

Статистична модель довговічності скла за статичного навантаження. Логарифмічно нормальний розподіл ймовірності

Василь Чекурін¹, Василь Лазар², Василь Дяків³

¹ д. ф.-м. н., професор, Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, e-mail: chekurin@iapmm.lviv.ua

² к. т. н., Мукачівський технологічний інститут МОН України, вул. Ужгородська, 26, Мукачєво

³ Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів

Із використанням запропонованого раніше теоретико-експериментального методу встановлено статистичні параметри довготривалої міцності скла С52-7 за статичних навантажень, сталих температури та вологості середовища. На основі проведених статистичних випробувань кількох серій зразків отримано кількісні оцінки параметрів (математичного сподівання та дисперсії) для логарифмічно нормального закону розподілу довговічності скла за дії зовнішнього статичного навантаження. Встановлено емпіричні залежності цих параметрів від прикладених напружень розтягу. Отримані результати можна використати для оцінки довговічності тонкостінних елементів конструкцій і приладів зі скла за дії на них зовнішнього навантаження.

Ключові слова: скло, довготривала міцність, статистичні випробування.

Вступ. Скло — матеріал, який широко використовують у будівництві, машино- та приладобудуванні, у виробі спеціального призначення й ужиткових. Тож, розробка ефективних методів визначення параметрів міцності скла є важливе науково-технічне завдання.

Руйнування скла за достатньо високих швидкостей навантаження та достатньо низьких, порівняно з температурою скловання, температур відбувається за механізмом, близьким до ідеально крихкого. Водночас для процесу руйнування скла властиві деякі особливості [1, 2]. По-перше, реальна міцність скла значно менша за теоретичну та спостерігається її значний розкид. Друга особливість полягає у переважаючому впливові властивостей поверхні на міцність скла. Третьою особливістю є ефект статичної втоми, що проявляється залежно від міцності скла, швидкості деформування або часу витримки об'єкта під статичним навантаженням.

Низьку, порівняно з теоретичною, реальну міцність скла можна пояснити наявністю структурних недосконалостей і дефектів. Їх концентрація значно вища біля поверхні виробу, ніж у товщі матеріалу.

У статті подано результати кількісної оцінки статистичних параметрів довготривалої міцності електровакуумного скла С52-7 за дії статичних навантажень, отримані з використанням розробленого раніше теоретико-експериментального методу [4-6].

1. Моделі руйнування скла за тривалого навантаження

Довговічність об'єкта за дії зовнішнього силового навантаження можна означити як проміжок часу τ між моментом прикладання навантаження та моментом руйнування. У результаті проведених експериментальних досліджень встановлено [3], що довговічність твердих тіл за статичних навантажень експоненційно спадає зі збільшенням прикладених напружень розтягу σ

$$\tau = A \exp(-\alpha\sigma). \quad (1)$$

Тут A й α — характеристики матеріалу.

Залежність (1) знайшла своє обґрунтування в рамках термофлуктуаційної теорії [3], яка встановлює залежність довговічності твердих тіл від прикладених напружень розтягу та температури у вигляді

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{U_0 - \gamma\sigma}{k_B T}\right). \quad (2)$$

Тут τ_0 — параметр, близький за величиною до періоду теплових коливань атомів у твердому тілі; $\tau_0 \approx 10^{-13}$ с; U_0 — енергія активації для розриву зв'язків між атомами в твердому тілі; γ — коефіцієнт, який враховує зменшення енергії активації, зумовлене напруженнями; k_B — стала Больцмана; T — абсолютна температура.

Термофлуктуаційна теорія пов'язує процес утворення розривів суцільності в об'ємі твердих тіл із тепловими флуктуаціями, енергія ΔE_f яких співмірна з енергією активації $U_0 - \gamma\sigma$. Як впливає зі статистичної фізики, середній період часу τ_f між двома послідовними такими флуктуаціями експоненційно зменшується зі зростанням енергії ΔE_f , тобто

$$\tau_f = \tau_0 \exp\left(-\frac{\Delta E_f}{k_B T}\right). \quad (3)$$

Звідси і впливає формула (2) для довговічності.

Слід наголосити, однак, що, згідно з термофлуктуаційною моделлю, руйнування є стохастичний процес, відтак довговічність — випадковий параметр. Таким чином формули (1), (2) для довговічності насправді визначають лише деякий статистично середній час життя навантаженого об'єкта. Проте для матеріалів, які в достатній мірі фізично та структурно однорідні, зокрема, для зразків високоміцного хімічно полірованого скла чи тонких кварцових волокон [2], залежність (1) наближає результати вимірювань із доволі малим розкидом. Тож, довговічність таких об'єктів можна оцінювати за детерміністичним підходом, використовуючи формулу (1) і нехтуючи розкидом цих параметрів, приймаючи їх детермінованими.

Сталі матеріалу, що в ній фігурують, можна визначити на основі випробувань порівняно невеликої кількості зразків. Для цього кожен зразок слід навантажити заданим напруженням розтягу σ , виміряти час до руйнування, а відтак, апроксимувавши залежність виміряних значень логарифму довговічності зразків від прикладених напружень лінійною функцією, визначити сталі A й α , використовуючи, наприклад, метод найменших квадратів.

Однак для скла низької та середньої міцності апроксимація експериментальних даних довговічності формулами (1), (2) дає занадто великий для інженерних застосувань розкид. Це можна пояснити тим, що скло такого типу є мікронеоднорідним матеріалом, в якому присутня значна кількість структурних і фізичних неоднорідностей і дефектів (варіації хімічного складу та структури, бульбашки газу, подряпини, сколи, тріщини, свілі), розподіл яких в об'ємі та на поверхні об'єкта випадковий. Внаслідок цього властивості матеріалу, зокрема, ті, що відповідають за довготривалу міцність — енергія активації U_0 і коефіцієнт γ — матимуть різні значення в околах різних включень. Включення та дефекти є концентратори напружень, тож навіть за однорідного зовнішнього навантаження напруження в околі кожної неоднорідності можуть істотно відрізнятись від прикладеного навантаження σ , тобто $\sigma^{(i)} = k^{(i)}\sigma$, де $k^{(i)}$ — коефіцієнт концентрації напружень. Під дією напружень розтягу на концентраторах напружень можуть зароджуватися та розвиватися гострокінцеві дефекти (тріщини). Властивості матеріалу, які визначають можливість виникнення та розвиток дефектів, будуть, взагалі кажучи, різними в околі різних концентраторів. Отже кожен такий дефект характеризуватиметься своїм проміжком часу $\tau^{(i)}$, який спливе від моменту прикладання навантаження до досягнення дефектом критичних розмірів. Якщо $\sigma^{(i)}$ — напруження розтягу, $U_0^{(i)}$ та $\gamma^{(i)}$ — значення енергії активації та параметра γ на i -тому концентраторі, то $\tau^{(i)}$ можна оцінити за формулою

$$\tau^{(i)} = \tau_0 \exp \left[\frac{U_0^{(i)} - \gamma^{(i)} k^{(i)} \sigma}{k_B T} \right], \quad (4)$$

а довговічність об'єкта можна визначити як

$$\tau = \min \left(\tau^{(i)} \right). \quad (5)$$

Щоб застосувати детерміністичний підхід до визначення довговічності об'єкта, що базується на формулах (4), (5), необхідно виявити усі наявні в об'єкті концентратори напружень і встановити для кожного з них значення параметрів $\sigma^{(i)}$, $U_0^{(i)}$ та $\gamma^{(i)}$. Зрозуміло, що його реалізація для реальних об'єктів, виготовлених зі скла низької та середньої міцності, натикається на серйозні труднощі, оскільки кількість таких концентраторів може бути вельми значною та вони випадково розподілені в об'єкті, а також за їх властивостями, розмірами, формою, орієнтацією тощо. У зв'язку з цим важливого значення набувають статистичні методи оцінки параметрів довготривалої міцності скла, які дозволяють визначати надійність об'єкта на заданий час експлуатації за дії статичних навантажень.

Метою статистичного підходу є встановлення функції розподілу $W_\sigma(\tau)$ довготривалої міцності зразків матеріалу за часом t , яка визначає ймовірність руйнування зразка під дією прикладених однорідних і незмінних у часі напружень розтягу σ за проміжок часу τ від моменту прикладання навантаження. Відтак, за відомою

функцією ймовірності $W_{\sigma}(\tau)$ можна визначити математичне сподівання для часу життя навантаженого об'єкта, його дисперсію, оцінити інтервали довіри, надійність об'єкта на заданий час експлуатації тощо.

Функцію $W_{\sigma}(\tau)$ можна оцінити на основі даних вибіркового випробування серій зрізків за фіксованих значень прикладених однорідних напружень розтягу σ . З цієї метою до вибірки статистично ідентичних зразків прикладають задане навантаження σ та реєструють проміжок часу між моментами прикладання навантаження та руйнування [2]. Нехай τ_i — момент руйнування i -го зразка, відрахований від початку дії навантаження, N_i — кількість зразків, які зруйнувалися до моменту часу τ_i , N_v — кількість зразків у вибірці. Тоді відношення $W_{\sigma}^i = N_i / (N_v + 1)$ дає емпіричну оцінку ймовірності руйнування скла за дії заданого напруження розтягу σ упродовж часу $[0, \tau_i]$.

Для побудови статистичної моделі руйнування скла за зовнішніх статичних навантажень розтягу виходитимемо з таких припущень:

- домінуючий вплив на тривалу міцність скла має поверхня об'єкта. Це підтверджують численні експериментальні дослідження та пояснюють значно вищою за об'ємну концентрацією поверхневих неоднорідностей і впливом довкілля на утворення та розвиток дефектів;
- руйнування відбувається шляхом зародження на поверхневих неоднорідностях і розвитку вглиб об'єкта гострокінцевих дефектів;
- довговічність об'єкта визначається за принципом «слабкої ланки», який виражає формула (5);
- неоднорідності, які є концентраторами напружень, статистично рівномірно розподілені по всій поверхні об'єкта, а статистичні функції розподілу параметрів k , U_0 і γ , які згідно формули (4) визначають час розвинення дефекту до критичних розмірів, є однакові для всіх точок поверхні об'єкта.

2. Методика статистичних випробувань

Оскільки довготривала міцність залежить від розмірів зони, в якій діють напруження, то для реалізації цього способу необхідно вибрати схему навантаження зразків, яка забезпечує високу однорідність напруженого стану в достатньо великій області зразка, а також визначитися з розмірами та формою зразка, об'ємом вибірки та тривалістю випробувань.

Під час випробувань на міцність крихких матеріалів використовують різні схеми навантаження — розтягування стрижнів круглого поперечного перерізу, поперечне згинання вільно опертих пластинок або круглих стрижнів, а також осесиметричне згинання тонких пластин.

Традиційна схема випробувань на міцність — розтягування спеціальних виготовлених зразків із робочою зоною у формі кругових циліндрів дає можливість створювати одновісний напружений стан із високим ступенем однорідності у достатньо великому об'ємі робочої зони. Однак, виготовляти такі зразки зі скла технологічно досить складно, а внаслідок крихкості матеріалу вони можуть руйнуватися від найменших перекосів ще під час їх встановлення в пристрій навантаження.

Тому широкого застосування при випробуваннях на міцність скла набули методи навантаження зразків шляхом їх згинання. Недоліком такої схеми є те, що розтягувальні напруження зменшуються в глибину зразка. Проте для скла така схема навантаження є прийнятна, оскільки, як зазначалося, переважальний вплив на довготривалу міцність цього матеріалу має поверхня, на якій зосереджена основна кількість концентраторів напружень.

Згинання вузьких прямокутних пластинок за чотириточковою схемою [2] дозволяє створити однорідні напруження одновісного розтягу на одній із поверхонь зразка. Однак при цьому поздовжні краї цієї поверхні, які є концентраторами напружень, також перебувають під дією напружень розтягу, тому значна кількість зразків руйнується внаслідок розвитку тріщин, які зароджуються на гострих краях зразка. Це призводить до систематичної похибки, що проявляється у зниженні значень довговічності, визначених за такою схемою.

Осесиметричне згинання круглих пластинок (дисків) [2] дозволяє створювати однорідне навантаження розтягу на достатньо великій площі поверхні зразка, забезпечуючи при цьому достатньо малі значення розтягувальних напружень на краю пластинки.

Для реалізації цієї схеми зразок 1 (рис. 1) у вигляді круглої пластинки товщини h і діаметра $2r_3$ встановлювали на призматично-кільцеву опору 2. На протилежну поверхню диска 1 співвісно з опорою встановлювали призматичний кільцевий пуансон 3, який через кульовий шарнір навантажували зусиллям F . Щоб запобігти руйнуванню в зонах контакту опори та пуансона зі зразком і частково знівелювати вплив можливих порушень площинності зразка застосовують поліхлорвінілові прокладки 4. Щоб зразки після руйнування не розсипалися на окремі осколки, їх поверхню зі сторони пуансона покривали липкою поліхлорвініловою плівкою.

За такого навантаження у зразку виникає осесиметричний напружено-деформований стан, за якого на базовій площинці 5 радіуса r_1 діють однорідні напруження всебічного розтягу $\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma$, рівень яких, згідно теорії згинання тонких пластин, визначають за формулою [2]

$$\sigma = B \frac{F}{h^2}, \quad (6)$$

де F — прикладене до пуансона зусилля, h — товщина диска, B — стала, що залежить від розмірів r_1, r_2, r_3 та пружних властивостей матеріалу зразка.

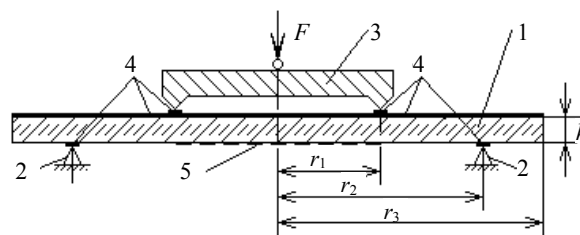


Рис. 1. Схема навантаження зразків для випробувань

Внаслідок цього усі поверхневі концентратори напружень на базовій площинці будуть навантажені однаковими нормальними силами розтягу σ , тому швидкість розвинення дефекту за тривалого навантаження не залежатиме від його орієнтації в площині зразка. До того ж, вибираючи радіус r_3 диска достатньо великий, можна досягнути як завгодно малих значень напружень на краю пластини та запобігти в такий спосіб зародженню тріщин на гострих кромках зразка.

Для апостеріорної оцінки залежності параметрів довготривалої міцності скла від зовнішнього навантаження здійснювали випробування декількох серій $v = 1 \dots V$ ідентичних зразків, вибираючи для кожної з них інше значення прикладеного навантаження σ . Точність і достовірність статистичних висновків, зроблених на основі проведених випробувань, залежатиме від кількості інформативних зразків n_v у серії v — тобто кількості зразків, що зруйнувалися під дією прикладеного навантаження за обраний час випробування одного зразка Δt . Зрозуміло, що n_v зростатиме зі збільшення об'єму вибірки N і періоду випробувань Δt . Однак при цьому зростатиме також і сумарний час проведення випробувань

$$\tau = \sum_{v=1}^V \sum_{i=1}^{N_v} \tau_i^v = \sum_{v=1}^V \sum_{i=1}^{n_v} \tau_i^v + \sum_{v=1}^V \Delta t_v (N_v - n_v) \leq \sum_{v=1}^V \Delta t_v N_v, \quad (7)$$

де Δt_v — проміжок часу, впродовж якого здійснюють випробування одного зразка в серії v , N_v — кількість зразків у цій серії. Тому параметри N_v та Δt_v доводиться вибирати на основі компромісу між бажаними точністю та рівнем достовірності отриманих даних і можливістю практичної реалізації запланованих випробувань за більш-менш реальні проміжки часу.

Попередніми дослідженнями [4] встановлено, що за низьких рівнів навантаження ($\sigma = 30\text{-}40$ МПа) для оцінки медіанної міцності скла з точністю 5% і достовірністю 0,9 достатньо мати 7-8 інформативних зразків. Якщо обмежити час випробування одного зразка однією годиною $\Delta t_v = 3600$ с, то об'єм серії N_v повинен складати 50 ... 100 зразків. Якщо ці значення параметрів N_v та Δt_v прийняти і для серій, які випробовують за більших рівнів навантаження, то кількість інформативних зразків у них зростатиме відповідно до збільшення рівня прикладених напружень.

3. Результати випробувань

Досліджували електровакуумне скло C52-7 за сталої вологості середовища $H_c = 90\%$ [5, 6]. Для проведення випробувань використовували ідентичні шліфовані та поліровані зразки у формі круглих пластин із розмірами: $r_3 = 28$ мм, $h = 2,0$ мм. Розміри пристроїв навантаження: радіус циліндрично-призматичного пуансона $r_1 = 4$ мм, радіус циліндрично-призматичної опори $r_2 = 8$ мм. Отже площа s_0 базової площинки 5, на якій реалізується однорідний напружений стан всебічного розтягу, становитиме 50,26 мм².

Проведено шість серій випробувань по $N_v = N = 50$ ідентичних зразків у кожній. Серії відрізнялися лише прикладеним навантаженням розтягу (50, 60, 70, 80, 90 та 100 МПа). Кожен зразок серії витримували при заданому статичному навантаженні

не більше однієї години. Якщо зразок серії руйнувався в процесі випробувань, то фіксували момент його руйнування τ_i . Емпіричні оцінки ймовірностей руйнування на проміжках $[0, \tau_i]$ за дії напружень σ_v визначали за формулою

$$W_i = N_i / (N_v + 1). \quad (8)$$

Отриманий для кожної серії в такий спосіб дискретний набір емпіричних ймовірностей W_i апроксимували логарифмічно нормальним законом [7]. Із цієї метою для кожного W_i визначали квантиль g_i незміщеного нормального розподілу шляхом чисельного розв'язування рівняння

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{g_i} e^{-\xi^2/2} d\xi = W_i. \quad (9)$$

Отримані дискретні залежності параметра g_i від $\lg \tau_i$ (див. рис. 2) апроксимували методом найменших квадратів лінійною функцією $\hat{g} = \hat{a} + \hat{b} \lg \tau$. У результаті отримали значення коефіцієнтів апроксимації для кожної серії випробувань

$$\hat{a}_v = \frac{\sum_{i=1}^N (\lg \tau_i)^2 \sum_{i=1}^N g_i - \sum_{i=1}^N \lg \tau_i \sum_{i=1}^N g_i \lg \tau_i}{N \sum_{i=1}^N (\lg \tau_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^N \lg \tau_i \right)^2}, \quad (10)$$

$$\hat{b}_v = \frac{N \sum_{i=1}^N g_i \lg \tau_i - \sum_{i=1}^N \lg \tau_i \sum_{i=1}^N g_i}{N \sum_{i=1}^N (\lg \tau_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^N \lg \tau_i \right)^2}. \quad (11)$$

Таким чином були встановлені неперервні функції розподілу ймовірності W_v логарифма довговічності $\lg \tau$ для всіх серій (рис. 3)

$$W_v = \frac{\hat{b}_v}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(\lg \tau)_v} \exp \left[-\frac{(\xi + \hat{a}_v / \hat{b}_v)^2}{2(1/\hat{b}_v)^2} \right] d\xi. \quad (12)$$

Із формули (12) випливає, що математичне сподівання для логарифма довговічності $\mu_{\lg \tau}^v = (\lg \tau)_{0,5}$ і стандартне відхилення D_v визначаються за коефіцієнтами апроксимації результатів проведених статистичних випробувань \hat{a}_v та \hat{b}_v наступним чином

$$\mu_{\lg \tau}^v = -\frac{\hat{a}_v}{\hat{b}_v}, \quad D_{\lg \tau}^v = \frac{1}{\hat{b}_v}. \quad (13)$$

Отримані шляхом статистичних випробувань дискретні залежності коефіцієнтів

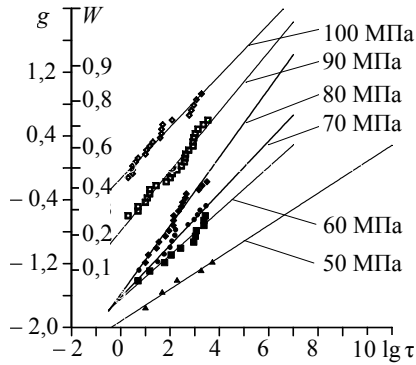


Рис. 2. Залежності значень квантил логарифмічно нормального розподілу для емпіричних оцінок ймовірності руйнування W_i зразків від логарифма вимірних значень моментів часу руйнування для різних навантажень розтягу σ та їх апроксимації прямими лініями

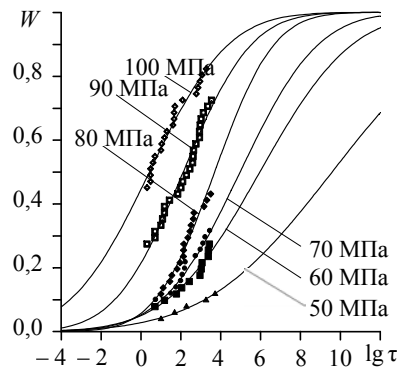


Рис. 3. Залежності емпіричних оцінок ймовірності руйнування W_i зразків від логарифма вимірних значень моментів часу руйнування за різних навантажень розтягу σ та їх апроксимації логарифмічно нормальним законом розподілу ймовірності (суцільні криві)

\hat{a}_v та \hat{b}_v , а також значень математичного сподівання $\mu_{\lg \tau}^v$ та дисперсії $D_{\lg \tau}^2$ від напруження розтягу σ можна апроксимувати неперервними функціями $\hat{a}(\sigma)$, $\hat{b}(\sigma)$, $\mu \equiv -\hat{a}/\hat{b} = \mu_{\lg \tau}(\sigma)$, $D_{\lg \tau}^2 \equiv 1/\hat{b} = D_{\lg \tau}^2(\sigma)$. На рис. 4 та 5 наведено графіки залежностей $\mu_{\lg \tau}(\sigma)$ та $D_{\lg \tau}^2(\sigma)$ (суцільні лінії), які отримані шляхом апроксимації методом найменших квадратів дискретних залежностей $\mu_{\lg \tau}$ та $D_{\lg \tau}^2$ (точки), обчислених за формулами (13), від прикладених напружень σ . Дискретні дані апроксимували лінійними функціями

$$\mu_{\lg \tau} = \mu_0 - K_\mu \sigma, \quad D_{\lg \tau}^2 = D_0^2 - K_D \sigma, \quad (14)$$

де μ_0, K_μ, D_0^2, K_D — сталі.

Знайдена функція $\mu_{\lg \tau}(\sigma)$ визначає залежність медіанного значення логарифма довговічності від прикладених напружень.

Використовуючи так встановлені функції $\mu_{\lg \tau}(\sigma)$ та $D_{\lg \tau}^2(\sigma)$, отримуємо функцію розподілу ймовірності руйнування для $\lg \tau$ за дії стаціонарного напруження розтягу σ

$$W_\sigma(\lg \tau) = \frac{1}{D_{\lg \tau}(\sigma)\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lg \tau} \exp \left\{ -\frac{[\xi - \mu_{\lg \tau}(\sigma)]^2}{2D_{\lg \tau}^2(\sigma)} \right\} d\xi. \quad (15)$$

При цьому залежна від прикладених напружень функція надійності $P_\sigma(\lg \tau)$ для логарифма довговічності за статичного навантаження σ визначиться формулою

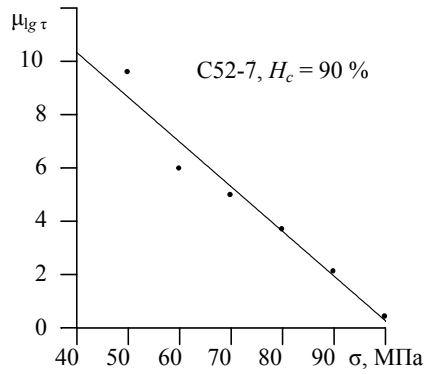


Рис. 4. Залежність медіанного значення логарифма довговічності $\mu_{\lg\tau}$ від прикладених напружень σ

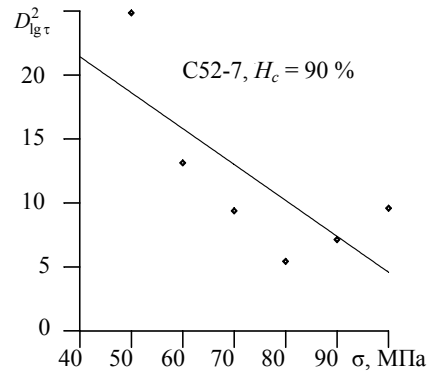


Рис. 5. Залежність дисперсії $D_{\lg\tau}^2$ від прикладених напружень σ

$$P_{\sigma}(\lg \tau) = 1 - W_{\sigma}(\lg \tau). \quad (16)$$

Таким чином, щоб знайти залежність логарифма довговічності від прикладеного напруження розтягу σ зі заданою надійністю $0 < P < 1$, необхідно розв'язати стосовно $(\lg \tau)_P$ наступне рівняння

$$\frac{1}{D(\sigma)\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(\lg \tau)_P} \exp\left\{-\frac{[\xi - \mu_{\lg\tau}(\sigma)]^2}{2D_{\lg\tau}^2(\sigma)}\right\} d\xi = 1 - P. \quad (17)$$

Виходячи з функції розподілу (15) для $\lg \tau$, неважко встановити функцію розподілу для часу руйнування τ

$$W_{\sigma}(\tau) = \frac{m}{D_{\lg\tau}(\sigma)\sqrt{2\pi}} \int_0^{\tau} \frac{1}{\eta} \exp\left\{-\frac{[\lg \eta - \mu_{\lg\tau}(\sigma)]^2}{2D_{\lg\tau}^2(\sigma)}\right\} d\eta, \quad (18)$$

де m — коефіцієнт переходу від натуральних до десяткових логарифмів $m = \lg e \approx 0,4343$.

Математичне сподівання $\langle \tau \rangle = \mu_{\tau}$ для часу руйнування τ (середня довговічність зразків) обчислюємо, використовуючи функцію розподілу (18)

$$\mu_{\tau}(\sigma) = \frac{m}{D_{\lg\tau}(\sigma)\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{[\lg \eta - \mu_{\lg\tau}(\sigma)]^2}{2D_{\lg\tau}^2(\sigma)}\right\} d\eta. \quad (19)$$

Виконуючи інтегрування, отримуємо залежність середньої довговічності від величини прикладених напружень σ

$$\mu_{\tau}(\sigma) = \exp\left[\frac{\mu_{\lg\tau}(\sigma)}{m} + \frac{D_{\lg\tau}^2(\sigma)}{2m^2}\right]. \quad (20)$$

Беручи до уваги співвідношення (14), з формули (20) отримуємо

$$\mu_{\tau} = A_{\mu} \exp(-\alpha_{\mu}\sigma), \quad (21)$$

де

$$A_{\mu} = \exp\left(\frac{\mu_0}{m} + \frac{D_0^2}{2m^2}\right), \quad \alpha_{\mu} = \frac{K_{\mu}}{m} + \frac{K_D}{2m^2}. \quad (22)$$

Таким чином, виходячи з логарифмічно нормального закону, отримано формулу (21) для середньої довговічності зразків, яка цілком узгоджується з експериментально встановленою залежністю (1) довговічності зразків від прикладеного навантаження розтягу. Формули (22) при цьому дозволяють визначити сталі, що входять до емпіричного закону (1) залежності довговічності від напружень.

Визначимо також дисперсію часу руйнування D_{τ}^2 . Використовуючи функцію розподілу (18), отримуємо

$$D_{\tau}^2(\sigma) = \frac{m}{D_{\lg\tau}(\sigma)\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{(\eta - \mu_{\tau})^2}{\eta} \exp\left\{-\frac{[\lg\eta - \mu_{\lg\tau}(\sigma)]^2}{2D_{\lg\tau}^2(\sigma)}\right\} d\eta. \quad (23)$$

Звідси, враховуючи формулу (20), після інтегрування отримуємо

$$D_{\tau}^2(\sigma) = \exp\left[\frac{2\mu_{\lg\tau}(\sigma)}{m} + \frac{D_{\lg\tau}^2(\sigma)}{m^2}\right] \left\{ \exp\left[\frac{D_{\lg\tau}^2(\sigma)}{m^2}\right] - 1 \right\}. \quad (24)$$

Медіанне значення часу руйнування $\tau_{0,5} = \tau_M$ визначаємо як розв'язок рівняння

$$\frac{m}{D_{\lg\tau}(\sigma)\sqrt{2\pi}} \int_0^{\tau_M} \frac{1}{\eta} \exp\left\{-\frac{[\lg\eta - \mu_{\lg\tau}(\sigma)]^2}{2D_{\lg\tau}^2(\sigma)}\right\} d\eta = 0,5, \quad (25)$$

звідки знаходимо

$$\tau_M = \exp\left[\frac{\mu_{\lg\tau}(\sigma)}{m}\right]. \quad (26)$$

Беручи до уваги перше співвідношення (14), отримуємо формулу, що визначає залежність медіанної довговічності зразків від прикладених напружень σ

$$\tau_M = A_M \exp(-\alpha_M\sigma), \quad (27)$$

де

$$A_M = \exp\left(\frac{\mu_0}{m}\right), \quad \alpha_M = \frac{K_\mu}{m}.$$

Функція розподілу надійності $P_\sigma(\tau)$, яка визначає ймовірність того, що упродовж проміжку часу $[0, \tau]$ тіло не зруйнується, визначаємо як

$$P_\sigma(\tau) = 1 - W_\sigma(\tau).$$

Для знаходження довговічності τ_P з заданою надійністю $0 < P < 1$ необхідно розв'язати таке рівняння

$$\frac{m}{D_{\lg \tau}(\sigma) \sqrt{2\pi}} \int_0^{\tau_P} \frac{1}{\eta} \exp\left\{-\frac{[\lg \eta - \mu_{\lg \tau}(\sigma)]^2}{2D_{\lg \tau}^2(\sigma)}\right\} d\eta = 1 - P. \quad (28)$$

Висновки. На основі проведених за методикою [6] статистичних випробувань зразків скла за дії зовнішнього навантаження розтягу σ встановлено залежності від величини σ параметрів логарифмічно нормального закону розподілу ймовірності — математичного сподівання $\mu_{\lg \tau}(\sigma)$ та дисперсії $D_{\lg \tau}^2(\sigma)$. Виходячи з встановленого закону розподілу ймовірності (15) для логарифма довговічності $\lg \tau$, встановлено закон розподілу (18) для довговічності τ , який враховує вплив прикладеного навантаження розтягу σ на ймовірність руйнування. Отриманий закон розподілу дозволяє розраховувати довговічність зразків τ_P з заданою надійністю P шляхом розв'язування рівняння (28). Тому цей закон можна використати для створення методики оцінювання довговічності та надійності тонкостінних елементів зі скла [4]. Встановлені на основі отриманого закону розподілу ймовірності формули (21) і (27), які описують залежність середньої μ_τ та медіанної τ_M довговічності від величини прикладених навантажень σ цілком узгоджуються з експериментально встановленою залежністю (1).

Отримані результати дають доволі значний розкид довговічності зразків. Це можна пояснити декількома причинами. По-перше, для матеріалу, який досліджували, можливо, і властивий такий розкид параметрів. По-друге, істинний закон розподілу ймовірності логарифма довговічності може різнитися від логарифмічно нормального. По-третє, діапазон навантажень, у якому проводили випробування $\sigma = 50 \dots 100$ МПа, є занадто широкий, тож апроксимація даних випробувань лінійною функцією в цілому діапазоні напружень дає значні відхилення. Зокрема, аналізуючи рис. 4 та 5, можна виділити три діапазони напружень $\sigma < 60$ МПа, $\sigma = 60 \dots 80$ МПа та $\sigma = 80 \dots 100$ МПа, для яких, можливо, властиві різні закони розподілу ймовірності для довговічності.

Література

- [1] *Бартечев Г. М.* Прочность и механизм разрушения полимеров. — Москва: Химия, 1984. — 280 с.
- [2] *Пух В. П.* Прочность и разрушение стекла. — Ленинград: Наука, 1973. — 156 с.

- [3] Регель В. Р., Слуцкер В. И., Томашевский Э. Е. Кинетическая природа прочности твердых тел. — Москва: Наука, 1974. — 560 с.
- [4] Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Марголин А. М. Остаточные напряжения, длительная прочность и надежность стеклоконструкций. — Киев: Наук. думка, 1991. — 289 с.
- [5] К статистической теории длительной прочности стекла / Марголин А. М., Мартынова В. П., Осадчук В. А., Чекурин В. Ф. // Проблемы прочности. — 2005. — № 3. — С. 75-85.
- [6] Марголин А. М., Осадчук В. А., Чекурин В. Ф. Спосіб визначення міцності скла. Декларативний патент 65681А. Україна 7G01N11/00 // Заявлено 30.07.2002. Опубліковано 15.04.2004. Бюл. № 4.
- [7] Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. А. Математические методы в теории надежности. — Москва: Наука, 1965. — 524 с.
- [8] Брест В. А., Шелюбский В. И. Прочность стекла при длительном нагружении // Стекло и керамика. — 1991. — № 6. — С. 14-16.

Statistical model for glass durability under static loading. The lognormal probability distribution

Vasyl Chekurin, Vasyl Lazar, Vasyl Dyakiv

Statistical parameters of long-term strength of C52-7 glass under static loading at constant environment temperature and humidity have been determined with use of the previously suggested theoretical-experimental method. Statistical tests of several sets of glass samples have been conducted. On the basis of these data the quantitative estimations for the parameters of lognormal probability distribution — the mathematical expectation and the variance — have been obtained and empirical dependences of these parameters on the applied tensile stresses determined. The results can be used to develop a methodology for estimation of thin-walled glass elements durability under external loading.

Статистическая модель долговечности стекла при статическом нагружении. Логарифмически нормальное распределение вероятности

Василь Чекурин, Василь Лазар, Василь Дякив

С использованием предложенного ранее теоретико-экспериментального метода установлены статистические параметры длительной прочности стекла C52-7 при статических нагрузках, постоянных температуре и влажности среды. На основе проведенных статистических испытаний нескольких серий образцов полученные количественные оценки параметров логарифмически нормального закона распределения вероятности для логарифма долговечности стекла при внешних статических нагрузках — математического ожидания и дисперсии, а также установлены эмпирические зависимости этих параметров от приложенных растягивающих напряжений. Полученные результаты могут быть использованы для создания методологии оценки долговечности тонкостенных стеклянных элементов конструкций и приборов при внешних силовых нагрузках.

Отримано 17.06.08