатьох роботах, зокрема, в [1-6]. Цей вираз не задовольняє умові Хаара і тому виникає питання існування та єдиності чебишовського наближення таким виразом. У зв'язку з цим необхідно дослідити властивості чебишовського наближення виразом (1) і визначити клас функцій, для якого воно існує.

1. Існування чебишовського наближення сумою многочлена і функції з одним нелінійним параметром

Розглянемо вирази вигляду (1), в яких функція $\varphi(p;x)$ з нелінійним параметром p має такі властивості:

1) функція $\varphi(p;x)$ неперервна на відрізку $[\alpha,\,\beta]$ разом з $(n+1)$-ю похідною $\varphi(p;\,x)\in C^{(n+1)}[\alpha,\,\beta]$;

2) n-на похідна $\varphi^{(n)}(p;x)$ є строго монотонною функцією від x на відрізку $[\alpha,\,\beta]$ при будь-яких $p\in(p_1,\,p_2)$;

3) відношення $(n+1)$-их похідних $\varphi(p;x)$ по x $\varphi^{(n+1)}(p;\chi_2)/\varphi^{(n+1)}(p;\chi_1)$ є строго монотонною функцією від p для $p \in (p_1, p_2)$ та довільних $\chi_1, \chi_2 \in [\alpha, \beta]$, $\chi_1 \neq \chi_2$.

При дослідженні існування рівномірного наближення виразом (1) використаємо властивість, що встановлюється теоремою.

Теорема 1. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні і диференційовані на $[\alpha, \beta]$ і похідна $g'(x)$ не набуває нульового значення $g'(x) \neq 0$ для $x \in [\alpha, \beta]$. Тоді для строго монотонних на відрізку $[\alpha, \beta]$ функцій $\Psi(\xi)$

$$\Psi(\xi) \equiv \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(z) - f(y)}{g(z) - g(y)} \tag{2}$$

значення ξ описується зростаючою функцією $\xi = \lambda(y, z)$ щодо y і z.

Доведення. Доведемо, що функція $\lambda(y, z)$ зростаюча відносно z у випадку зростаючої $\Psi(\xi)$.

Припустимо протилежне, що $\lambda(y, z)$ не зростаюча функція від аргументу z. У цьому випадку для деякого $z_1 \in (y, \beta)$ знайдеться таке $z_2 \in (z_1, \beta]$, $z_2 > z_1$, що $\xi_1 \geq \xi_2$, де $y \in [\alpha, z_1)$, $\xi_1 \in (y, z_1)$, $\xi_2 \in (y, z_2)$.

Оскільки за припущенням $\xi_1 \geq \xi_2$ і функція $\Psi(\xi)$ — зростаюча, то

$$\Psi(\xi_1) - \Psi(\xi_2) = \frac{f(z_1) - f(y)}{g(z_1) - g(y)} - \frac{f(z_2) - f(y)}{g(z_2) - g(y)} \geq 0 .$$

Враховуючи строгу монотонність функції $g(x)$ $(g(x) \neq 0, \quad g(x) \in C[\alpha, \beta])$, цю нерівність запишемо у вигляді

$$(f(z_1) - f(y))(g(z_2) - g(y)) - (f(z_2) - f(y))(g(z_1) - g(y)) \geq 0 . \tag{3}$$

Після спрощення лівої частини нерівності (3) додамо до неї і віднімемо добуток $f(z_1)g(z_1)$ і приведемо її до вигляду

$$\frac{f(z_1) - f(y)}{g(z_1) - g(y)} - \frac{f(z_2) - f(z_1)}{g(z_2) - g(z_1)} \geq 0 . \tag{4}$$

Функції $f(x)$ і $g(x)$ задовольняють умову теореми Коші [7] про відношення приростів функцій, тому, застосувавши цю теорему до нерівності (4), отримаємо

$$\Psi(\xi_1) - \Psi(\xi_3) \geq 0 , \tag{5}$$

де $\xi_1 \in (y, z_1)$, $\xi_3 \in (z_1, z_2)$, $z_1 < z_2$.

Оскільки $\xi_1 < \xi_3$, то остання нерівність справджується, якщо функція $\Psi(\xi)$ — не зростаюча, а за припущенням вона є зростаючою.

Отже, отримане протиріччя доводить, що $\xi = \lambda(y,\ z)$ зростаюча функція від z у випадку зростаючої $\Psi(\xi)$.

Аналогічно можна показати справедливість теореми і в інших випадках. *Теорема доведена.*

Умови існування найкращого рівномірного наближення виразом (1) для функцій $\varphi(p; x)$ з нелінійним параметром p, які задовольняють вимогам 1-3, визначаються теоремою.

Теорема 2. Нехай нелінійна функція $\varphi(p; x)$ задовольняє вимогам 1-3. Тоді достатньою умовою існування рівномірного наближення виразом (1) для неперервної функції $f(x)$ $\left(f(x) \in C[\alpha,\ \beta]\right)$ з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha,\ \beta]$ є справджування нерівностей

$$0 < W_1^{(n)} < W^{(n)} < W_2^{(n)}, \qquad (6)$$

де

$$W^{(n)} = \frac{D_{n+1}(f;\ z_2,\ z_3, \ldots,\ z_{n+4})}{D_{n+1}(f;\ z_1,\ z_2, \ldots,\ z_{n+3})}; \qquad (7)$$

$$D_k(U;\ z_i,\ z_{i+1}, \ldots,\ z_{i+k+1}) = \frac{D_{k-1}(U;\ z_{i+1},\ z_{i+2}, \ldots,\ z_{i+k+1})}{D_{k-1}(S_{k-1};\ z_{i+1}, z_{i+2}, \ldots, z_{i+k+1})} -$$

$$- \frac{D_{k-1}(U;\ z_i,\ z_{i+1}, \ldots,\ z_{i+k})}{D_{k-1}(S_{k-1};\ z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{i+k})}, \quad k = 2,3,\ldots; \qquad (8)$$

$$D_1(U;\ z_i,\ z_{i+2}) = U(z_{i+2}) - U(z_i);\ S_k(z) = z^k;$$

$$W_1^{(n)} = \min\left(r_1^{(n)},\ r_2^{(n)}\right);\ W_2^{(n)} = \max\left(r_1^{(n)},\ r_2^{(n)}\right); \qquad (9)$$

$$r_i^{(n)} = \lim_{p \to p_i} \frac{D_{n+1}(\varphi;\ z_2,\ z_3, \ldots,\ z_{n+4})}{D_{n+1}(\varphi;\ z_1,\ z_2, \ldots,\ z_{n+3})},\ i = 1,\ 2;$$

$\{z_i\}_{i=1}^{n+4}$ — довільні числа з відрізка $[\alpha,\ \beta]$ такі, що $z_i < z_{i+1}$ для $i = \overline{1,\ n+3}$.

Доведення. Нехай неперервна функція $f(x)$ $\left(f(x) \in C[\alpha,\ \beta]\right)$ задовольняє умову теореми. Тоді за характеристичною властивістю [8] для існування рівномірного наближення виразом (1) $f(x)$ з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ достатньо, щоб система рівнянь

$$f(z_j) - \sum_{i=0}^{n} a_i z_j^i - A\varphi(p;\ z_j) = (-1)^j \mu, \quad j = \overline{1,\ n+4} \qquad (10)$$

мала єдиний розв'язок щодо невідомих параметрів a_i $\left(i=\overline{0,\ n}\right)$, A, p і похибки μ, де z_k — довільні числа з $[\alpha,\ \beta]$ такі, що $z_k < z_{k+1}$, $k=\overline{1,\ n+3}$. Покажемо, що у разі виконання умови (6) система рівнянь (10) має єдиний розв'язок.

Віднімаючи від $(j+2)$-их рівнянь даної системи j–ті рівняння $\left(j=\overline{1,\ n+2}\right)$, виключимо невідомі a_0 і μ

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\left(z_{j+2}^i - z_j^i\right) + A\left[\varphi\left(p,\ z_{j+2}\right) - \varphi\left(p,\ z_j\right)\right] = f\left(z_{j+2}\right) - f\left(z_j\right),\quad j=\overline{1,\ n+2}, \tag{11}$$

або в позначеннях (8)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i D_1\left(s_i;\, z_j,\ z_{j+2}\right) + AD_1\left(\varphi;\, z_j,\ z_{j+2}\right) = D_1\left(f;\, z_j,\ z_{j+2}\right),\quad j=\overline{1,\ n+2}. \tag{12}$$

З отриманої системи виключимо невідомі a_i $\left(i=\overline{1,\ n}\right)$ і A, що входять лінійно. Виключення параметрів a_i $\left(i=\overline{1,\ n}\right)$ проводитимемо в порядку зростання індекса таким чином. При $i=1$ з кожного рівняння системи (11) визначимо a_1, а потім, попарно віднімаючи j -ті рівняння від $(j+1)$ -их, отримаємо систему

$$\sum_{i=2}^{n} a_i D_2\left(s_i;\, z_j,\ z_{j+1},\ z_{j+2},\ z_{j+3}\right) + AD_2\left(\varphi;\, z_j,\ z_{j+1},\ z_{j+2},\ z_{j+3}\right) =$$
$$= D_2\left(f;\, z_j,\ z_{j+1},\ z_{j+2},\ z_{j+3}\right),\ j=\overline{1,\ n+1} \tag{13}$$

щодо невідомих a_i $\left(i=\overline{2,\ n}\right)$, A і p. Таке виключення із системи невідомого a_1 допустиме, тому що коефіцієнти біля нього

$$D_1\left(S_1;\, z_j,\ z_{j+2}\right) = z_{j+2} - z_j,\ j=\overline{1,\ n+2},$$

не набувають нульового значення. Для продовження в такий самий спосіб виключення решти параметрів a_i $\left(i=\overline{2,\ n}\right)$ необхідно попередньо пересвідчитись, що коефіцієнти біля них також відмінні від нуля. Справді, ці коефіцієнти біля будь-яких довільних впорядкованих за зростанням чисел z_i, $i=\overline{1,\ n+4}$ з відрізку $[\alpha,\ \beta]$ не дорівнюють нулю. Щоб пересвідчитись у цьому, послідовно для $k=1, 2,\ldots\ n-1$ розглянемо вирази

$$\frac{D_k\left(S_{k+1};\, z_j,\ z_{j+1},\ldots,\ z_{j+k+1}\right)}{D_k\left(S_k;\, z_j,\ z_{j+1},\ldots,\ z_{j+k+1}\right)}. \tag{14}$$

Для $k = 1$ значення цього виразу дорівнює відношенню приростів функції $S_2(z) = z^2$ до приростів аргументів

$$\frac{D_1\left(S_2; z_j, z_{j+2}\right)}{D_1\left(S_1; z_j, z_{j+2}\right)} = \frac{z_{j+2}^2 - z_j^2}{z_{j+2} - z_j}.$$

За теоремою Лагранжа [7] про кінцеві прирости, значення цього відношення дорівнює значенню похідної функції $S_2(z) = z^2$ в деякій середній точці ζ_j відрізка $\left[z_j, z_{j+2}\right]$ $\left(\zeta_j \in \left[z_j, z_{j+2}\right]\right)$.

Аналогічно, застосувавши теорему Лагранжа послідовно k раз, можна пересвідчитись у справедливості рівності

$$D_k\left(S_k; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+k+1}\right) = \xi_{j+1} - \xi_j, \tag{15}$$

де $\xi_j \in \left[z_j, z_{j+k}\right]$. Оскільки степенева функція $S_k(z) = z^k$ та її похідні до k-го порядку включно строго монотонні, то за теоремою 1 — $\xi_j < \xi_{j+1}$. Звідси випливає, що коефіцієнти при невідомих a_i $\left(i = \overline{2, n}\right)$ в усіх рівняннях проміжних систем, що отримуються в процесі їх виключення, відмінні від нуля і до того ж додатні.

Отже, в запропонований спосіб із системи рівнянь (13) можна виключити решта невідомих параметрів a_i $\left(i = \overline{2,\ n}\right)$. В результаті, щодо невідомих A і p, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} A D_{n+1}\left(\varphi; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4}\right) = D_{n+1}\left(f; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4}\right) \\ A D_{n+1}\left(\varphi; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3}\right) = D_{n+1}\left(f; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3}\right) \end{cases}. \tag{16}$$

Дослідимо вільні члени рівнянь і коефіцієнти цієї системи біля невідомого A. Для цього розглянемо вираз

$$\frac{D_n\left(U; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+n+1}\right)}{D_n\left(S_n; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+n+1}\right)}. \tag{17}$$

Аналогічно, як і у випадку (14), застосувавши теорему Лагранжа послідовно n разів, можна показати, що вираз (17) є розділеною різницею n-го порядку функції $U(z)$ домноженою на $n!$ на множині точок $\{z_i\}_{i=j}^{j+n+1}$. А тому він дорівнює n-ій похідній функції $U(z)$ у деякій середній точці ς_j відрізка $\left[z_j, z_{j+n+1}\right]$

$$\frac{D_n\left(U;\ z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+n+1}\right)}{D_n\left(S_n;\ z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+n+1}\right)} = U^{(n)}\left(\varsigma_j\right), \tag{18}$$

де $\varsigma_j \in \left[z_j,\ z_{j+n+1}\right]$.

Звідси випливає, що коефіцієнти біля невідомого A в системі (16) дорівнюють приросту n-ої похідної функції $\varphi(p;x)$ за аргументом x, яка за умовою теореми строго монотонна. Отже, коефіцієнти при A в системі (16) не набувають нульових значень. Тому система (16) матиме дійсний відмінний від нульового розв'язок щодо невідомого A, якщо й вільні члени рівнянь (16) також не набувають нульового значення. Згідно рівності (18) вільні члени рівнянь системи (16) дорівнюють приростам n -ої похідної функції $f(x)$, що наближається

$$D_{n+1}\left(f;\, z_j,\, z_{j+1},\ldots,\, z_{j+n+2}\right) = f^{(n)}\left(\xi_{j+1}\right) - f^{(n)}\left(\xi_j\right),\ j = 1,\, 2\,; \tag{19}$$

де $\xi_j \in \left[z_j,\ z_{j+n+1}\right]$.

Оскільки згідно з умовою (6)

$$W^{(n)} < 0\,, \tag{20}$$

де значення $W^{(n)}$ — визначається формулою (7), відношення приростів n -их похідних наближуваної функції $f(x)$ додатне за умовою теореми, то відповідно й самі прирости відмінні від нуля. Це означає, що вільні члени рівнянь системи (16) також не набувають нульових значень. Поділивши перше рівняння системи (16) на друге, отримаємо відносно p трансцендентне рівняння

$$\omega_n(p) = W^{(n)}, \tag{21}$$

де

$$\omega_n(p) = \frac{D_{n+1}\left(\varphi;\, z_{2,}\,,\, z_3,\ldots,\, z_{n+4}\right)}{D_{n+1}\left(\varphi;\, z_1,\, z_2,\ldots,\, z_{n+3}\right)}\,.$$

Згідно (18) ліву частину рівняння (21) можна подати у вигляді

$$\omega_n(p) = \frac{\varphi^{(n)}(p;\,\tau_3) - \varphi^{(n)}(p;\,\tau_2)}{\varphi^{(n)}(p;\,\tau_2) - \varphi^{(n)}(p;\,\tau_1)}\,, \tag{22}$$

де $\tau_i \in \left[z_i,\ z_{i+n+1}\right]$.

За умовою теореми n-на похідна $\varphi^{(n)}(p;\,x)$ є строго монотонною функцією від x на відрізку $[\alpha,\,\beta]$ для будь-яких $p \in (p_1,\, p_2)$, тому згідно теореми 1 справджуються співвідношення $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$. Тоді в лівій частині рівняння (21) можна сформувати відношення розділених різниць приростів n-ої похідної функції $\varphi(p;x)$. Для цього ліву частину рівняння (22) домножимо і поділимо на відповідні різниці приростів аргументу $(\tau_2 - \tau_1)/(\tau_3 - \tau_2)$. Замінивши в (22) отримані розділені різниці відповідними похідними в середніх точках, отримаємо

$$K\varphi^{(n+1)}(p;\zeta_2)/\varphi^{(n+1)}(p;\zeta_1)=W^{(n)}, \tag{23}$$

де

$$K=(\tau_3-\tau_2)/(\tau_2-\tau_1),\ \zeta_1\in[z_1,z_{n+3}],\ \zeta_2\in[z_2,z_{n+4}].$$

Оскільки за умовою теореми відношення $(n+1)$-их похідних $\varphi^{(n+1)}(p;\chi_2)/\varphi^{(n+1)}(p;\chi_1)$ є строго монотонною функцією від p $(p_1<p<p_2)$ для будь-яких $\chi_1,\chi_2\in[\alpha,\ \beta]$, то з (23) випливає, що ліва частина рівняння (21) є строго монотонною функцією від p для $p\in(p_1,\ p_2)$. Ми отримали, що, для будь-яких впорядкованих за зростанням чисел z_i $(i=\overline{1,\ n+4})$ з відрізка $[\alpha,\ \beta]$, ліва частина рівняння (21) для $p\in(p_1,\ p_2)$ набуває значення з інтервалу $\left(W_1^{(n)},\ W_2^{(n)}\right)$, в якому $W_1^{(n)}$ і $W_2^{(n)}$ визначаються за формулами (9). Тому, у разі виконання умови (6), рівняння (21) і відповідно система рівнянь (10) має єдиний дійсний розв'язок. Збіжність ітераційної схеми Ремеза [8] вказує на існування найкращого рівномірного наближення для неперервних функцій $f(x)$ виразом (1) на відрізку $[\alpha,\ \beta]$ у випадку виконання умови (6).

Отже, для неперервних функцій $f(x)$, які задовольняють умові (6), існує рівномірне наближення виразом (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha,\ \beta]$. *Теорема доведена.*

Для знаходження значень параметрів рівномірного наближення виразом (1) можна використовувати алгоритм Ремеза [8].

Варто зазначити, що умова (6) не є необхідною для існування найкращого рівномірного наближення функції $f(x)$ з абсолютною похибкою виразом (1). Її виконання необхідне лише в точках чебишовського альтернансу. У разі використання алгоритму Ремеза для знаходження параметрів рівномірної апроксимації виразом (1), умова (6) повинна справджуватися в усіх точках проміжних наближень до точок альтернансу.

2. Приклади чебишовського наближення сумою многочлена і функцій з одним нелінійним параметром

Розглянемо приклади чебишовського наближення сумою многочлена і функцій $\varphi(p;x)$ з одним нелінійним параметром, які задовольняють вимогам 1-3.

2.1. Наближення сумою многочлена й експоненти. Експонента $\varphi(p;x)=\exp(px)$ задовольняє вимогам 1-3 як для $p<0$, так і $p>0$. Згідно теореми 2 достатньою умовою [2] існування чебишовського наближення виразом (1) у цьому разі є

$$W^{(n)} \equiv \frac{D_{n+1}(f;z_2,z_3,...,z_{n+4})}{D_{n+1}(f;z_1,z_2,...,z_{n+3})} > 0\ ,\ W^{(n)} \neq W_0^{(n)}, \tag{24}$$

де

$$W_0^{(n)} = \frac{D_{n+1}(S_{n+1};\, z_2, z_3,...,z_{n+4})}{D_{n+1}(S_{n+1};\, z_1, z_2,...,z_{n+3})}, \tag{25}$$

а вирази $D_k(U;\, z_i\,, z_{i+1},...,z_{i+k+1})$ визначаються за формулою (8).

Умові (24) задовольняють, зокрема, функції $f(x)$ $(f(x) \in C^{(n)}[\alpha,\, \beta])$, відмінні від поліному $(n+1)$-го степеня, *n*-на похідна яких строго монотонна на $[\alpha,\, \beta]$.

2.2. Наближення сумою многочлена і степеня. Степенева функція $\varphi(p;\, x) = x^p$ у разі $x \ge 0$ задовольняє умовам теореми 2 для будь-яких значеннях p відмінних від 0, 1, ... *n*. Згідно теореми 2 достатньою умовою існування чебишовського наближення виразом (1) для $\varphi(p;\, x) = x^p$ з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha,\, \beta]$, де $\alpha \ge 0$, є справдження нерівностей

$$W^{(n)} \equiv \frac{D_{n+1}(f;z_2,z_3,...,z_{n+4})}{D_{n+1}(f;z_1,z_2,...,z_{n+3})} > 0, \tag{26}$$

$$W^{(n)} \neq W_r^{(n)}, \qquad r = 0,1,...,n\,, \tag{27}$$

де

$$W_r^{(n)} = \begin{cases} 0, \quad \text{якщо} \quad z_1 = 0; \\ \dfrac{D_{n+1}(L_r;\, z_2, z_3,..., z_{n+4})}{D_{n+1}(L_r;\, z_1, z_2,..., z_{n+3})}, \quad \text{якщо} \quad z_1 > 0; \end{cases} L_r(z) = z^r \ln(z), \tag{28}$$

а вирази $D_k(U;\, z_i\,, z_{i+1},...,z_{i+k+1})$ визначаються формулою (8).

Умовам (26), (27) задовольняють, зокрема, функції $f(x)$ $(f(x) \in C^{(n)}[\alpha,\, \beta])$, відмінні від

$$\sum_{i=0}^{n} b_i x^i + B x^n \ln(x) \tag{29}$$

і *n*-на похідна яких строго монотонна на $[\alpha,\, \beta]$.

2.3. Наближення сумою многочлена і логарифма. Логарифмічна функція $\varphi(p;\, x) = \ln(p+x)$ задовольняє умовам теореми 2, якщо для аргументу x і параметра p справджується співвідношення $p > -\alpha$. Для неперервної функції $f(x)$ $(f(x) \in C[\alpha, \beta])$ достатньою умовою існування [2] її рівномірного наближення виразом (1) при $\varphi(p;x)=\ln(p+x)$ з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha,\beta]$ є

$$0<W^{(n)}<W_2^{(n)}, \tag{30}$$

де

$$W_2^{(n)} \equiv \frac{D_{n+1}(S_{n+1};z_2,\ z_3,\dots,\ z_{n+4})}{D_{n+1}(S_{n+1};z_1,\ z_2,\dots,\ z_{n+3})}, \tag{31}$$

а $W^{(n)}$ та $D_k(U;z_i,z_{i+1},\dots,z_{i+k+1})$ визначаються відповідно формулами (7) та (8).

Умові існування рівномірного наближення (30) задовольняють, зокрема, функції $f(x)$ $\left(f(x)\in C^{(n+1)}[\alpha,\beta]\right)$, *n*-на й $(n+1)$-ша похідні яких строго монотонні. При цьому характер їх монотонності повинен бути протилежним: якщо одна з них зростаюча, то друга має бути спадною, і навпаки.

2.4. Наближення сумою многочлена і функції $x\exp(px)$. Експоненційна функція $\varphi(p;x)=x\exp(px)$ для $x\ge 0$ задовольняє вимогам 1-3, якщо аргумент x і параметр p пов'язані співвідношенням $px+n+1>0$ для $x\in[\alpha,\beta]$ і $p\ne 0$ при $n>0$. У цьому разі [9, 10] достатньою умовою існування рівномірного наближення виразом (1) при $\varphi(p;x)=x\exp(px)$ для неперервної функції $f(x)$ $\left(f(x)\in C[\alpha,\beta]\right)$ з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha,\beta]$ є виконання нерівностей (9)

$$W^{(n)}>0 \ \text{ і } \ W^{(n)}\ne W_0^{(n)}, \tag{32}$$

де $W_0^{(n)}$ і $W^{(n)}$ визначаються відповідно формулами (25) та (7).

Достатній умові існування (32) рівномірного наближення виразом (1) при $\varphi(p;x)=x\exp(px)$ з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha,\beta]$ задовольняють, зокрема, функції $f(x)$ $\left(f(x)\in C^{(n)}[\alpha,\beta]\right)$, *n*-на похідна яких строго монотонна на $[\alpha,\beta]$, за винятком полінома $(n+1)$-го степеня.

2.5. Наближення степенево-показниковими виразами. Степенево-показникова функція $\varphi(p;x)=x^{px}$ задовольняє вимогам 1-3, якщо значення аргументу $x>e^{-1}$ і $p\ne 0$ для $n=1,2$. У цьому разі достатньою умовою існування рівномірного наближення неперервної функції $f(x)$ з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha,\beta]$ сумою константи (лінійного виразу) і степенево-показникової функції $\varphi(p;x)=x^{px}$ є виконання нерівностей [11]

$$W^{(n)}>0, \quad W^{(n)}\ne W_0^{(n)}, \qquad r=0,\,1, \tag{33}$$

де

$$W_0^{(n)} = \frac{D_{n+1}\left(L\ ; z_2, z_3, ..., z_{n+4}\right)}{D_{n+1}\left(L\ ; z_1, z_2, ..., z_{n+3}\right)}, \quad L(z) = z\ln(z),$$

а $W^{(n)}$ і $D_k\left(U; z_i, z_{i+1}, ..., z_{i+k+1}\right)$ визначаються відповідно формулами (7) та (8).

Умові (33) задовольняють, зокрема, функції $f(x)$, n-на похідна яких строго монотонна на $[\alpha, \beta]$, за винятком функцій вигляду (29).

2.6. Наближення виразами з функцією похибки. Функція похибки

$$\varphi(p; x) = \operatorname{erf}(px), \text{ де } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp\left(-t^2\right)dt \tag{34}$$

задовольняє вимогам 1-3 у разі $p > 0$ і $x \geq 0$ для $n = 1, 2$. Згідно теореми 2 для розглядуваного випадку достатньою умовою існування рівномірного наближення неперервної функції $f(x)$ сумою константи (лінійного виразу) і функції похибки $\varphi(p; x) = \operatorname{erf}(px)$ з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ є виконання нерівностей [12]

$$0 < W^{(n)} < W_0^{(n)}, \tag{35}$$

де $W_0^{(n)}$ і $W^{(n)}$ визначаються відповідно формулами (25) та (7).

Умову (35) задовольняють, зокрема, функції $f(x)$, n-на похідна яких монотонно зростаюча на відрізку $[\alpha, \beta]$, а $(n+1)$-ша — спадаюча функція або навпаки.

Вимогам 1-3 задовольняє також ще низка функцій $\varphi(p; x)$, зокрема гіперболічні синус sh(px) і косинус ch(px) за умови, що $p > 0$ і $x \geq 0$, доповнення до функції похибок $\operatorname{erfc}(px)$ $p > 0$ і $x \geq 0$ для $n = 1, 2$, тому що n-ні похідні цих функцій за вказаних обмежень строго монотонні по *x,* а відношення $(n+1)$-их похідних — строго монотонне по p.

3. Визначення параметрів чебишовського наближення сумою многочлена та нелінійної функції

Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(p; x)$ задовольняють умові теореми 2, а z_i $\left(i = \overline{1,\ n+4}\right)$ — точки чебишовського альтернансу, то параметри a_i $\left(i = \overline{0,\ n}\right)$ і A рівномірного наближення функції $f(x)$ виразом (1) з найменшою абсолютною похибкою визначаються формулами:

$$A = D_{n+1}\left(f; z_1,\ z_2, ...,\ z_{n+3}\right) / D_{n+1}\left(\varphi; z_1,\ z_2, ...,\ z_{n+3}\right); \tag{36}$$

$$a_k = \frac{1}{D_k\left(s_k; z_1, z_2, ..., z_{k+2}\right)}\Big[D_k\left(f; z_1, z_2, ..., z_{k+2}\right) -$$

$$- \sum_{i=k+1}^{n} a_i D_k\left(s_i; z_1, z_2, ..., z_{k+2}\right) - A\, D_k\left(\varphi; z_1, z_2, ..., z_{k+2}\right)\Big] \qquad k = \overline{1, n}; \tag{37}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\left[f(z_1) + f(z_2) - \sum_{i=1}^{n} a_i \left(z_1^i + z_2^i\right) - A\left[\varphi(p, z_1) + \varphi(p, z_1)\right]\right]. \tag{38}$$

Значення параметра p визначається як розв'язок рівняння (21). Способи розв'язування цього рівняння залежать від функції $\varphi(p; x)$. Зазначимо, що умови існування рівномірного наближення функції $f(x)$ виразом (1) з найменшою абсолютною похибкою для конкретних $\varphi(p; x)$ і способи обчислення параметра p розглядаються в роботах [2, 9-12].

Висновки. Досліджено властивості чебишовського наближення (1) сумою многочлена і нелінійної функції, що задовольняє вимогам 1-3. Достатньою умовою існування єдиного чебишовського наближення таким виразом з найменшою абсолютною похибкою є справджування нерівностей (6). У разі виконання цих умов параметри чебишовського наближення сумою многочлена і функції з одним нелінійним параметром (1) визначаються формулами (36)-(38). Значення нелінійного параметра знаходиться як розв'язок трансцендентного рівняння (21).

Література

[1] *Бердышев В. И., Петрак Л. В.* Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения. — Екатеринбург: УрО РАН, 1999. — 297 с.

[2] *Попов Б. А., Малачивский П. С.* Наилучшие чебышевские приближения суммой многочлена и нелинейных функций. — Львов, 1984. — 79 с. (Препр. / АН УССР, Физико-мех. ин-т им. В. Г. Карпенко, № 85).

[3] *Попов Б. А., Теслер Г. С.* Приближение функций для технических приложений. — К.: Наук. думка, 1980. — 352 с.

[4] *Dunham C. B.* A Fortran program for discrete nonlinear Chebyshev approximation // J. Comp. Appl. Math. — 1980. — Vol. 6, № 3. — P. 241-245.

[5] *Dunham C. B* . Chebyshev approximation by expontinential-polynomial sums // J. Comp. Appl. Math. — 1979. — Vol. 5, № 1. — P. 53-57.

[6] *Rice J. R.* Approximation formulas for physical data // Pyrodunamics. — 1969. — Vol. 6, № 3/4. — P. 231-256.

[7] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников. — М.: Мир, 1977. — 831 с.

[8] *Попов Б. А.* Равномерное приближение сплайнами. — К.: Наук.думка, 1989. — 272 с.

[9] *Малачівський П. С., Пізюр Я. В.* Найкраще рівномірне наближення експоненційним виразом // Вісник ДУ "Львівська політехніка". — Серія "Прикладна математика". — 1999. — № 364. — С. 97-100.

[10] *Малачівський П.* Рівномірне наближення сумою многочлена й експоненційної функції // У зб.: Моделювання та інформаційні технології. — 2002. — Вип. 15. — С. 95-103.
[11] *Малачівський П. С., Яремчик С. Б.* Рівномірне наближення степенево-показниковим виразом // Вісник ДУ “Львівська політехніка”. — Серія “Прикладна математика”. — 1998. — № 337. — С. 353-356.
[12] *Малачівський П.* Рівномірна апроксимація сумою лінійного виразу й функції похибок // У зб.: “Комп’ютерні технології друкарства”. — 2003. — № 10. — С. 83-88.

Chebyshev Approximation by Sum of the Polynomial and the Function with one Nonlinear Parameter

Petro Malachivskyj

Chebyshev approximation by sum of the polynomial and the function with one nonlinear parameter is considered. The necessary condition for existence and uniqueness of such approximation is established. Examples of such expressions and classes of functions, for which Chebyshev approximation exists, are given.

Чебышевское приближение суммой многочлена и функции с одним нелинейным параметром

Петро Малачивский

Рассматривается чебышевское приближение суммой многочлена и функции с одним нелинейным параметром. Установлены условия, при которых существует и единственное чебышевское приближение с наименьшей абсолютной погрешностью. Приведены примеры таких выражений и классов функций, для которых чебышевское приближение существует.

Отримано 25.09.04