

Використання взаємозв'язку тепло- і вологопровідності для відтворення початкового розподілу вологості тіла за його температурними даними

Богдан Ґера

д. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. І. Блажкевич, 12 а, Львів, e-mail: gera@cmm.lviv.ua

Отримано розв'язок оберненої задачі відтворення функції початкового розподілу вологості для тепловологопровідного шару однорідної структури на основі моделі, що враховує взаємозалежність температурного поля та вологості тіла. Замість відсутніх початкових умов для вологості задані додаткові умови на температуру, які мають дискретний характер і є неповними. Умова мінімуму функціонала виробництва ентропії для термодинамічної системи з такими термодинамічними параметрами як температура та концентрація вологи, використана для отримання єдиного розв'язку задачі за неповних даних. Проведено аналіз числових розрахунків.

Ключові слова: обернена задача, неповнота даних, відтворення стану системи, взаємозалежність температури та вологості.

Вступ. Зміни температури у зволжених пористих тілах, навіть при невеликій кількості вологи в них, залежать не лише від процесу теплопровідності, а й від дифузії та стану вологи. На концентрацію вологи в тілі, у свою чергу, впливають величина та градієнт температури. Тому при визначенні температурного поля та розподілу вологості в тілах використовуються моделі, які враховують їх взаємозалежність та взаємозв'язок у вигляді рівнянь у частинних похідних [1-4]. Для числового аналізу параметрів стану у задачах тепловологопровідності та переносу на основі таких моделей потрібно підготувати значну кількість даних. Сюди належать не лише значення коефіцієнтів, які пов'язують між собою складові теплопровідності та вологопровідності, а й дані вимірювань на поверхні (граничні умови) та в області тіла у деякий момент часу (початкові умови) як для температури, так і для вологості.

Забезпечення моделі даними потрібної точності залишається актуальною задачею, особливо, коли потрібно задавати початковий стан системи. При цьому вимірювання деяких параметрів стану системи можна проводити оперативно і з меншими затратами, ніж інших. Це стосується, зокрема, більш простого отримання даних про температуру, ніж про вологість у твердих тілах. Проте, взаємозв'язаність полів дає можливість при постановці задачі замість частини умов для вологості задавати надлишкові умови для температури. Задачі з такими умовами,

як і задачі з оберненим часом, за відсутності початкових умов, можуть виявитися некоректними і вимагати застосування регуляризації.

Ще проблемнішим є отримання оцінок для шуканих функцій стану системи, якщо не вдалося підготувати усі необхідні дані для розв'язування початково-крайової задачі тепловологопровідності, тобто, у задачах із неповними даними. У цьому випадку потрібно вказати критерій вибору з множини допустимих функцій таких, що найбільш прийнятні з фізичних міркувань і задовольняють усі рівняння моделі та ту частину умов, які відомі. У роботах [5-7] для відтворення початкових умов у задачі тепловологопровідності запропоновано використовувати умову мінімуму функціонала джерела ентропії в термодинамічній системі, термодинамічними параметрами якої є температура та концентрація вологи. Методика розв'язування оберненої задачі з використанням мінімізації функціонала джерела ентропії викладена у роботі [6], де також отримано розрахункові формули початкового розподілу вологості при заданих інтегральних характеристиках температури і вологості тіла у наступні моменти часу.

У даній роботі проведено розрахунки та дослідження початкового стану вологості, якщо відомий початковий розподіл температури, а також значення температури в окремих точках всередині тіла у задані моменти часу.

1. Постановка задачі

Температурне поле і розподіл вологості у пористих зволжених тілах пов'язані між собою. Математичну модель тепловологопровідності для однорідного слабонасиченого вологою шару запишемо у вигляді [4, 6]

$$\begin{aligned} C_q \frac{\partial T}{\partial t} &= K_q \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + K_\varepsilon \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \\ C_m \frac{\partial W}{\partial t} &= K_\delta \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + K_m \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x \in (0, h), \quad t > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут $T(x, t)$ — температура, $W(x, t)$ — об'ємна вологість, x — координата по товщині шару, h — товщина шару, t — час, $C_q = cD_T$, $C_m = L\varepsilon\rho D_m$, $K_q = (\lambda + L\varepsilon\rho D_T)D_T$, $K_\delta = K_\varepsilon = L\varepsilon\rho D_m D_T$, $K_m = L\varepsilon\rho D_m^2$, λ, c — узагальнені коефіцієнти теплопровідності і теплоємності, D_m, D_T — коефіцієнти дифузії, спричиненої градієнтністю розподілу вологи і температури відповідно, L — скрита теплота пароутворення, ρ — густина води, ε — коефіцієнт фазового перетворення рідини в пару.

Щоб відокремити залежність функцій $T(x, t)$ та $W(x, t)$ від початкових умов і не враховувати їх залежність від граничних, на границях шару задаємо однорідні умови першого роду

$$T(0, t) = 0, \quad T(h, t) = 0,$$

$$W(0, t) = 0, \quad W(h, t) = 0. \quad (2)$$

Початкові умови для функцій $T(x, t)$ та $W(x, t)$, які необхідні для коректної постановки задачі тепловологопровідності, задані лише для температури

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad (3)$$

а для вологості — невідомі. Проте додатково відомі значення температури Ξ_j у певні моменти часу в заданих точках усередині шару

$$T(x_j, t_j) = \Xi_j, \quad x_j \in (0, h), \quad t_j \in (0, t_*], \quad (j = \overline{1, J}), \quad (4)$$

де t_* — час спостережень процесу.

Потрібно знайти функції $T(x, t)$ та $W(x, t)$, які задовольняють записані рівняння (1), умови (2)-(4) і є найприйнятнішими для температури та вологості з фізичних міркувань.

2. Розв'язок задачі вибору функцій

Часові умови (3)-(4) є неповними для системи рівнянь (1). Тому існує нескінченна множина функцій початкового розподілу вологості $W_0(x)$, при яких $T(x, t)$ та $W(x, t)$ задовольняють умови (1)-(4). Виходячи з таких неповних даних для відтворення функцій $T(x, t)$ та $W(x, t)$ і визначення з множини допустимих єдиної функції $W_0(x)$, будемо використовувати умови мінімуму функціонала джерела ентропії, який у даному випадку набуває вигляду

$$P = \int_0^{t_*} \int_0^h \left[K_q \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + 2K \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} + K_m \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] dx dt, \quad (5)$$

де $K = K_\epsilon = K_\delta$.

Із застосуванням варіаційного підходу [6] знаходимо розв'язок задачі умовної мінімізації функціонала (5) за обмежень (1)-(4). У результаті отримаємо систему допоміжних рівнянь та умов, які замикають задачу тепловологопровідності з неповними даними. Ці рівняння будуть такими

$$\begin{aligned} C_q \frac{\partial \Phi}{\partial t} + K_q \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + K \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - K_q \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - K \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \sum_{j=1}^J \upsilon_j \delta(x - x_j) &= 0, \\ C_m \frac{\partial \Psi}{\partial t} + K \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + K_m \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - K_m \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= 0, \quad x \in (0, h), \quad t > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Граничні умови для допоміжних функцій $\Phi(x, t)$ та $\Psi(x, t)$ — однорідні

$$\Phi(0, t) = 0, \quad \Phi(h, t) = 0,$$

$$\Psi(0, t) = 0, \quad \Psi(h, t) = 0. \quad (7)$$

Задаються часові умови при $t = t_*$

$$\Phi(x, t_*) = 0, \quad \Psi(x, t_*) = 0 \quad (8)$$

та умова при $t = 0$

$$\Psi(x, 0) = 0, \quad (9)$$

яка виникає внаслідок відсутності початкової умови для функції $W(x, t)$.

3. Повна система рівнянь та умов оберненої задачі

Отримано замкнуту систему рівнянь та умов (1)-(4), (6)-(9), з розв'язку якої, зокрема, можна визначити функції, які наближають температурне поле та розподіл вологи.

Перейдемо до безрозмірних величин

$$\begin{aligned} \tau = \frac{t}{t_*}, \quad \gamma = \frac{x}{h}, \quad T' = \frac{T}{\bar{T}}, \quad W' = \frac{W}{\bar{W}}, \quad \Phi' = \frac{\Phi}{\bar{T}}, \quad \Psi' = \frac{\Psi}{\bar{W}}, \quad \Xi'_j = \frac{\Xi_j}{\bar{T}} \\ a_q = \frac{K_q t_*}{C_q h^2}, \quad a_w = \frac{K_m t_*}{C_m h^2}, \quad a_k = \frac{K t_* \bar{W}}{C_q h^2 \bar{T}} = \frac{K t_* \bar{T}}{C_m h^2 \bar{W}}, \quad \sigma_j = \frac{\nu_j h t_*}{C_q}, \end{aligned} \quad (10)$$

де \bar{T} , \bar{W} — характерні значення температури і вологості ($C_q \bar{T}^2 = C_m \bar{W}^2$). Тоді у безрозмірній формі отримаємо таку систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial T'}{\partial \tau} &= a_T \frac{\partial^2 T'}{\partial \gamma^2} + a_K \frac{\partial^2 W'}{\partial \gamma^2}, \\ \frac{\partial W'}{\partial \tau} &= a_K \frac{\partial^2 T'}{\partial \gamma^2} + a_W \frac{\partial^2 W'}{\partial \gamma^2}, \\ \frac{\partial \Phi'}{\partial \tau} + a_T \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial \gamma^2} + a_K \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial \gamma^2} - a_T \frac{\partial^2 T'}{\partial \gamma^2} - a_K \frac{\partial^2 W'}{\partial \gamma^2} - \sum_{j=1}^J \sigma_j \delta(\gamma - \gamma_j) &= 0, \\ \frac{\partial \Psi'}{\partial \tau} + a_K \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial \gamma^2} + a_W \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial \gamma^2} - a_K \frac{\partial^2 T'}{\partial \gamma^2} - a_W \frac{\partial^2 W'}{\partial \gamma^2} &= 0; \end{aligned} \quad (11)$$

граничні умови

$$\begin{aligned} T'(0, \tau) = 0, \quad T'(1, \tau) = 0, \quad W'(0, \tau) = 0, \quad W'(1, \tau) = 0, \\ \Phi'(0, \tau) = 0, \quad \Phi'(1, \tau) = 0, \quad \Psi'(0, \tau) = 0, \quad \Psi'(1, \tau) = 0; \end{aligned} \quad (12)$$

часові умови

$$\begin{aligned} T'(\gamma, 0) &= T'_0(\gamma), \quad \Psi'(\gamma, 0) = 0, \\ \Phi'(\gamma, 1) &= 0, \quad \Psi'(\gamma, 1) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

а також умови для визначення параметрів σ_j

$$T'(\gamma_j, \tau_j) = \Xi'_j, \quad (j = \overline{1, J}). \quad (14)$$

Функції $\Phi'(\gamma, \tau)$, $\Psi'(\gamma, \tau)$ використовуються лише як допоміжні і тому надалі виключатимемо їх з рівнянь та умов для визначення функцій T' та W' .

4. Розрахункові формули

Для обчислення $T'(\gamma, \tau)$ та $W'(\gamma, \tau)$ застосуємо до шуканих функцій розвинення в ряд по $\sin(n\pi\gamma)$. Зокрема, функції $T'(\gamma, \tau)$, $W'(\gamma, \tau)$ запишемо у вигляді

$$T'(\gamma, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\tau) \sin \omega_n \gamma, \quad W'(\gamma, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(\tau) \sin \omega_n \gamma, \quad (15)$$

де $\omega_n = n\pi$, $\gamma \in (0, 1)$. При цьому на границях задовольняються умови (12), а для визначення $T_n(\tau)$, $W_n(\tau)$, які забезпечують часові та інші умови, отримаємо розрахункові формули

$$\begin{aligned} T_n(\tau) &= \frac{1}{v_{2n} - v_{1n}} \left[T_{0n} (v_{2n} e^{-\mu_{1n}\tau} - v_{1n} e^{-\mu_{2n}\tau}) + \sum_{j=1}^J \sigma_j b_n(\gamma_j, \tau_j) a_K \omega_n^2 (e^{-\mu_{1n}\tau} - e^{-\mu_{2n}\tau}) \right], \\ W_n(\tau) &= \frac{1}{v_{2n} - v_{1n}} \left[\left(\frac{T_{0n} v_{2n}}{\omega_n^2 a_K} + \sum_{j=1}^J \sigma_j b_n(\gamma_j, \tau_j) \right) (\mu_{1n} - a_T \omega_n^2) e^{-\mu_{1n}\tau} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{T_{0n} v_{1n}}{\omega_n^2 a_K} + \sum_{j=1}^J \sigma_j b_n(\gamma_j, \tau_j) \right) (\mu_{2n} - a_T \omega_n^2) e^{-\mu_{2n}\tau} \right], \quad 0 < \tau < 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Тут T_{0n} — коефіцієнти розвинення функції $T'_0(\gamma)$ у ряд

$$b_n(\gamma_j, \tau_j) = -\frac{2\omega_n^2 a_K}{(\mu_{1n} - \mu_{2n})} (e^{-\mu_{1n}\tau_j} - e^{-\mu_{2n}\tau_j}) \sin(n\gamma_j), \quad (17)$$

$$\mu_{1n, 2n} = \frac{\omega_n^2}{2} \{ a_W + a_T \pm [(a_W - a_T)^2 + 4a_K^2]^{1/2} \}, \quad \mu_{1n}, \mu_{2n} > 0,$$

$$v_{in} = (\mu_{in} - a_T \omega_n^2) e^{-\mu_{in}} \operatorname{sh} \mu_{in}, \quad i = 1, 2; \quad j = \overline{1, J}; \quad n = 1, 2, \dots$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення σ_j

$$\sum_{j=1}^J c_{ij} \sigma_j = U_i, \quad i = \overline{1, J} \quad (18)$$

має такі коефіцієнти

$$c_{ij} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(\gamma_j, \tau_j)}{v_{2n} - v_{1n}} a_K \omega_n^2 (e^{-\mu_{1n} \tau_i} - e^{-\mu_{2n} \tau_i}) \sin \omega_n \gamma_i$$

$$U_i = \Xi'_i - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{0n}}{v_{2n} - v_{1n}} (v_{2n} e^{-\mu_{1n} \tau_i} - v_{1n} e^{-\mu_{2n} \tau_i}) \sin \omega_n \gamma_i.$$

Невідомий початковий розподіл $W'_0(\gamma)$ визначаємо як $W'_0(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(0) \sin \omega_n \gamma$.

5. Числові дослідження

Вхідні дані для оберненої задачі, а саме значення Ξ_j , (Ξ'_j) , які відповідають замірам температури в окремих точках $0 < x_j < h$ ($0 < \gamma_j < 1$) всередині шару товщини h у задані моменти часу $t = t_j$ ($\tau = \tau_j$, $j = \overline{1, J}$), отримані для відомого початкового стану системи, тобто для відомої функції $T'_0(\gamma)$ (див. рис. 1) та заданої тестової функції $W'_0(\gamma)$, наближення якої отримуємо як розв'язок оберненої задачі. Одна з таких функцій $W'_0(\gamma)$ показана на рис. 2. Коефіцієнти T_{0n} та W_{0n} розвинення в ряди по $\sin(n\pi\gamma)$ функцій, зображених на рис. 1, 2, мають вигляд

$$T_{0n} = \frac{3,016}{(2n+1)(2n-1)}, \quad W_{0n} = -\frac{2 \cdot (-1)^n}{n^2(n+1)}.$$

При обчисленнях значення безрозмірних коефіцієнтів у рівняннях (11) та розрахункових формулах (16)-(17) приймалися наступними: $a_T = 0,24$, $a_W = 0,25$, $a_K = 0,002$.

На рис. 3 показані функції початкового розподілу вологості, отримані у разі задання різної кількості J додаткових значень температури Ξ_j при $t_j = t_*$ ($\tau_j = 1$) у точках $0 < x_j < h$ ($0 < \gamma_j < 1$), які ділять інтервал на однакові частини.

Бачимо, що зі збільшенням кількості точок заданих значень Ξ_j вдається краще наблизити розрахункові функції до тестової, з якої отримувались дані для оберненої задачі. У розглянутому випадку при $J = 3$ отримуємо функцію,

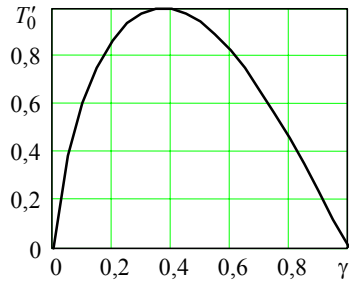


Рис. 1. Задана функція $T'_0(\gamma)$

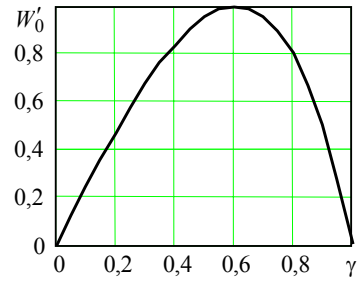


Рис. 2. Відтворювана функція $W'_0(\gamma)$

достатньо близьку до шуканої, а тому збільшувати кількість додаткових даних для суттєвого поліпшення результату недоцільно.

Криві на рис. 4 ілюструють залежність результату від вибору моментів часу, в які додатково задаються значення температури. При цьому приймається $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$, $\gamma_1 = 0,25$, $\gamma_2 = 0,5$, $\gamma_3 = 0,75$. При наближенні τ_j до нуля задача розв'язку не матиме, оскільки початкові умови для температури задані і додаткові умови при цьому не дають нової інформації. Задача при малих значеннях τ_j стає некоректною. Свідченням цього є крива 4 на рис. 4, яка відповідає значенню $\tau_j = 0,01$. Проте, для $\tau_j = 0,05$ спостерігаємо певне наближення отримуваної функції (крива 3) до тестової, а при $\tau_j = 0,1$ (крива 2) W'_0 вже достатньо близька до тестової, що справджується також при збільшенні τ_j до 1 (див. рис. 3).

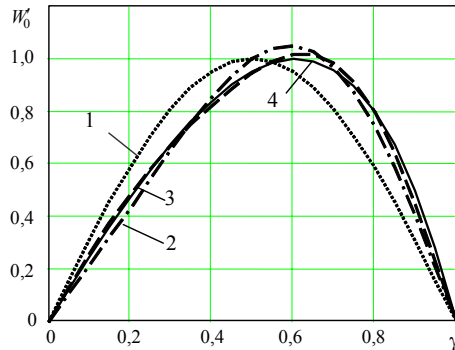


Рис. 3. Зміна відтвореного початкового розподілу $W'_0(\gamma)$ залежно від кількості J додаткових даних про температуру (криві 1, 2 та 3 побудовані для $J = 1, 2$ та 3 відповідно; 4 — тестова функція)

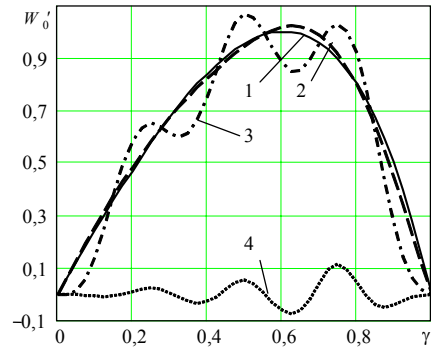


Рис. 4. Зміна відтвореного початкового розподілу $W'_0(\gamma)$ залежно від часу задання температури (1 — тестова функція; криві 2, 3 та 4 відповідають $\tau_j = 0,1$, $\tau_j = 0,05$ та $\tau_j = 0,01$)

Тестова функція $W'_0(\gamma)$, яка використовувалася для розв'язування оберненої задачі (див. рис. 2), є повільно змінною, що дозволило отримати непогане її наближення за критерієм мінімуму функціонала (5), який забезпечує вибір з множини допустимих саме тих функцій, які характеризуються найменшою градієнтністю температурного поля і розподілу вологості. Це цілком задовільна вимога для полів дифузійної природи в однорідних тілах.

Пересвідчимося в ефективності запропонованої методики для знаходження розв'язку задачі про відтворення значень початкової функції стану у разі використання даних, що відповідають тестовій функції з більш градієнтними ділянками. На рис. 5 а, б показані наближення функцій $W_0(\gamma)$, отримані при розв'язуванні оберненої задачі з чотирма додатковими умовами (14). Значення Ξ'_j задаються при $\tau_j = 0,5$ біля границь шару, тобто при $\gamma_1 = 0,05$, $\gamma_2 = 0,1$, $\gamma_3 = 0,9$, $\gamma_4 = 0,95$. Зазначимо, що зміщення точок задання значень Ξ'_j усередину шару приводило до настільки незначних змін, що графіки отриманих функцій практично співпадали з кривими, приведеними на рис. 5 а, б.

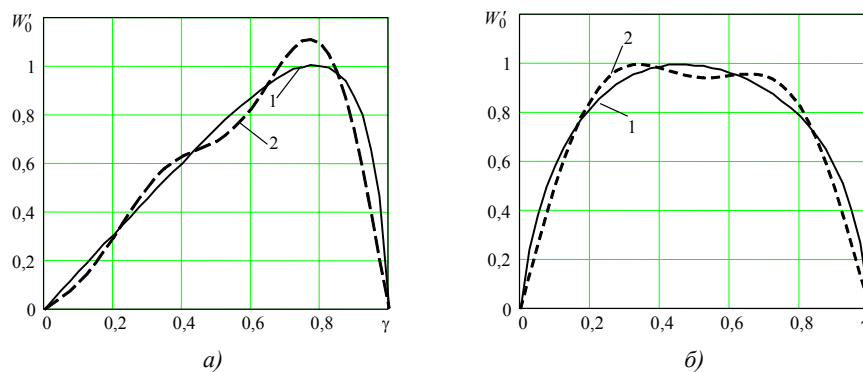


Рис. 5. Порівняння відтворених початкових розподілів для двох прикладів тестових функцій (1 — тестова функція $W'_0(\gamma)$; 2 — отримана функція)

Висновки. З використанням моделі тепловологопровідності показано принципову можливість використання ефекту взаємозв'язаності полів різної фізичної природи (температура, розподіл вологості) для відтворення початкового стану системи в цілому в обернених задачах із неповними початковими даними. На прикладі однорідного тепловологопровідного шару проілюстровано, що при наближеному відтворенні невідомих початкових умов для розподілу вологості можна скористатися додатковими співвідношеннями, записаними лише для функції температури. При цьому підтверджується ефективність застосування умови мінімуму функціонала джерела ентропії для відтворення початкового розподілу вологості тіла за неповних даних.

Література

- [1] Подстригач Я. С., Жук П. А., Чапля Е. Я. Исходные уравнения математической модели тепловлагопереноса с испарением для аэрируемых слоев почвы // Космическая наука и техника. — 1990. — Вып. 5. — С. 3-9.
- [2] Підстригач Я. С., Гера Б. В., Чапля С. Я. та ін. Математичне моделювання тепловологопереносу в ґрунті та задачі інтерпретації даних дистанційного зондування земної поверхні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1992. — Вип. 35. — С. 8-20.
- [3] Гера Б. В., Чапля С. Я. Моделювання нерівноважних процесів в об'єктах природних систем // Інформаційні технології і системи. — 2003. — Т. 6, № 1-2. — С. 134-139.
- [4] Thomas H. R. Modelling two-dimensional heat and moisture transfer in unsaturated soils including gravity effects // Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. — 1985. — Vol. 9, № 6. — P. 573-588.
- [5] Гера Б. В. Математичне моделювання в задачі визначення температурного поля і розподілу вологості в тілі за неповними даними // Обробка сигналів і зображень та розпізнавання образів: Праці I Всеукр. конф. — К., 1992. — С. 172-174.
- [6] Гера Б. В. Задача відновлення полів температури та вологості в пористому тілі при неповних даних // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1996. — Вип. 39, № 1. — С. 66-73.
- [7] Бурак Я., Гера Б., Чапля С. Про один підхід оптимізаційного відтворення фізичних полів дифузійного типу // Інформаційно-математичне моделювання складних систем — МІМУЗ'2002. — Львів: «Ахіл», 2002. — С. 93-104.

Restoration of Initial Moisture Content Distribution on Temperature Data Applying Thermal and Moisture Conductivities Dependence

Bogdan Gera

The inverse problem of restoration the initial moisture content in regular structure layer based on the model of mutually dependent of body temperature field and moisture content is obtained. Discrete characteristic temperature values data are used to formulate additional condition for temperature instead of unknown initial condition for moisture content. The minimum of the source of entropy expression of thermodynamic system with temperature and moisture concentration thermodynamic parameters is used for obtaining unique solution of inverse problem under incomplete data. The results of calculations are investigated.

Использование взаимосвязи тепло- и влагопроводности для восстановления начального распределения влажности тела по его температурным данным

Богдан Гера

Получено решение обратной задачи восстановления функции начального распределения влажности для тепловлагопроводящего слоя однородной структуры исходя из модели взаимозависимости температурного поля и влажности тела. Вместо отсутствующих начальных условий для влажности заданы дополнительные условия на температуру, имеющие дискретный характер и являющиеся неполными. Условие минимума функционала источника энтропии для термодинамической системы с такими термодинамическими параметрами как температура и концентрация влажности используется для получения единственного решения задачи при неполных данных. Исследованы результаты численных расчетов.

Отримано 28.11.05