

## Метод дискретизації в задачах про втрату стійкості однопрольотних стрижнів зі змінними параметрами

Роман Тацій<sup>1</sup>, Тарас Ушак<sup>2</sup>

<sup>1</sup> д. ф.-м. н., проф., Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, вул. Клепарівська, 35, Львів, 79000

<sup>2</sup> ЗАТ ЖБК «Ваш дім», e-mail: tushak@vashdim.com.ua

(Представлено професором М. Сухорольським)

*У статті запропоновано новий наближений метод розв'язування задач про втрату стійкості однопрольотних стрижнів зі змінними параметрами. В його основу закладено апроксимацію коефіцієнтів відповідних диференціальних рівнянь узагальненими функціями. Отримані результати свідчать про ефективність методу під час розв'язування задач стійкості.*

**Ключові слова:** метод дискретизації, узагальнене квазидиференціальне рівняння 4-го порядку, стійкість стрижня.

**Вступ.** Для дослідження стійкості стрижнів змінної жорсткості під дією змінного навантаження використовують, зазвичай, наближені методи [1, 2]. Отримати точні розв'язки вдається, здебільшого, лише для диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Проте, у випадку кусково-неперервних розподілів параметрів моделі, інтегрування диференціальних рівнянь класичними підходами пов'язане зі значними труднощами або з появою складних фундаментальних функцій. Тому розвиток різних варіантів числово-аналітичних методів для розрахунку стрижневих систем, зокрема зі змінною жорсткістю — актуальна наукова проблема. Дослідження задач на вільні коливання рам із розподіленою та зосередженою масами проведено у працях [3-5]. У даній роботі для розв'язування задач стійкості застосовується метод дискретизації, який ґрунтується на концепції квазіпохідних для квазидиференціальних рівнянь (КДР) з узагальненими коефіцієнтами й апроксимації розв'язків відповідних їм систем лінійних диференціальних рівнянь із мірами [6].

### 1. Узагальнене квазидиференціальне рівняння 4-го порядку

На відкритому інтервалі  $I$  дійсної осі розглядаємо рівняння

$$(a_0(x)y''')'' + a_2(x)y + (a_1(x)y')' = 0, \quad (1)$$

де  $a_0^{-1}(x)$  — локально обмежена та вимірна на  $I$  функція,  $a_1(x) = b_1'(x)$ ;  $a_2(x) = b_2'(x)$ ;  $b_0(x)$ ;  $b_1(x)$ ;  $b_2(x)$  — функції локально обмеженої на  $I$  варіації (клас

$BV_{loc}^+(I)$  [7]),  $b_1'(x), b_2'(x)$  — узагальнені похідні (міри на  $I$ ) [7]. Для розв'язування рівняння (1) введемо квазіпохідні таким чином

$$y^{[0]}(x) \stackrel{def}{=} y(x); \quad y^{[1]} = y'(x); \quad y^{[2]} = a_0 y''(x); \quad y^{[3]}(x) = a_1 y'(x) + (a_0 y''(x))'. \quad (2)$$

Вихідне КДР (1) зводиться до системи рівнянь першого порядку

$$Y'(x) = C'(x)Y(x); \quad (3)$$

де

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ y^{[3]} \end{pmatrix}; \quad C'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0^{-1}(x) & 0 \\ 0 & -a_1(x) & 0 & 1 \\ -a_2(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Система (3) коректна [7], оскільки виконується необхідна та достатня умови коректності

$$(\Delta C(x))^2 = 0, \quad \forall x \in I, \quad (5)$$

де

$$\Delta C(x) = C(x) - C(x-0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta b_1(x) & 0 & 0 \\ -\Delta b_2(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

— матриця стрибків цієї системи.

Нехай  $\mathbf{B}(x, s)$  — фундаментальна матриця системи (3), структуру якої добре вивчено в [7, 8], із такими властивостями

1.  $\mathbf{B}(s, s) = \mathbf{E}$ , де  $\mathbf{E}$  — одинична матриця;
2.  $\mathbf{B}(x, s) = [\mathbf{E} + \Delta C(x)] \mathbf{B}(x-0, s)$ ; (7)
3.  $\forall x_1, x_2, x_3 \in I \quad \mathbf{B}(x_3, x_2) \mathbf{B}(x_2, x_1) = \mathbf{B}(x_3, x_1)$ .

Із допомогою цієї матриці для довільного початкового вектора  $Y_0 = Y(x_0)$   $x_0 \in I$ , розв'язок системи (3) записуємо у вигляді

$$Y(x) = \mathbf{B}(x, x_0) Y_0. \quad (8)$$

Апроксимуємо змінні коефіцієнти рівняння (1) таким чином. Розіб'ємо стрижень довжиною  $l$  на  $n$  рівних ділянок. Нехай початкова точка  $x_0 = 0$ , кінцева  $x_n = l$ , крок розбиття  $h = x_{k+1} - x_k$ , де  $k = \overline{0, n}$ .

Апроксимуємо коефіцієнт  $a_0(x)$  таким чином ( $l$ -апроксимація [6]). На кожному з проміжків  $[x_k; x_{k+1})$  величина  $a_0(x)$  є стала

$$a_0(x) \approx \frac{b_0(x_{k+1}) - b_0(x_k)}{h} = a_k, \quad x \in [x_k, x_{k+1}), \quad b_0(x) = \int_0^x a_0(t) dt. \quad (9)$$

Апроксимуємо відповідним чином [9] коефіцієнти  $a_2(x) = b_2'(x)$  та  $a_1(x) = b_1'(x)$  ( $d$ -апроксимація) на проміжку  $[x_k; x_{k+1})$

$$\begin{aligned} a_1(x) &\approx b_1'(x_k) \delta(x - x_k) \stackrel{def}{=} c_k \delta(x - x_k), \\ a_2(x) &\approx b_2'(x_k) \delta(x - x_k) \stackrel{def}{=} d_k \delta(x - x_k). \end{aligned} \quad (10)$$

Тут  $\delta(x - x_k)$  —  $\delta$ -функція Дірака з носієм у точці  $x = x_k$ .

Після апроксимації КДР (1) буде мати вигляд

$$\left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k \theta_k y_n'' \right)'' + \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} d_k \delta(x - x_k) \right\} y_n + \left[ \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta(x - x_k) \right\} y_n' \right]' = 0, \quad (11)$$

де  $\theta_k$  — характеристична функція проміжку  $[x_k; x_{k+1})$ :  $\theta_k = \begin{cases} 1, & x \in [x_k, x_{k+1}[ \\ 0, & x \notin [x_k, x_{k+1}[ \end{cases}$ .

Рівняння (11) — частковий (конкретизований) випадок КДР (1).

Якщо  $n \rightarrow \infty$ , то усі розв'язки рівняння (11) разом зі своїми квазіпохідними  $y^{[1]}$ ,  $y^{[2]}$  й  $y^{[3]}$  рівномірно прямують до відповідних розв'язків і квазіпохідних рівняння (1) [6]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n^{[i]}(x) - y(x)^{[i]}| = 0, \quad i = \overline{0,3}. \quad (12)$$

Матриця стрибків (6) для цього випадку є

$$\Delta C(x_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_k & 0 & 0 \\ -d_k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

За такого визначення коефіцієнтів  $a_0, a_1, a_2$ , фундаментальна матриця  $\mathbf{V}(x_{k+1}, x_k)$  КДР  $(a_0 y'')'' = 0$  має вигляд [8]

$$\mathbf{V}(x_{k+1}, x_k) = \begin{pmatrix} 1 & h & \frac{h^2}{2!a_k} & \frac{h^3}{3!a_k} \\ 0 & 1 & \frac{h}{a_k} & \frac{h^2}{2!a_k} \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Фундаментальну матрицю диференціальної системи (3), враховуючи власності (7), можна знайти за формулою [8]

$$\mathbf{B}(x_n, x_0) = \mathbf{B}(l, 0) = \prod_{k=0}^{n-1} [\mathbf{E} + \Delta \mathbf{C}(x_k)] \mathbf{B}(x_{k+1}, x_k). \quad (15)$$

Матрицю  $\mathbf{B}(l, 0)$  можна побудувати й іншим шляхом [10].

## 2. Класична задача про стійкість стрижня змінної жорсткості

**2.1. Апроксимація задачі про стійкість стрижня змінної жорсткості та побудова характеристичного рівняння.** Така задача зводиться до розв'язування такого КДР на проміжку  $[0, l]$

$$(\alpha y''')'' + P y'' = 0, \quad (16)$$

де  $\alpha(x) = EJ(x)$ ,  $E$  — модуль Юнга,  $J(x)$  — момент інерції в перетині  $x$  стрижня,  $P$  — повздовжнє навантаження.

До рівняння (16) додаються однорідні крайові умови (умови закріплення)

$$\mathbf{U}_s(y) = 0; \quad s = \overline{1, 4}, \quad (17)$$

які разом із рівнянням (16) утворюють задачу на власні значення.

Найменше власне значення  $p_1$  задачі (16), (17) і є критичне навантаження ( $p_1 = p_{кр}$ ), за якого стрижень втрачає стійкість (за Ейлером [2]).

Розглянемо такі умови закріплення на кінцях стрижня: 1) шарнірне:  $y = 0$  і  $y^{[2]} = 0$ ; 2) жорстке:  $y = 0$  і  $y' = 0$ ; 3) вільний край:  $y^{[2]} = 0$  і  $y^{[3]} = 0$ .

Цим трьома умовами закріплень умовно присвоїмо індекси 0, 1, 2 відповідно та розглядатимемо задачі типів  $(ij)$ ,  $i, j = \overline{0, 2}$ . Так, наприклад, задача типу (01) означає, що на лівому кінці ( $x = 0$ ) стрижень закріплений шарнірно, а на правому ( $x = l$ ) — жорстко.

Дискретизацію проведемо таким чином. Відрізок  $[0, l]$  точками  $x_0 = 0, x_1, x_2, \dots, x_n = l$  розіб'ємо на  $n$  рівних частин, довжина кожної з яких дорівнює  $l/n = h$  (крок розбиття). Замість рівняння (16) розглянемо КДР  $n$ -го наближення (метод дискретизації)

$$(a_0 y_n''')'' + Ph \left( \sum_{k=1}^n \delta(x - x_k) \cdot y_n' \right)' = 0. \quad (18)$$

Побудуємо фундаментальну матрицю  $\mathbf{B}_n(l, 0)$  методом, описаним у праці [10].

Позначимо через  $\mathbf{Y}_0$  початкову матрицю, що враховує умови закріплення в точці  $x = 0$ . Для шарнірного, жорсткого закріплення і вільного кінця відповідно

$$\mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

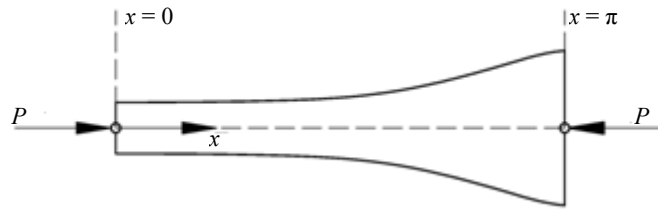


Рис. 1

Позначимо

$$\mathbf{B}(l, 0) \mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Тоді, залежно від умов закріплення на правому кінці ( $x=l$ ) отримаємо характеристичне рівняння для визначення критичного навантаження, відповідно, для шарнірного, жорсткого закріплення та для вільного кінця

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = 0; \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 0; \quad \det \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} = 0. \quad (21)$$

**2.2. Реалізація методу дискретизації в задачі про стійкість стрижня змінної жорсткості.** Розглянемо задачу про обчислення критичного навантаження для стрижня змінної жорсткості

$$\alpha(x) = EJ = \frac{1}{2 + \beta \cos(x)} \quad (22)$$

на проміжку  $[0; \pi]$  (рис. 1), яку в монографії [2] розв'язано різними наближеними методами для  $\beta = 1$  і шарнірного закріплення обох кінців. Параметр  $\beta$  характеризує зміну згинної жорсткості  $EJ(x)$ .

У табл. 1 подано величини перших трьох значень критичної сили  $P_{кр}$  для різних значень параметра  $\beta$ . Під час обчислень із кроком розбиття  $10^{-6}$  і  $0,5 \cdot 10^{-6}$  значення критичної сили  $P$  на шостому знаку після коми не змінювалося, тому зменшення кроку розбиття не має сенсу.

У табл. 2 наведено величини першої критичної сили для стрижня (рис. 1) змінної згинної жорсткості, означеної формулою (22), та  $\beta = 1$ . Незаповнені клітинки означають відсутність числових результатів у відповідній літературі.

Таблиця 1

$\beta \backslash P_i$	1	0,5	0
$P_1$	0,49003607	0,497426	0,500000
$P_2$	2,05934900	2,016210	2,000000
$P_3$	4,65445000	4,536918	4,500000

Таблиця 2

Тип	Метод обчислення				Авторський
	Метод послідовних наближень [2]	Метод Рітца [2]	Метод колокацій [2]	Метод ланцюгових дробів	
00	$0,489891 \leq P_1 \leq 0,490066$	0,49003562	0,49003562	0,490036	0,49003607
01	–	–	–	–	1,03639400
10	–	–	–	–	1,06032900
11	–	–	–	–	2,07906300
12	–	–	–	–	0,99516900
21	–	–	–	–	0,16432300

### 3. Задача про втрату стійкості стиснутого стрижня на пружній основі

Задача про знаходження критичної сили для стисненого стрижня на пружній основі (рис. 2) зводиться до розв'язування КДР 4-го порядку [2]

$$[EJ(x)y'''] + Ky = -Py'' \quad (23)$$

Крайові умови у разі шарнірного закріплення мають вигляд

$$y(a) = y(b) = 0, \quad y''(a) = y''(b) = 0 \quad (24)$$

Тут  $EJ(x)$  — змінна згинна жорсткість.

Знайдемо критичне навантаження  $P_{кр}$  для стисненого стрижня на пружній основі (коефіцієнт пружної основи  $K = 60 c$ ), шарнірно закріпленого в точках  $x = \pm 1$  (див. рис. 2), який має змінну жорсткість на згин  $EJ(x) = c(3 - x^2)$  [2], де  $c$  — параметр.

Для  $P = c\lambda$  задача (23), (24), набуде вигляду

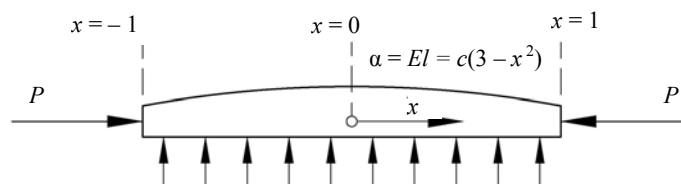


Рис. 2

$$\left[ (3-x^2)y'' \right] + 60y = -\lambda y'', \quad (25)$$

$$y(-1) = y''(-1) = y(1) = y''(1) = 0. \quad (26)$$

Апроксимація задачі для знаходження критичної сили стисненого стрижня на пружній основі та побудова характеристичного рівняння. Квазіпохідні для розв'язування рівняння (25) позначимо таким чином

$$\begin{aligned} y^{[0]}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} y(x); & y^{[1]}(x) &= y'(x); & y^{[2]}(x) &= (3-x^2)y''(x); \\ y^{[3]}(x) &= \lambda y'(x) + \left[ (3-x^2)y''(x) \right]'. \end{aligned} \quad (27)$$

Вихідне КДР (25) зводиться до системи рівнянь першого порядку

$$\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{C}'(x)\mathbf{Y}(x), \quad (28)$$

де

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ y^{[3]} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0^{-1}(x) & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -60 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

За допомогою фундаментальної матриці  $\mathbf{B}(x, x_0)$  [7, 8] для довільного початкового вектора  $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}(x_0)$ ,  $x_0 \in I$ , розв'язок системи (28) записується у вигляді (8).

Апроксимуємо змінні коефіцієнти рівняння (25).

Розіб'ємо стрижень довжиною  $l$  на  $n$  ділянок однакової довжини. Нехай початкова точка  $x_0 = -1$ , кінцева  $x_n = 1$ , крок розбиття  $h = x_{k+1} - x_k$ , де  $k = \overline{0, n}$ .

Апроксимацію коефіцієнта  $a_0(x) = 3 - x^2 = b'_0(x)$  кусково-сталими коефіцієнтами на кожному проміжку проводимо так.

$$\text{Визначимо } b_0(x) \text{ згідно формули (9): } b_0(x) = \int_0^x (3-x^2) dx = (9x - x^3)/3.$$

Знаходимо на проміжку  $[x_k, x_{k+1})$  коефіцієнт  $a_k$

$$a_k = \frac{9(x_{k+1} - x_k) - (x_{k+1}^3 - x_k^3)}{3(x_{k+1} - x_k)}.$$

Після апроксимації КДР (25) і матриця стрибків (13) будуть мати вигляд

$$\left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k \theta_k y'' \right)'' + 60 \left\{ h \sum_{k=0}^{n-1} \delta(x - x_k) \right\} y_n + \lambda \left[ \left\{ h \sum_{k=0}^{n-1} \delta(x - x_k) \right\} y'_n \right]' = 0, \quad (30)$$

$$\Delta C(x_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda h & 0 & 0 \\ -60h & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Отримавши фундаментальну матрицю  $\mathbf{V}(1, -1)$  за формулами (14), (15), врахуємо граничні умови закріплення та сформуємо характеристичне рівняння.

Початкова матриця  $\mathbf{Y}_0$ , для шарнірного закріплення в точці  $x = -1$  має

$$\text{вигляд } \mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Позначимо } \mathbf{V}(x_n, x_0) \mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

У випадку шарнірного закріплення в точці ( $x = 1$ ) отримаємо таке характеристичне рівняння

$$|\mathbf{A}(\lambda)| = \det \begin{pmatrix} a_{12}(\lambda) & a_{14}(\lambda) \\ a_{32}(\lambda) & a_{34}(\lambda) \end{pmatrix} = 0. \quad (32)$$

Розв'язуючи рівняння (32), отримуємо значення параметра  $\lambda$  критичної сили. Під час обчислень із кроком розбиття  $10^{-6}$  і  $0,5 \cdot 10^{-6}$  значення параметра  $\lambda$  на шостому знаку після коми не змінювалося, тому зменшувати кроки розбиття недоцільно.

У табл. 3 подано результати розрахунку перших трьох критичних сил  $\lambda_i$  для стрижня змінного перерізу на пружній основі. Результати отримані за різних значень коефіцієнта пружної основи  $K$  та  $n = 10^6$ .

Табл. 4 містить порівняльні результати першої критичної сили стрижня для  $K = 60$  і різних типів закріплення стрижня. Незаповнені клітинки означають відсутність числових результатів у відповідній літературі.

Таблиця 3

$\lambda_i \backslash K$	20	40	60	80	100
$\lambda_1$	15,155414	23,255463	31,352864	34,734330	36,756698
$\lambda_2$	28,666269	30,689107	32,711797	39,445176	47,525654
$\lambda_3$	60,124234	61,027563	61,933504	62,844496	63,767286

Таблиця 4

Тип	Теорема включення [2]	Метод Коха [2]	Авторський
00	$31,07 \leq \lambda_1 \leq 32,00$	$31,35096 \leq \lambda_1 \leq 31,35485$	31,352864
01	–	–	32,001283
10	–	–	32,001283
11	–	–	43,958269
12	–	–	13,390518
21	–	–	13,390518



#### 4. Метод дискретизації в задачі про стійкість плоскої форми згину стрижня

Для ілюстрації методу дискретизації розглянемо задачу про втрату плоскої форми згину [2]. Задача зводиться до розв'язування КДР

$$y^{IV} - \lambda \left[ (-x^2 y')' + 2y \right] = 0 \quad (33)$$

із такими крайовими умовами

$$y(0) = y'''(0) = y(1) = y'(1) = 0. \quad (34)$$

Квазіпохідні для рівняння (33) позначимо таким чином

$$\begin{aligned} y^{[0]}(x) &\stackrel{def}{=} y(x); & y^{[1]}(x) &= y'(x); & y^{[2]}(x) &= y''(x); \\ y^{[3]}(x) &= \lambda x^2 y'(x) + y'''(x), \end{aligned} \quad (35)$$

Вихідне КДР (35) зводиться до системи рівнянь першого порядку

$$\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{C}'(x)\mathbf{Y}(x), \quad (36)$$

де

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ y^{[3]} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x^2 \lambda & 0 & 1 \\ 2\lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

За допомогою фундаментальної матриці  $\mathbf{V}(x, x_0)$  [7, 8] для довільного початкового вектора  $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}(x_0)$ ,  $x_0 \in I$ , розв'язок системи (36) має вигляд (8).

Апроксимуємо згідно формули (10) коефіцієнт  $a_1(x) = x^2 = b_1'(x)$ . Знаходимо

$$b_1(x): b_1(x) = \int_0^x t^2 dt = x^3/3.$$

На проміжку  $[x_k, x_{k+1})$  позначимо  $c_k = b_1(x_k) = (x_{k+1}^3 - x_k^3)/3$ . Після апроксимації КДР (33) буде мати вигляд

$$y_n^{IV} - 2\lambda \left\{ h \sum_{k=0}^{n-1} \delta(x - x_k) \right\} y_n + \lambda \left[ \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta(x - x_k) \right\} y_n' \right]' = 0. \quad (38)$$

Матриця стрибків (13) для цього випадку

$$\Delta \mathbf{C}(x_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda c_k & 0 & 0 \\ 2\lambda h & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Фундаментальна матриця  $\mathbf{B}(x_{k+1}, x_k)$  КДР  $(a_0 y^n)'' = 0$  має вигляд [8]

$$\mathbf{B}(x_{k+1}, x_k) = \begin{pmatrix} 1 & h & \frac{h^2}{2} & \frac{h^3}{3!} \\ 0 & 1 & h & \frac{h^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Фундаментальну матрицю системи диференціальних рівнянь (36) можна знайти за формулою (15).

Враховуючи умови закріплення в точці  $x = 0$ , початкова матриця  $\mathbf{Y}_0$  має вигляд  $\mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Позначимо  $\mathbf{B}_n(x_n, x_0)\mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$ .

У випадку шарнірного закріплення в точці  $x = 1$  одержуємо таке характеристичне рівняння

$$|\mathbf{A}(\lambda)| = \det \begin{pmatrix} a_{12}(\lambda) & a_{13}(\lambda) \\ a_{22}(\lambda) & a_{23}(\lambda) \end{pmatrix} = 0.$$

звідки отримуємо  $\lambda_1 = 26,415715$ .

**Висновки.** Запропоновано новий наближений метод обчислення критичного навантаження для стрижнів зі змінними параметрами, в основу якого закладено апроксимацію коефіцієнтів відповідних диференціальних рівнянь узагальненими функціями. Метод характеризується простотою й універсальністю алгоритму та швидкістю збіжності. Отримані при цьому числові результати для відповідних значень параметрів співпадають із відомими у літературі.

### Література

- [1] *Вольмир, А. С.* Устойчивость деформируемых систем. / *А. С. Вольмир.* — 2-е изд. — Москва: Наука, 1967. — 984 с.
- [2] *Коллатц, Л.* Задачи на собственные значения с техническими приложениями / *Л. Коллатц;* пер. с нем. — Москва: Наука, 1968. — 503 с.
- [3] *Давидчак, О. Р.* Розв'язок задач динаміки і стійкості стержневих систем з дискретно-неперервним розподілом параметрів / *О. Р. Давидчак, Р. М. Тацій* // ZESZYTY NAUKOWE Politechniki Rzeszowskiej. Budownictwo i inzynieria srodowiska. — Rzeszow, 2004. — Z. 37. — С. 57-60.
- [4] *Давидчак, О. Р.* Розв'язок задач динаміки дискретно-неперервних стержневих систем методом граничних елементів із апроксимацією коефіцієнтів диференціальних рівнянь / *О. Р. Давидчак, Р. М. Тацій, Т. І. Ушак* // Вісник НУ «Львівська політехніка». Сер. Теорія та практика будівництва. — 2004. — С. 62-64.

- [5] Тацій, Р. М. Метод дискретизації в задачах про вільні коливання стрижневих систем із дискретно-неперервним розподілом параметрів / Р. М. Тацій, Т. І. Ушак // Будівництво України. — 2008. — № 4. — С.39-44.
- [6] Тацій, Р. М. Про апроксимацію розв'язків диференціальних рівнянь з мірами / Р. М. Тацій, В. В. Луцк, В. В. Кісілевич // Вісн. Київ. ун-ту. Математика і механіка. — Київ: Либідь, 1990. — № 32. — С. 128-131.
- [7] Тацій, Р. М. Узагальнені квазидиференціальні рівняння / Р. М. Тацій. — (Препр. / АН України ІППММ; 1994. — № 2-94. — С. 1-54).
- [8] Тацій, Р. М. Про структуру фундаментальної матриці квазидиференціального рівняння / Р. М. Тацій, Б. Б. Пахолок // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1989. — № 4. — С. 25-28.
- [9] Аткинсон, Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф. Аткинсон; пер. с англ. — Москва, 1968. — 749 с.
- [10] Тацій, Р. М. Метод дискретизації в задачах стійкості стрижнів змінної жорсткості / Р. М. Тацій, Т. І. Ушак // Вісник НУ «Львівська політехніка». Теорія та практика будівництва. — 2005. — № 545. — С. 178-181.

## **Method of digitization in problems of resistance loss of single-span rods with variable parameters**

Roman Tatsii, Taras Ushak

*The new approximate method of solving the problems on resistance loss of single-span rods with variable parameters has been presented. The method is based on the approximation of coefficients of the corresponding differential equations with generalized functions. The obtained results illustrate the method efficiency when solving the resistance problems. New results unknown in specialized literature before were obtained.*

## **Метод дискретизації в задачах о потере устойчивости однопролётных стержней с переменными параметрами**

Роман Тацій, Тарас Ушак

*В статье предлагается новый приближенный метод решения задач о потере устойчивости однопролётных стержней с переменными параметрами. В основе метода лежит аппроксимация коэффициентов соответствующих дифференциальных уравнений обобщенными функциями. Полученные результаты свидетельствуют об эффективности метода в задачах устойчивости. Получено новые результаты, неизвестные в специализированной литературе.*

Отримано 19.02.09