

Адаптивна схема методу скінченних елементів для сингулярно збурених задач конвекції-дифузії

Юрій Сінчук

Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000,
email: yurascpp@rambler.ru

Для двовимірних задач конвекції-дифузії побудовано локальний апостеріорний оцінювач похибки (АОП) апроксимації методу скінченних елементів (МСЕ). Запропоновано h -адаптивну схему МСЕ з використанням побудованого оцінювача та стабілізуючого методу Петрова-Гальоркіна з експоненціальними вагами. Числові результати h -адаптування свідчать про високу якість оцінювача та надійність запропонованої адаптивної схеми МСЕ.

Ключові слова: задача конвекції-дифузії, сингулярна збуреність, апостеріорний оцінювач похибки, h -адаптивність, метод Петрова-Гальоркіна.

Вступ. У багатьох математичних моделях дифузійно-конвективних процесів [1-6] коефіцієнти біля старших похідних є малі порівняно з коефіцієнтами біля похідних нижчих порядків. Прикладами можуть бути задачі тепломасоперенесення з великими числами Пекле, потоки Нав'є-Стокса з великими числами Рейнольдса та задачі магнітної гідродинаміки з великими числами Хартмана [7, 8]. Такі задачі називають сингулярно збуреними, оскільки в граничному випадку при нульовому коефіцієнті дифузії диференціальні рівняння понижують порядок і деякі крайові умови стають надлишковими. Розв'язки таких задач у той чи інший спосіб можуть різко змінювати свою локальну структуру, наприклад, породжуючи так звані примежові шари [8-10]. Наявність цих і подібних особливостей ускладнює розв'язування сингулярно збурених задач, як аналітичними, так і числовими методами. Зокрема, в різноманітних застосуваннях стають актуальними питання оцінки якості знайдених розв'язків чи/або їхньої похибки. Тому побудова й аналіз надійних числових схем для сингулярно збурених задач є однією із фундаментальних проблем комп'ютерного моделювання, див., наприклад, оглядові праці [8, 10-12].

На даний час розроблено низку схем методу скінченних елементів, адаптованих до сингулярно збурених задач конвекції-дифузії. Серед них можна виділити h -адаптивні схеми МСЕ [13-15], стабілізовані схеми [12] і методи експоненціальної підгонки [16-20].

Дана робота присвячена побудові h -адаптивної схеми МСЕ для сингулярно збурених крайових задач конвекції-дифузії, особливості якої полягають у використанні стабілізуючого методу Петрова-Гальоркіна з експоненціальними тестовими функціями [19] і побудованого тут апостеріорного оцінювача похибки

у вигляді лінійної комбінації елементів нуль-простору оператора задачі. Зауважимо також, що застосування методу Петрова-Гальоркіна [19] дозволяє обчислювати апроксимації МСЕ у певному сенсі як найкращі наближення шуканого розв'язку у кожному з допустимих просторів апроксимацій.

За допущення, що апроксимація МСЕ відтворює точні значення розв'язку у вузлах сітки, побудований АОП характеризує відхилення цієї апроксимації від функції, яка є точний розв'язок однорідного диференціального рівняння на кожному скінченному елементі триангуляції. З огляду на переваги використання неструктурованих сіток запропонована h -адаптивна схема вживає трикутні скінченні елементи з лінійними апроксимаціями.

Наведено результати числових експериментів для модельної задачі конвекції-дифузії, які підтверджують надійність запропонованої схеми та якість оцінювача похибок.

1. Модельна задача

Розглянемо задачу для рівняння конвекції-дифузії: знайти функцію $u = u(\mathbf{x})$ таку, що

$$Lu := -\mu \Delta u + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u = f \quad \text{в } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на } \Gamma := \partial\Omega, \quad (1)$$

де $\Omega \subset R^2$ — обмежена зв'язна область з неперервною за Ліпшицем межею.

Приймаємо, що коефіцієнт дифузії $\mu = \text{const} > 0$, окрім цього вектор $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ такий, що $\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} \gg \mu$. Сформульована задача є сингулярно збурена через велику різницю швидкостей дифузії та конвективного перенесення.

Модельна задача (1) може описувати, наприклад, процес міграції домішок у рухомому середовищі. Тоді $\boldsymbol{\beta}$ — швидкість руху середовища, μ — швидкість дифузії, f — інтенсивність джерел, u — шукана функція розподілу концентрації домішки.

Відомо, що для великих чисел Пекле значення концентрації може різко змінюється в околі межі області Γ , що призводить до виникнення примежових шарів і втрати точності класичних методів апроксимацій даної задачі [7].

Найраціональнішим способом відшукування числового наближення такого типу задач є використання експоненціальних схем [7, 16], які є рівномірно збіжні та здатні відтворювати точні значення розв'язку в вузлах дискретизації для одновимірних задач із постійними коефіцієнтами. Однак, не дивлячись на переваги, такі схеми нечасто використовують в обчислювальній практиці. Це пов'язано зі складністю обчислення експоненціальних функцій та узагальненням таких схем на двовимірні задачі з непрямокутними областями. Деякі шляхи вирішення цих проблем описані в працях [18, 20]. Тут лише коротко опишемо побудову експоненціальної схеми (позбавленої згаданих вище недоліків) для апроксимації задачі (1).

2. Експоненціальна схема МСЕ

Поділимо область Ω на скінченні елементи K . Одержану триангуляцію позначимо $T_h = \{K\}$, а її внутрішні вузли — $\{\mathbf{x}^m\}_{m=1}^N$.

Як альтернативу класичному методу Гальоркіна продемонструємо можливість методу Петрова-Гальоркіна, який у загальному випадку приводить до такої задачі: задано простір апроксимацій $V_h \subset V := \{v \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ на } \Gamma\}$ і тестових функцій $Y_h \subset V$, $\dim V_h = \dim Y_h = N < +\infty$. Знайти $u_h \in V_h$ такий, що

$$\int_{\Omega} [\mu \nabla w \cdot \nabla u_h + w \beta \cdot \nabla u_h] dx = \int_{\Omega} f w dx \quad \forall w \in Y_h. \quad (2)$$

Апроксимацію розв'язку будемо шукати у вигляді $u_h := \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j$, де $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ — базис простору V_h . Функція φ_m має своїм носієм область

$$\text{supp } \varphi_m \equiv \Omega_m := \{K \in \mathcal{T}_h : \mathbf{x}^m \in \bar{K}\}, \quad \varphi_m(\mathbf{x}^m) \equiv 1, \quad m = \overline{1, N}.$$

За базис простору тестових функцій Y_h вибрано таку систему кусково-неперервних функцій $\{w_m\}_{m=1}^N$

$$w_m(\mathbf{x}) := \varphi_m(\mathbf{x}) \exp[(\mu^{-1} \beta) \cdot (\mathbf{a}^m - \mathbf{x})], \quad m = \overline{1, N}. \quad (3)$$

Точка \mathbf{a}^m — одна з вершин полігона Ω_m . Для неї виконується умова

$$(\mu^{-1} \beta) \cdot (\mathbf{a}^m - \mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_m.$$

Тоді коефіцієнти системи лінійних алгебричних рівнянь схеми Петрова-Гальоркіна обчислюють згідно правил [19]

$$c_{mj} = \sum_{K \in \Omega_{mj}} \int_K [\mu \nabla \varphi_m \cdot \nabla \varphi_j] \exp z_m dx, \quad \Omega_{mj} := \Omega_m \cap \Omega_j, \\ l_m = \sum_{K \in \Omega_m} \int_K f \varphi_m \exp z_m dx, \quad m, j = \overline{1, N}, \quad (4)$$

де $z_m(\mathbf{x}) := (\mu^{-1} \beta) \cdot (\mathbf{a}^m - \mathbf{x})$, $m = \overline{1, N}$.

3. Побудова апостеріорного оцінювача та h -адаптивність

Покладемо $f \equiv 0$ (це можна досягнути зведенням рівняння задачі (1) до однорідного). Контроль точності в процесі h -адаптування вимагає надійного апостеріорного оцінювача похибки. Для задачі (1) апостеріорний оцінювач похибки на трикутнику K будемо так

$$\varepsilon_K(\mathbf{x}) = \sqrt{|K|} |u_h(\mathbf{x}) - v_h(\mathbf{x})| \quad \forall \mathbf{x} \in K,$$

де u_h відома на даному кроці адаптування апроксимація розв'язку та v_h — лінійна комбінація елементів нуль-простору оператора задачі L

$$v_h(\mathbf{x}) = C_1 + C_2 \exp[\mu^{-1} \beta_1 x_1] + C_3 \exp[\mu^{-1} \beta_2 x_2].$$

Коефіцієнти C_i шукаємо з розв'язку системи лінійних рівнянь

$$v_h(\mathbf{x}^i) = u_h(\mathbf{x}^i), \quad i = 1, 2, 3, \quad (5)$$

де \mathbf{x}^i — вершини трикутника K .

Глобальну оцінку похибки будемо обчислювати з використанням формули $\varepsilon_\Omega = \sqrt{\sum_K \varepsilon_K^2(\mathbf{x}^K)}$, де \mathbf{x}^K — центр ваги трикутника K . Відповідно обчислимо локальну та глобальну точні похибки

$$E_K(\mathbf{x}) = \sqrt{|K|} |u_h(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})|, \quad E_\Omega = \sqrt{\sum_K E_K^2(\mathbf{x}^K)}.$$

На кожній ітерації h -адаптивного процесу слід перебудувувати триангуляцію та розв'язувати задачу (2) методом Петрова-Гальоркіна з експоненціальними тестовими функціями (3). Покращення триангуляції проводиться шляхом додавання нових вузлів у центри кіл, описаних навколо трикутників, для яких виконується умова $\varepsilon_K \geq \alpha \varepsilon_{max}$, $\alpha \in (0, 1)$, де $\varepsilon_{max} = \max_K \varepsilon_K$. Критерієм зупинки процесу покрокового адаптування є обмеження

$$\frac{\varepsilon_\Omega 100\%}{\sqrt{\sum_K |K| |u_h(\mathbf{x}^K)|^2 + \varepsilon_\Omega^2}} \leq e_{tol}.$$

4. Числові експерименти

Приведемо деякі результати числового аналізу задачі (1) із використанням описаної вище процедури побудови апостеріорного оцінювача похибки. Розглянемо задачу (1) для області $\Omega = \{(0, 1) \times (0, 1)\}$ із такими даними

$$\begin{aligned} \mu &= 0,001, \quad \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ f(\mathbf{x}) &= \exp\left[\frac{2(x_1 - 1) + 3(x_2 - 1)}{\mu}\right] - (2 + x_1) \exp\left[\frac{3(x_2 - 1)}{\mu}\right] x_1 x_2^2 - \\ &- (x_2^2 + 6x_2 - 2\mu) \exp\left[\frac{2(x_1 - 1)}{\mu}\right] - 2\mu x_1 + x_1 x_2^2 + 2x_2^2 + 6x_1 x_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Точний розв'язок цієї задачі

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= x_1 x_2^2 - x_2^2 \exp\left[\frac{2(x_1 - 1)}{\mu}\right] - x_1 \exp\left[\frac{3(x_2 - 1)}{\mu}\right] + \\ &+ \exp\left[\frac{2(x_1 - 1) + 3(x_2 - 1)}{\mu}\right] \end{aligned} \quad (7)$$

має чітко виражений примежовий шар уздовж границь $x_1 = 1$ та $x_2 = 1$.

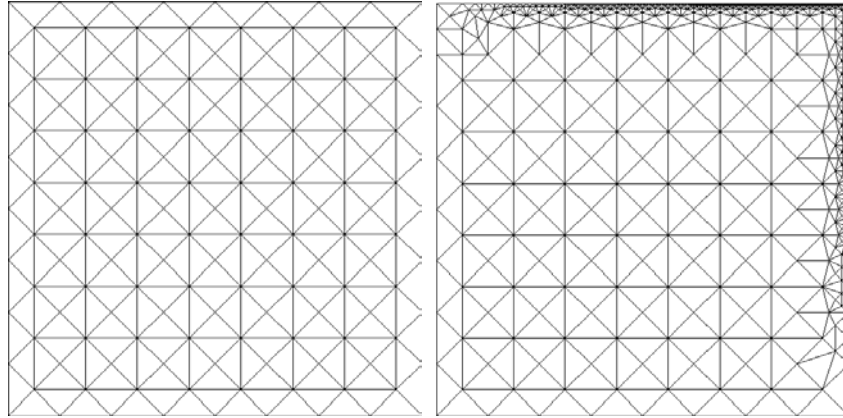


Рис. 1. Початкова (зліва) та результуюча (справа) триангуляції

Ітераційну процедуру адаптування розпочинали з триангуляції, зображеної на рис. 2 (зліва). За параметри адаптування взято $\alpha = 0,75$ та $e_{tol} = 8\%$. На кожній ітерації розв'язуємо варіаційну задачу (2) за описаною вище схемою, використовуючи кусково-лінійні апроксимації методу скінченних елементів. У разі використання апроксимацій вищих порядків для розв'язування системи (5) можна застосувати метод найменших квадратів. На заключній ітерації ми отримали триангуляцію (з 1662 трикутників і 1003 вузлів), зображену на рис. 1 (справа). Бачимо, що на всіх кроках адаптації сітка покращувалася лише в околі примежового шару, де спостерігається найгірша точність апроксимації.

Деякі характеристики ітераційного процесу наведено в таблиці. Із приведених розрахунків видно, що коефіцієнт ефективності побудованого нами оцінювача $\approx 0,8$. Порядок швидкості збіжності обчислено за формулою

$$p_i = 2 \frac{\ln(E_{\Omega}^i) - \ln(E_{\Omega}^1)}{\ln(N^1) - \ln(N^i)}, \text{ де } i = \overline{2, 18} \text{ — номер ітерації.}$$

На рис. 2 зображено точний розв'язок (7) і графік апроксимації, побудованої на останньому кроці адаптування.

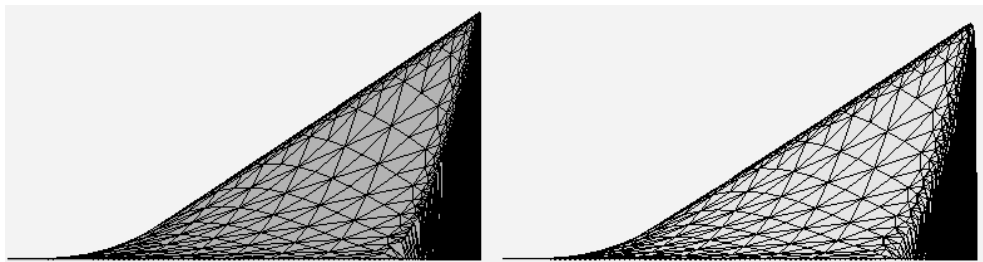


Рис. 2. Точний розв'язок (7) (зліва) та його апроксимація (справа)

Характеристика процесу h -адаптування

Ітерація	Вузли	Трикут.	ε_{\max}	ε_{Ω}	E_{\max}	E_{Ω}	$\varepsilon_{\Omega}/E_{\Omega}$	ρ
1	145	256	0,08494	0,03228	0,04286	0,10431	0,81	
2	149	260	0,08511	0,02463	0,04149	0,10766	0,79	
3	157	274	0,07793	0,02574	0,02755	0,09571	0,81	2,16
4	159	278	0,07166	0,01841	0,02328	0,09003	0,80	3,20
5	170	293	0,06759	0,01489	0,02196	0,08278	0,82	2,91
6	188	323	0,05857	0,01173	0,02141	0,07535	0,78	2,50
7	207	356	0,05363	0,01171	0,01443	0,06737	0,80	2,46
8	213	366	0,05039	0,00865	0,01191	0,06348	0,79	2,58
9	244	411	0,04690	0,00674	0,01088	0,05969	0,79	2,15
10	292	497	0,03931	0,00527	0,00739	0,05125	0,77	2,03
11	339	569	0,03592	0,00410	0,00584	0,04624	0,78	1,92
12	411	685	0,03226	0,00353	0,00548	0,04186	0,77	1,75
13	467	782	0,02949	0,00322	0,00381	0,03883	0,76	1,69
14	502	844	0,02788	0,00267	0,00351	0,03680	0,76	1,68
15	585	971	0,02582	0,00213	0,00295	0,03388	0,76	1,61
16	711	1174	0,02344	0,00174	0,00275	0,03082	0,76	1,53
17	855	1424	0,02098	0,00146	0,00192	0,02808	0,75	1,48
18	1003	1662	0,01926	0,00122	0,00164	0,02583	0,75	1,44

Висновки. Побудований апостеріорний оцінювач похибок для двовимірних задач конвекції-дифузії здатний відтворювати поведінку похибки, що гарантує покращення триангуляції винятково в околі примежового шару. Розроблена адаптивна схема МСЕ на основі симетризації методом Петрова-Гальоркіна дозволяє знаходити апроксимацію розв'язку задачі з наперед заданою точністю. Порівняння значень оцінювача з точною похибкою підтверджують його надійність. Обчислювальні експерименти засвідчують ефективність запропонованої адаптивної схеми.

Література

- [1] Численное моделирование распространения загрязнения в окружающей среде / Беляев Н. М., Згуровский М. З., Скопецкий В. В., Хрущ В. К. — К.: Наук. думка, 1997. — 365 с.
- [2] Блажиевська О. В. Математичне моделювання технологічних та геофізичних процесів. Ч. 1. — Львів: ЛДУ ім. І. Франка, 1999. — 55 с.
- [3] Бурак Я. Й., Чапля С. Я. Вихідні положення математичної моделі гетеродифузного переносу радіонуклідів у приповерхневих шарах Землі // Доп. АН України. — 1993. — № 10. — С. 59-63.

- [4] Дейнека В. С., Сергиенко И. В, Скопецкий В. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. — К.: Наук. думка, 1991. — 432 с.
- [5] Жук П. А., Подстригач Я. С., Чапля Е. Я. Исходные уравнения математической модели тепловлагопереноса с испарением для аэрируемых слоев почвы // Космическая наука и техника. — 1990. — Вып. 5. — С. 3-9.
- [6] Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю. Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. — Львів: СПОЛОМ, 2003. — 125 с.
- [7] Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — 152 с.
- [8] Morton K. W. Numerical solution of convection-diffusion problems. — London: Chapman&Hall, 1996. — 372 p.
- [9] Мандзак Т. І., Савула Я. Г. Гетерогенна крайова задача математичної моделі адвекції-дифузії у середовищі з включенням // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2006. — Вип. 3. — С. 150-158.
- [10] Stynes M. Steady-state convection-diffusion problems. — Acta Numerica, 2005. — P. 445-508.
- [11] Самарский А. А., Вабичевич П. Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 248 с.
- [12] Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L. Numerical methods for singular singularly perturbed differential equations. — Berlin: Springer, 1995. — 348 p.
- [13] Козаревська Ю., Шинкаренко Г. Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: *h*-адаптивний метод скінченних елементів. Ч. 1 // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 1999. — Вип. 1. — С. 153-164.
- [14] Verfurth R. A posteriori error estimator for convection-diffusion problem // Numer. Math. — 1998 — Issue 80. — P. 641-663.
- [15] Wang S. An a posteriori error estimate for finite element approximations of a singularly perturbed advection-diffusion problem // J. Comput. Appl. Math. — 1997. — Issue 87, No 2 — P. 227-242.
- [16] Блажиевська О. В., Мандзак Т. І. Про ефективність методу експоненційної підгонки при розв'язуванні задач тепломасоперенесення у пористих середовищах // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 1999. — Вип. 1. — С. 26-31.
- [17] Мандзак Т. І., Савула Я. Г. Пониження вимірності математичної моделі адвекції-дифузії у тонкому включенні з використанням експоненційних апроксимацій // Волин. мат. вісник. Сер. прикл. матем. — 2004. — Вип. 2(11). — С. 52-57.
- [18] Wang S. A Novel Exponentially Fitted Triangular Finite Element Method for an Advection-Diffusion Problem with Boundary Layers // J. Comp. Phys. — 1997. — Issue 134. — P. 253-260.
- [19] Сінчук Ю. О., Шинкаренко Г. А. Апроксимації методу скінченних елементів з експоненціальними ваговими функціями // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2007. — Вип. 5. — С. 61-70.
- [20] Sacco R., Stynes M. Finite element methods for convection-diffusion problems using exponential splines on triangles // Comput. Math. Appl. — 1998. — Issue 35, No 3. — P. 5-45.

Adaptive scheme of finite elements method for singularly perturbed convection-diffusion problems

Yuriy Sinchuk

Local a posteriori errors estimators (AEE) for finite element method (FEM) approximations of two-dimensional problems of convection-diffusion are constructed. The h adaptive FEM scheme based on the estimator and stabilizing method of Petrov-Galerkin with exponential weight functions is proposed. The results of numerical experiments testify to high quality of the estimator and reliability of the proposed adaptive FEM scheme.

Адаптивная схема метода конечных элементов для сингулярно возмущенных задач конвекции-диффузии

Юрий Синчук

Для двумерных задач конвекции-диффузии построена локальная апостериорная оценка погрешности (АОП) аппроксимаций метода конечных элементов (МКЕ). Предложено h -адаптивную схему МКЕ с использованием упомянутого АОП и стабилизирующего метода Петрова-Галёркина с экспоненциальными весовыми функциями. Численные результаты h -адаптации подтверждают высокое качество АОП и надежность предложенной адаптивной схемы МКЕ.

Отримано 23.04.08