

Поперечні коливання циліндричної ортотропної панелі з круговим масивним включенням

Тетяна Шопа

Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: tetyana.sh@gmail.com

(Представлено професором О. Гачкевичем)

Розглядаємо задачу про власні коливання циліндричної шарнірно опертої ортотропної панелі з круговим масивним включенням. Напружено-деформований стан панелі описуємо модифікованими рівняннями теорії оболонок Тимошенка. Числовий розв'язок задачі будемо непрямым методом граничних інтегральних рівнянь, який ґрунтується на послідовнісному зображенні сингулярних розв'язків. Досліджено вплив маси включення на власні частоти панелі.

Ключові слова: циліндрична ортотропна панель, масивне включення, модель Тимошенка, метод граничних інтегральних рівнянь, послідовнісний підхід, узагальнений метод Фур'є, дельтоподібні функції.

Вступ. Коливання суцільних анізотропних і багатошарових тонкостінних елементів конструкцій широко досліджено в літературі, зокрема, у роботах [1-5], у яких для вивчення власних і вимушених коливань цих елементів застосовано метод скінченних елементів. У праці [6] проаналізовано вплив розтягу композитних оболонок на власні частоти поперечних коливань із використанням рівнянь руху типу Доннела та методу Гальоркіна. На основі рівнянь руху класичної теорії Лява у роботі [7] для визначення частот власних коливань ламінованих оболонок використано загальний метод квадратур. Праця [8, 9] узагальнює попередні результати щодо вивчення поширення хвиль у ламінованих оболонках із перехресними шарами. Нелінійні деформації нескінченної циліндричної композитної оболонки досліджено у праці [10]. Метод колокацій із використанням сплайн-функцій використано в роботі [11] для розрахунку власних коливань циліндричної композитної оболонки. Для відшукування власних коливань некругових композитних циліндричних оболонок у [12] застосовано метод еквівалентних кривин.

У роботах [13-16] у рамках класичної теорії розглядали коливання композитних оболонок, ламінованих оболонок і пластин із прямокутним і круговим отворами.

У пропонованій роботі у межах рівнянь теорії оболонок Тимошенка розглядаємо коливання циліндричної панелі з круговим масивним абсолютно жорстким включенням. Використовуючи метод Фур'є і підхід до побудови узагальнених функцій, запропонований у роботі [18], відповідну крайову задачу зведено до системи інтегральних рівнянь, які розв'язуємо методом колокацій.

1. Постановка задачі та ключові рівняння

Розглянемо усталений режим коливань циліндричної ортотропної панелі з жорстко приєднаним круговим масивним абсолютно жорстким включенням маси m_0 і радіуса R_0 . Панель має скінченну довжину l_1 , радіус кривини R , а її зовнішні краї шарнірно оперті. Циліндричну систему координат вибрано так, що вісь α_1 напрямлено вздовж осі панелі, а колова координата $\alpha_2 = R\varphi$, де φ — центральний кут.

По осі симетрії включення вздовж нормалі до поверхні панелі діє сила $P = P_0 \sin(\theta_0 t)$, яка змінюється за гармонічним законом із частотою θ_0 та амплітудою P_0 .

Граничні умови на краях панелі $\alpha_1 = 0, \alpha_1 = l_1, \alpha_2 = 0, \alpha_2 = k\pi$, що відповідають шарнірному опираю, такі

$$w = 0, \quad M_n = 0, \quad N_n = 0, \quad u_\tau = 0, \quad \gamma_\tau = 0, \quad (1)$$

де $u_\tau, \gamma_\tau, w, M_n, N_n$ — дотичні компоненти осьового переміщення, кута повороту та прогин, нормальні компоненти моменту й осьової сили.

Крайові умови на контурі L , що відповідають жорсткому контакту панелі та включення, такі

$$u_n = 0, \quad \gamma_n = 0, \quad w = w_0 \sin(\theta_0 t). \quad (2)$$

Тут $n = \{n_1(\xi), n_2(\xi)\}$ — одиничний нормальний вектор до лінії L ; w_0 — амплітуда переміщення включення; u_n, γ_n — нормальні компоненти осьового переміщення та кута повороту.

Рівняння руху масивного включення має вигляд

$$m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P - \int_L p(\xi, t) d(\xi), \quad (3)$$

де $p(\xi, t)$ — сили взаємодії панелі та включення.

Якщо у рівняннях теорії оболонок Тимошенка знехтувати поворотами навколо нормалі до серединної поверхні, то можна ввести потенціали осьових переміщень і кутів повороту [18]

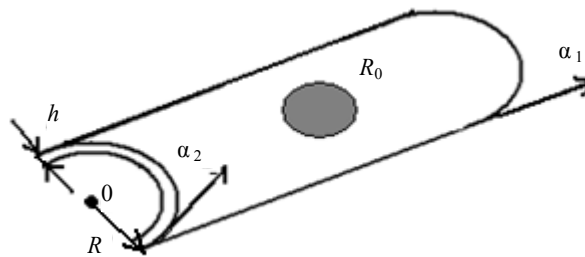


Рис. 1

$$u_i = -\frac{\partial u}{\partial \alpha_i}; \quad \gamma_i = -\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_i} \quad (i=1,2); \quad u = u(\alpha_1, \alpha_2); \quad \gamma = \gamma(\alpha_1, \alpha_2).$$

Для ортотропного матеріалу, ґрунтуючись на співвідношеннях теорії оболонок Тимошенка, рівняння руху набувають вигляду

$$\begin{aligned} L_{11}(u) + L_{12}(w) + L_{13}(\gamma) &= \frac{\partial q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial q_2}{\partial \alpha_2}, \\ L_{31}(u) + L_{32}(w) + L_{33}(\gamma) &= \frac{\partial m_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial m_2}{\partial \alpha_2}, \\ L_{21}(u) + L_{22}(w) + L_{23}(\gamma) - \frac{2h\rho}{B} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= q_3, \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} L_{11} &= \Delta^{1B} - \Delta^{(3)}; \quad L_{22} = -\Delta^{(5)} + k_0 - 2h\rho\theta_0^2; \quad L_{33} = \Delta^{1D} - \Delta^{(5)}; \\ L_{12} = L_{21} &= -\Delta^{(2)} - \Delta^{(4)}; \quad L_{13} = L_{31} = \Delta^{(4)}; \quad L_{32} = L_{23} = \Delta^{(5)}; \\ \Delta^{1B} &= B_1 \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} + (B_1\nu_{12} + 4B_{12} + B_2\nu_{21}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + B_2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha_2^4}; \\ \Delta^{1D} &= D_1 \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} + (D_1\nu_{12} + 4D_{12} + D_2\nu_{21}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + D_2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha_2^4}; \\ \Delta^{(2)} &= (B_1k_1 + B_2\nu_{12}k_2) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + (B_2k_2 + B_1\nu_{21}k_1) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}; \\ \Delta^{(3)} &= \Lambda_1 k_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \Lambda_2 k_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}; \quad \Delta^{(4)} = \Lambda_1 k_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \Lambda_2 k_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}; \\ \Delta^{(5)} &= \Lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \Lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}; \\ k_0 &= k_1 B_1 (k_1 + \nu_{12} k_2) + k_2 B_2 (k_2 + \nu_{21} k_1); \\ D_i &= \frac{2h^3 E_i}{3(1 - \nu_{12}\nu_{21})}; \quad D_{12} = \frac{2h^3 G_{12}}{3}; \quad \Lambda_i = 2hG_{i3}; \end{aligned}$$

$B_i = \frac{2hE_i}{1 - \nu_{12}\nu_{12}}$; $B_{12} = 2hG_{13}$; ν_{12} ; ν_{21} — характеристики матеріалу панелі; $k_1 = 0$, $k_2 = 1/R$ — кривини поверхні; $2h$ — товщина панелі, а R — радіус її серединної поверхні; ρ — густина матеріалу; u_1 , u_2 , w , γ_1 , γ_2 — компоненти вектора переміщення, прогин і кути повороту нормалі до серединної поверхні; q_i , m_i — зовнішнє навантаження. Відзначимо, що у рівняннях (4) з огляду на характер зовнішньої дії враховано інерційний складник лише у напрямку нормалі до серединної поверхні.

Нормальні та дотичні компоненти переміщень і зусиль уздовж деякої гладкої кривої C з одиничним нормальним $\{n_1(\alpha_1, \alpha_2); n_2(\alpha_1, \alpha_2)\}$ і тангенціальним $\{\tau_1(\alpha_1, \alpha_2); \tau_2(\alpha_1, \alpha_2)\}$ векторами визначаються за формулами

$$\begin{aligned} u_n &= -\left(n_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + n_2 \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} \right), & u_\tau &= -\left(\tau_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \tau_2 \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} \right), \\ \gamma_n &= -\left(n_1 \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_1} + n_2 \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_2} \right), & \gamma_\tau &= -\left(\tau_1 \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_1} + \tau_2 \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_2} \right), \\ M_n &= M_{11}n_1^2 + 2M_{12}n_1n_2 + M_{22}n_2^2, & N_n &= N_{11}n_1^2 + 2N_{12}n_1n_2 + N_{22}n_2^2, \\ Q_n &= Q_1n_1 + Q_2n_2, \end{aligned}$$

де Q_i, M_{ij}, N_{ij} — внутрішні зусилля в панелі.

Таким чином, для визначення невідомих функцій u, w, γ й амплітуди w_0 маємо систему рівнянь (3), (4), граничні та контактні умови (1), (2).

2. Побудова функції Гріна системи

Для побудови фундаментального розв'язку системи (4) приймаємо, що зовнішнє навантаження у правих частинах цих рівнянь має вигляд [18]

$$\begin{aligned} q_i &= T_1^r n_i^r \delta_{\varepsilon 1}(\alpha_1, \alpha_1^r) \delta_{\varepsilon 2}(\alpha_2, \alpha_2^r) \sin(\theta_0 t) \quad (i = 1, 2), \\ m_i &= T_3^r n_i^r \delta_{\varepsilon 1}(\alpha_1, \alpha_1^r) \delta_{\varepsilon 2}(\alpha_2, \alpha_2^r) \sin(\theta_0 t) \quad (i = 1, 2), \\ q_3 &= T_2^r \delta_{\varepsilon 1}(\alpha_1, \alpha_1^r) \delta_{\varepsilon 2}(\alpha_2, \alpha_2^r) \sin(\theta_0 t), \end{aligned} \quad (5)$$

де індекс r відповідає значенням відповідних величин у точці $\alpha^r(\alpha_1^r, \alpha_2^r)$.

$$\delta_{\varepsilon i}(\xi, \xi^r) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} g\left(\frac{|\xi - \xi^r|}{\varepsilon}\right), & |\xi - \xi^r| \leq \varepsilon, \\ 0, & |\xi - \xi^r| > \varepsilon, \end{cases}$$

$g(\xi)$ ($0 \leq \xi \leq 1$) — дельтоподібна функція (спадна гладка функція; $g(1) = 0$; $\int_0^1 g(\xi) d\xi = 1$), ε — довжина відрізка локалізації дельтоподібної функції.

Функцію Гріна системи рівнянь (1) шукаємо у вигляді

$$\begin{Bmatrix} u(\alpha) \\ \gamma(\alpha) \\ w(\alpha) \end{Bmatrix} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{Bmatrix} u(\alpha, \varepsilon) \\ \gamma(\alpha, \varepsilon) \\ w(\alpha, \varepsilon) \end{Bmatrix} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_{km}^\varepsilon(\alpha^r) \\ \gamma_{km}^\varepsilon(\alpha^r) \\ w_{km}^\varepsilon(\alpha^r) \end{Bmatrix} \Phi_{km}(\alpha) \sin(\theta_0 t), \quad (6)$$

де $\Phi_{km}(\alpha) = \sin(\lambda_{1k}\alpha_1)\sin(\lambda_{2m}\alpha_2)$, $\lambda_{1k} = k\pi/l$ або $\lambda_{2m} = m/R$.

Формули (6) задовольняють умови (1) шарнірного опирання на краях панелі.

Подано дельтоподібні функції у формулах (5) таким чином [17, 18]

$$\delta_\varepsilon(\xi, \xi^r) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\lambda_k \varepsilon) \sin(\lambda_k \xi^r) \sin(\lambda_k \xi)$$

або

$$\delta_\varepsilon(\xi, \xi^r) = \frac{2}{l} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\lambda_k \varepsilon) \cos(\lambda_k \xi^r) \cos(\lambda_k \xi) \right],$$

де $\varphi(\lambda_k, \varepsilon) = \int_0^1 g(s) \cos(\lambda_k \varepsilon s) ds$, λ_k дорівнює λ_{1k} або λ_{2m} .

Із формул (5), (6) і рівнянь (4) одержимо систему алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладу ключових функцій, розв'язок якої має вигляд

$$\begin{Bmatrix} u_{km}^\varepsilon(\alpha^r) \\ w_{km}^\varepsilon(\alpha^r) \\ \gamma_{km}^\varepsilon(\alpha^r) \end{Bmatrix} = C_{km}(\varepsilon) [\mathbf{U}_{km}] [\mathbf{\Omega}_{km}(\alpha^r)] \{ \mathbf{T}^r \}, \quad (7)$$

$$[\mathbf{\Omega}_{km}(\alpha^r)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{km}(\alpha^r)}{\partial n} & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{km}(\alpha^r) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Phi_{km}(\alpha^r)}{\partial n} \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{U}_{km}] = \begin{bmatrix} u_{1km} & u_{2km} & u_{3km} \\ w_{1km} & w_{2km} & w_{3km} \\ \gamma_{1km} & \gamma_{2km} & \gamma_{3km} \end{bmatrix}, \quad \{ \mathbf{T}^r \} = \begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{Bmatrix}, \quad C_{km}(\varepsilon) = \frac{4}{l_1 l_2} \varphi(\lambda_{1k} \varepsilon) \varphi(\lambda_{2m} \varepsilon),$$

$$L_{11}^{km} = \Delta_{km}^{1B} - \Delta_{km}^3; \quad L_{22}^{km} = -\Delta_{km}^{(5)} + k_0 + 2h\rho\theta_0^2; \quad L_{km}^{33} = \Delta_{km}^{1D} - \Delta_{km}^{(5)};$$

$$L_{km}^{12} = L_{km}^{21} = -\Delta_{km}^{(2)} - \Delta_{km}^{(4)}; \quad L_{km}^{13} = L_{km}^{31} = \Delta_{km}^{(4)}; \quad L_{km}^{23} = L_{km}^{32} = \Delta_{km}^{(5)};$$

$$\Delta_{km}^{1B} = B_1 \lambda_{1k}^4 + (B_1 \nu_{12} + 4B_{12} + B_2 \nu_{21}) \lambda_{1k}^2 \lambda_{2m}^2 + B_2 \lambda_{2m}^4;$$

$$\Delta_{km}^{1D} = D_1 \lambda_{1k}^4 + (D_1 \nu_{12} + 4D_{12} + D_2 \nu_{21}) \lambda_{1k}^2 \lambda_{2m}^2 + D_2 \lambda_{2m}^4;$$

$$\Delta_{km}^{(2)} = -(B_1 k_1 + B_2 \nu_{12} k_2) \lambda_{1k}^2 - (B_2 k_2 + B_1 \nu_{21} k_1) \lambda_{2m}^2;$$

$$\Delta_{km}^{(3)} = -\Lambda_1 k_1^2 \lambda_{1k}^2 - \Lambda_2 k_2^2 \lambda_{2m}^2; \quad \Delta_{km}^{(4)} = -\Lambda_1 k_1 \lambda_{1k}^2 - \Lambda_2 k_2 \lambda_{2m}^2;$$

$$\begin{aligned} \Delta_{km}^{(5)} &= -\Lambda_1 \lambda_{1k}^2 - \Lambda_2 \lambda_{2m}^2; & \Delta_{km} &= -\lambda_{1k}^2 - \lambda_{2m}^2; \\ k_0 &= k_1 B_1 (k_1 + \nu_{12} k_2) + k_2 B_2 (k_2 + \nu_{21} k_1); \\ u_{1km} &= (L_{22}^{km} L_{33}^{km} - L_{23}^{km} L_{32}^{km}) / \Omega_0; & u_{2km} &= (L_{32}^{km} L_{13}^{km} - L_{12}^{km} L_{33}^{km}) / \Omega_0; \\ u_{3km} &= (L_{12}^{km} L_{23}^{km} - L_{13}^{km} L_{22}^{km}) / \Omega_0; & w_{1km} &= (L_{23}^{km} L_{31}^{km} - L_{21}^{km} L_{33}^{km}) / \Omega_0; \\ w_{2km} &= (L_{11}^{km} L_{33}^{km} - L_{13}^{km} L_{31}^{km}) / \Omega_0; & w_{3km} &= (L_{21}^{km} L_{13}^{km} - L_{11}^{km} L_{23}^{km}) / \Omega_0; \\ \gamma_{1km} &= (L_{21}^{km} L_{32}^{km} - L_{22}^{km} L_{31}^{km}) / \Omega_0; & \gamma_{2km} &= (L_{11}^{km} L_{22}^{km} - L_{12}^{km} L_{21}^{km}) / \Omega_0; \\ \gamma_{3km} &= (L_{13}^{km} L_{31}^{km} - L_{11}^{km} L_{32}^{km}) / \Omega_0, & \Omega_0 &= \det \|L_{ij}\|. \end{aligned}$$

Подвійні ряди у розв'язку (7) рівномірно збіжні для $\varepsilon \neq 0$ і тому можна зробити граничний перехід: $\varepsilon \rightarrow 0$. Із співвідношень (7) за граничного переходу $\varepsilon \rightarrow 0$ отримуємо функції Гріна крайової задачі (1)-(4).

3. Інтегральне подання розв'язку. Метод колокацій

Узагальнений розв'язок задачі (1), (4) подамо у вигляді інтегральних згорток фіктивних зусиль і моментів $T_1(\xi) \sin(\theta_0 t)$, $T_2(\xi) \sin(\theta_0 t)$, $T_3(\xi) \sin(\theta_0 t)$ та функції Гріна

$$\begin{aligned} w(\alpha, t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k,m=1}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) \left[w_{1km} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_1(\xi) + w_{2km} \Phi_{km}(\xi) T_2(\xi) + \right. \\ &+ \left. w_{3km} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_3(\xi) \right] \Phi_{km}(\alpha) dl(\xi) \sin(\theta_0 t), \\ u(\alpha, t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k,m=1}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) \left[u_{1km} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_1(\xi) + u_{2km} \Phi_{km}(\xi) T_2(\xi) + \right. \\ &+ \left. u_{3km} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_3(\xi) \right] \Phi_{km}(\alpha) dl(\xi) \sin(\theta_0 t), \\ \gamma(\alpha, t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k,m=1}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) \left[\gamma_{1km} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_1(\xi) + \gamma_{2km} \Phi_{km}(\xi) T_2(\xi) + \right. \\ &+ \left. \gamma_{3km} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_3(\xi) \right] \Phi_{km}(\alpha) dl(\xi) \sin(\theta_0 t). \end{aligned}$$

Звідси, врахувавши крайові умови (2), після граничного переходу при $\alpha \rightarrow \alpha_0$, $\alpha_0 \in L$, прийдемо до системи трьох інтегральних рівнянь та одного інтегрального співвідношення

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k,m=1}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) \left[w_{1km} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_1(\xi) + w_{2km} \Phi_{km}(\xi) T_2(\xi) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + w_{3km} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_3(\xi) \Big] \Phi_{km}(\alpha) dl(\xi) = w_0, \\
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k,m=1}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) \left[u_{1km} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_1(\xi) + u_{2km} \Phi_{km}(\xi) T_2(\xi) + \right. \\
& \left. + u_{3km} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_3(\xi) \right] \frac{\partial \Phi_{km}(\alpha)}{\partial n} dl(\xi) = 0, \\
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k,m=1}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) \left[\gamma_{1km} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_1(\xi) + \gamma_{2km} \Phi_{km}(\xi) T_2(\xi) + \right. \\
& \left. + \gamma_{3km} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_3(\xi) \right] \frac{\partial \Phi_{km}(\alpha)}{\partial n} dl(\xi) = 0, \\
& m_0 \theta_0^2 w_0 = P_0 - \int_L Q_n(\xi) d(\xi). \tag{8}
\end{aligned}$$

Тут

$$\frac{\partial \Phi_{km}(\alpha)}{\partial n} = n_1 \Phi_{1km}(\alpha) + n_2 \Phi_{2km}(\alpha), \quad \Phi_{ikm}(\alpha) = \frac{\partial \Phi_{km}(\alpha)}{\partial \alpha_i} \quad (i=1,2).$$

Наближений розв'язок системи рівнянь (8) шукаємо методом колокацій. Лінію L наближаємо ламаною лінією L^* , складеною з прямолінійних відрізків L^r , $r = \overline{1, N}$, уздовж кожного з яких невідомі густини набувають значень $T_i(\xi) = T_i^r \delta_\varepsilon(\xi, \xi^r)$ ($i = \overline{1, 3}$). Відрізок L^r задаємо довжиною $2l^r$, середньою точкою ξ^r (ξ_1^r, ξ_2^r) і напрямним одиничним вектором $\{\tau_1^r, \tau_2^r\} = \{\tau_1(\xi^r), \tau_2(\xi^r)\}$. Границі за $\varepsilon \rightarrow 0$ сум тригонометричних рядів у (8) наближаємо відповідними частковими сумами порядку K за достатньо малого $\varepsilon \neq 0$.

Обчисливши інтеграли в системі рівнянь (8) з урахуванням зроблених припущень і наблизивши нев'язку розв'язку в контрольних точках α^q ($\alpha_1^q; \alpha_2^q$), $q = \overline{1, N}$ до нуля, зведемо (8) до такої системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=1}^N \begin{bmatrix} u_1^r(\alpha^q, \varepsilon) & u_2^r(\alpha^q, \varepsilon) & u_3^r(\alpha^q, \varepsilon) \\ \gamma_1^r(\alpha^q, \varepsilon) & \gamma_2^r(\alpha^q, \varepsilon) & \gamma_3^r(\alpha^q, \varepsilon) \\ w_1^r(\alpha^q, \varepsilon) & w_2^r(\alpha^q, \varepsilon) & w_3^r(\alpha^q, \varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_0 \end{bmatrix}, \quad q = \overline{1, N}, \\
& \sum_{s=1}^3 \sum_{r=1}^N Q_{ns}^r T_s^r = \theta_0^2 m_0 w_0 + P_0. \tag{9}
\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
 u_i^r(\alpha^q, \varepsilon) &= C_{km}(\varepsilon) u_{ikm} \frac{\partial \Phi(\alpha^r)}{\partial n} \frac{\partial \Phi(\alpha^q)}{\partial n}, \quad u_2^r(\alpha^q, \varepsilon) = C_{km}(\varepsilon) u_{2km} \Phi(\alpha^r) \frac{\partial \Phi(\alpha^q)}{\partial n}, \\
 \gamma_i^r(\alpha^q, \varepsilon) &= C_{km}(\varepsilon) \gamma_{ikm} \frac{\partial \Phi(\alpha^r)}{\partial n} \frac{\partial \Phi(\alpha^q)}{\partial n}, \quad \gamma_2^r(\alpha^q, \varepsilon) = C_{km}(\varepsilon) \gamma_{2km} \Phi(\alpha^r) \frac{\partial \Phi(\alpha^q)}{\partial n}, \\
 w_i^r(\alpha^q, \varepsilon) &= C_{km}(\varepsilon) w_{ikm} \frac{\partial \Phi(\alpha^r)}{\partial n} \Phi(\alpha^q), \quad w_2^r(\alpha^q, \varepsilon) = C_{km}(\varepsilon) w_{2km} \Phi(\alpha^r) \Phi(\alpha^q), \\
 Q_i^r(\alpha^q, \varepsilon) &= C_{km}(\varepsilon) Q_{ikm}(\alpha^q) \frac{\partial \Phi(\alpha^r)}{\partial n}, \quad Q_2^r(\alpha^q, \varepsilon) = C_{km}(\varepsilon) Q_{2km}(\alpha^q) \Phi(\alpha^r), \\
 Q_{ikm}(\alpha) &= \left[\Lambda_1 (-\gamma_{ikm} + w_{ikm} + k_1 u_{ikm}) n_1 \lambda_{1k} \Phi_{1km}(\alpha) + \right. \\
 &\left. + \Lambda_2 (-\gamma_{ikm} + w_{ikm} + k_2 u_{ikm}) n_2 \lambda_{2m} \Phi_{2km}(\alpha) \right] \quad (i = \overline{1,3}).
 \end{aligned}$$

Дискретні аналоги нормальних до кривої L компонент переміщень і зусиль одержимо у вигляді

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{l} w(\alpha) \\ \gamma_n(\alpha) \\ u_n(\alpha) \end{array} \right\} &= \sum_{r=1}^N \left[\begin{array}{ccc} w_1^r(\alpha, \varepsilon) & w_2^r(\alpha, \varepsilon) & w_3^r(\alpha, \varepsilon) \\ \gamma_1^r(\alpha, \varepsilon) & \gamma_2^r(\alpha, \varepsilon) & \gamma_3^r(\alpha, \varepsilon) \\ u_1^r(\alpha, \varepsilon) & u_2^r(\alpha, \varepsilon) & u_3^r(\alpha, \varepsilon) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{array} \right\} \sin(\theta_0 t), \\
 \left\{ \begin{array}{l} Q_n(\alpha) \\ M_n(\alpha) \\ N_n(\alpha) \end{array} \right\} &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{array} \right\} + \sum_{r=1}^N \left[\begin{array}{ccc} Q_1^r(\alpha, \varepsilon) & Q_2^r(\alpha, \varepsilon) & Q_3^r(\alpha, \varepsilon) \\ M_1^r(\alpha, \varepsilon) & M_2^r(\alpha, \varepsilon) & M_3^r(\alpha, \varepsilon) \\ N_1^r(\alpha, \varepsilon) & N_2^r(\alpha, \varepsilon) & N_3^r(\alpha, \varepsilon) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{array} \right\} \sin(\theta_0 t). \quad (10)
 \end{aligned}$$

Таким чином, знайшовши з системи (9) значення параметрів T_i^k та підставивши їх у формули (10), визначимо напружено-деформований стан оболонки. Частоти власних коливань оболонки знаходимо з умови рівності нулю визначника системи рівнянь (9).

4. Числовий приклад

Числові дані отримані для випадку трансверсальної ізотропії за таких значень відносних параметрів $\nu_{12} = 0,3$; $l = 1$ м; $R/l = 1/\pi$; $R_0/R = 0,1$; $\varepsilon/l = 0,005$; $N = 20$; $K = 400$; $E_1/E = 1$; $E = 10^{11}$ Па; $G_{13}/G_{12} = 5$.

Криві на рис. 2 ілюструють залежність приведених частот $\bar{\theta} = \theta_0 \sqrt{2h\rho/D_1}$ власних коливань панелі від відношення маси включення до маси елемента панелі радіуса R_0 , яке позначено \bar{m} . Криві 1, 2, 3 відповідають значенням приведеної товщини оболонки $h/l = 0,0125$; $0,025$; $0,05$ відповідно.

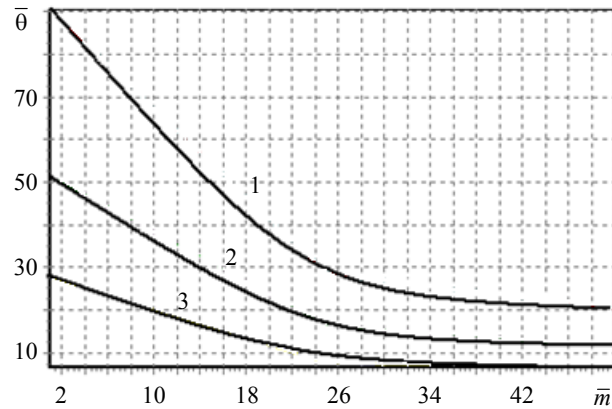


Рис. 2. Власні частоти коливань панелі

Висновки. Показано, що зі збільшенням густини включення основна частота власних коливань зменшується. Збільшення товщини панелі призводить до збільшення частоти власних коливань. За наявності включення частота є менша, ніж частота для суцільної панелі без включення. У випадку наближення густини включення до густини матеріалу панелі власна частота прямує до власної частоти суцільної панелі, що підтверджує правильність обчислень і добру збіжність методу. Таку якісну залежність частоти власних коливань від маси включення отримано також у роботі [17, 18].

Література

- [1] *Lakshminarayana, H.* Free vibration characteristics of cylindrical shells made of composite materials / *H. Lakshminarayana, V. Dwarakanath* // *J. of Sound and Vibration*. — 1992. — Vol. 154. — P. 431-439.
- [2] *Ramesh, T. C.* A finite element based on a discrete layer theory for the free vibration analysis of cylindrical shells / *T. C. Ramesh, N. Genesan* // *Computer Structures*. — 1992. — Vol. 43. — P. 137-143.
- [3] *Sun, G.* An investigation of fundamental frequencies of laminated circular cylinders given by shear deformable finite elements / *G. Sun, P. N. Benne, F. W. Williams* // *J. of Sound and Vibration*. — 1997. — Vol. 205. — P. 265-273.
- [4] *Григоренко, Я. М.* Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей / *Я. М. Григоренко, Г. Г. Влайков, А. Я. Григоренко*. — Киев: НАН України. Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенко. Техн. центр Академперіодика, 2006. — 472 с.
- [5] *Hufenbach, W.* Vibration and damping behavior of multi-layered composite cylindrical shells / *W. Hufenbach, C. Holste, L. Kroll* // *Composite Structures*. — 2002. — Vol. 58. — P. 165-174.
- [6] *Soldatos, K. P.* On the buckling and vibration of anti-symmetric angle-ply laminated circular shells / *K. P. Soldatos* // *Int. J. Engng. Sci.* — 1983. — Vol. 21. — P. 217-222.
- [7] *Shu, C.* Free vibration analysis of laminated composite cylindrical shells by DQM / *C. Shu, H. Du* // *Composite. Part B*. — 1997. — Vol. 28B. — P. 267-274.
- [8] *Zang, X. M.* Vibration analysis of cross-ply laminated composite cylindrical shells using the wave propagation approach / *X. M. Zang* // *Applied acoustics*. — 2001. — Vol. 62. — P. 1221-1228.
- [9] *Hu, H.-T.* Maximization of the fundamental frequencies of laminated cylindrical shells with respect to fiber orientation / *H.-T. Hu, J.-Y. Tsai* // *J. of Sound and Vibration*. — 1999. — Vol. 225. — P. 723-740.

- [10] *Moussaoui, F.* The effects of large vibration amplitudes on the mode shapes and natural frequencies of thin elastic shells. A new approach for free transverse constrained vibration of cylindrical shells / *F. Moussaoui, R. Benamar, R. G. White* // *J. of Sound and Vibration*. — 2002. — Vol. 255. — P. 931-963.
- [11] *Viswanathan, K. K.* Free vibration study of layered cylindrical shells by collocation with splines / *K. K. Viswanathan, P. V. Navaneethakrishnan* // *J. of Sound and Vibration*. — 2003. — Vol. 260. — P. 807-827.
- [12] *Narisava, T.* A study on refined analytical method for free vibration analysis of laminated composite cylindrical shells using equivalent curvatures / *T. Narisava* // *JSME Int. J.* — 2002. — Vol. 45. — P. 32-39.
- [13] *Biscos, S.* Vibration characteristics of composite panels with and without cutout / *S. Biscos, G. Springer* // *AIAA Journal*. — 1989. — Vol. 27. — P. 1116-1122.
- [14] *Toda, S.* Vibrations of circular cylindrical shells with cutouts / *S. Toda, K. Komatsu* // *J. of Sound and Vibration*. — 1977. — Vol. 52, Issue 4. — P. 497-510.
- [15] *Ramamurti, V.* Free vibrations of circular cylindrical shells / *V. Ramamurti, J. Pattabiraman* // *J. of Sound and Vibration*. — 1977. — Vol. 52, Issue 2. — P. 193-200.
- [16] *Poore, A. L.* Free vibration of laminated cylindrical shells with a circular cutout / *A. L. Poore, A. Barut, E. Madenci* // *J. of Sound and Vibration*. — 2008. — Vol. 312, Issue 1-2. — P. 55-73.
- [17] *Sukhorolsky, M.* The Vibration of rectangular orthotropic plate with massive inclusions / *M. Sukhorolsky, T. Shopa* // *CAMES Journal*. — 2008. — Vol. 15. — P. 369-377.
- [18] *Бурак, Я. Й.* Аналітична механіка локально навантажених оболонок / *Я. Й. Бурак, Ю. К. Рудавський, М. А. Сухорольський*. — Львів: Інтеллект-Захід, 2007. — 240 с.

Transverse vibration of a cylindrical orthotropic panel with circular massive inclusions

Tetyana Shopa

The problem on proper vibrations of the loosely leant cylindrical orthotropic panel with a circular massive rigid inclusion is considered in this paper. The stress-strain state of the panel is described by modified equations of Timoshenko's theory of shells. Numerical solution of the problem is found by the indirect method of boundary elements based on the sequential approach to constructing generalized functions and on the collocation method. The influence of the inclusion mass on the natural frequencies of the panel is investigated.

Поперечные колебания цилиндрической ортотропной панели с круговым массивным включением

Татьяна Шопя

Рассматривается задача о собственных колебаниях цилиндрической шарнирно закрепленной ортотропной панели с круговым массивным включением. Напряженно-деформируемое состояние панели описывается модифицированными уравнениями теории оболочек Тимошенко. Численное решение этой задачи построено непрямым методом граничных интегральных уравнений, базирующимся на секвенциальном изображении сингулярных решений. Исследуется влияние массы включения на собственные частоты колебаний оболочки.

Отримано 23.02.09