УДК 539.3

Лінійні теорії електромагнітомеханіки діелектриків

Василь Кондрат[1], Ольга Грицина[2]

[1] д. ф.-м. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: kon@cmm.lviv.ua
[2] к. ф.-м. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: gryt@cmm.lviv.ua

Статтю присвячено огляду лінійних теорій взаємозв'язаної електромагнітомеханіки діелектричних тіл, у тому числі нелокальних, у простір параметрів стану яких входять не лише загальноприйняті параметри, такі як тензор деформації, вектор поляризації чи напруженість електричного поля, а й їхні просторові похідні, або ж зв'язок між спряженими параметрами стану є інтегральний з ядрами, що залежать від просторових координат. Коротко подано основні ідеї та співвідношення теорій п'єзоелектриків Фойхта, Тупіна та теорії діелектриків Бурака. Проведено стислий огляд основ і здобутків нелокальних теорій діелектриків, які враховують у модельному описі залежність стану тіла від: (1) градієнтів тензора деформації; (2) градієнта вектора поляризації; (3) градієнтів вектора напруженості електричного поля чи вищих електричних моментів (квадруполів, октуполів тощо); (4) теорій, які передбачають інтегральний взаємозв'язок між параметрами стану, а також (5) теорій, у яких поруч із електромагнітними та деформаційними процесами враховано процес локального зміщення маси. Коротко проаналізовано багатоконтинуумний підхід до побудови теорії взаємодії механічних та електромагнітних полів у пружних поляризовних середовищах. Показано, що нелокальні теорії діелектриків описують низку спостережуваних ефектів, які не вдається пояснити з використанням класичних теорій. Стаття містить 261 посилання.

Ключові слова: взаємозв'язані електромагнітні та механічні поля, діелектрики, одно- та багатоконтинуумні підходи, п'єзоелектричний ефект, флексоелектричний ефект, градієнтність, нелокальність, локальне зміщення маси.

Зміст

Вступ. Пропонується огляд робіт із математичного моделювання та дослідження електромеханічних процесів у діелектриках, проведених, здебільшого, упродовж останніх десятиліть. Автори обмежилися поданням лише лінійних варіантів теорій. Аналіз нелінійних теорій електромеханіки діелектриків може бути предметом окремих публікацій. Зазначимо, що короткі огляди досліджень лінійних і нелінійних коливань п'єзоелектричних пластин наведено в [238, 259], огляд варіаційних підходів у моделюванні процесів у п'єзоелектричних і термоп'єзоелектричних середовищах міститься в [96], а аналіз нелокальних теорій п'єзоелектричних матеріалів дано, зокрема, у фундаментальній монографії *Можена (Maugin)* [67] та оглядовій статті *Yang J.* [240], написаній з нагоди 100-річчя від дня народження *Міндліна*.

Пропонований огляд складається із трьох частин. Перша частина містить короткий розгляд відомих моделей електромеханіки діелектриків, у яких приймали, що локальний термодинамічний стан тіла у вибраній точці не залежить від стану в інших точках. При цьому докладно подано співвідношення класичної теорії (теорії *Фойхта (Voigt)*), оскільки вона, фактично, є основа для розбудови наступних теорій.

У другій частині розглянуто нелокальні теорії, які передбачають залежність локального термодинамічного стану тіла від просторових градієнтів вектора поляризації, напруженості електричного поля, тензора деформації або ж визначальні співвідношення яких є функціональними просторового типу. Автори намагалися подати матеріал, дотримуючись історії розвитку досліджень. Тому насамперед подано огляд публікацій, присвячених вивченню флексоелектричного ефекту, для опису якого враховують залежність локального стану від градієнтів деформації. Далі подано основи теорії, започаткованої *Міндліном (Mindlin)*, яка приймає до уваги залежність локального стану від градієнта поляризації, а також теорій, в яких у простір параметрів стану введено електричні моменти вищих порядків (або градієнти вектора напруженості електричного поля). Проаналізовано також теорії, які передбачають функціональні матеріальні співвідношення просторового типу. Коротко наведено результати кількісних досліджень, проведені на основі перелічених вище моделей. Цікаво зазначити, що деякі ефекти, такі як аномалія *Міда (Mead)*, дисперсія коротких хвиль тощо, коректно описують різні нелокальні теорії.

Останніми роками запропоновано та розвинуто теорію електромагнітотермомеханіки поляризовних неферомагнітних тіл, яка базується на врахуванні локальних структурних змін тіла, що характеризуються вектором локального зміщення маси. Ця теорія теж нелокальна та коректно описує аномалію Міда та деякі інші нелокальні ефекти.

У третій частині статті коротко розглянуто результати застосування двоконтинуумного підходу до опису електромеханічних процесів у діелектриках. В основному такий підхід стосувався двоатомних діелектриків.

Автори свідомі неповноти огляду. Однак, сподіваємося, що навіть у такому обсязі він буде корисний для дослідників в області сучасної механіки деформівного твердого тіла, чиє коло наукових інтересів охоплює питання створення й експлуатації композитних і пористих матеріалів, нанотехнологій, для яких вагомий вплив ефектів електромеханічної взаємодії та приповерхневих явищ.

1. Локальні теорії діелектриків

1.1. Класична теорія п'єзоелектриків [232]. Розглянемо діелектричне неферомагнітне тіло, яке займає область (V) евклідового простору й обмежене гладкою поверхнею (Σ). Тіло перебуває під дією механічних об'ємних сил $\vec{F}_v$ та поверхневих зусиль $\vec{\sigma}_a$, а також зовнішнього електромагнітного поля, яке характеризується густиною потоку $\vec{S}_e$. За визначальні приймаємо пружні деформаційні й електромагнітні процеси, які будемо описувати в лінійному наближенні.

Рівняння балансу енергії у цьому випадку можна записати так [71]

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(V)}\left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2+U\right)dV=\int\limits_{(V)}\vec{F}_v\cdot\vec{v}\,dV+\int\limits_{(\Sigma)}\left(\vec{\sigma}_a\cdot\vec{v}-\vec{S}_e\cdot\vec{n}\right)d\Sigma\,. \tag{1.1}$$

Тут U — внутрішня енергія, ρ — густина маси, $\vec{v}$ — вектор швидкості, t — час, $\vec{n}$ — вектор зовнішньої нормалі до поверхні (Σ), «$\cdot$» — знак скалярного добутку.

Рівняння Максвелла у локальній формі мають вигляд [13, 61, 67]

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\,,\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_e\,,\qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,,\qquad \vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}_e+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\,, \tag{1.2}$$

де $\vec{E},\vec{H}$ — вектори напруженостей електричного та магнітного полів; $\vec{D}$, $\vec{B}$ — вектори індукції електричного та магнітного полів; $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$; $\vec{P}$ — вектор поляризації; для неферомагнітного середовища $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$; ε_0,μ_0 — електрична та магнітна сталі; ρ_e — густина вільного електричного заряду; $\vec{J}_e$ — вектор густини електричного струму; $\vec{\nabla}$ — оператор Гамільтона; «$\times$» — знак векторного добутку. Для діелектричного тіла, яке розглядаємо, маємо

$$\rho_e=0,\qquad \vec{J}_e=0\,. \tag{1.3}$$

Із формул (1.2) випливає співвідношення, яке трактують як рівняння балансу енергії електромагнітного поля

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(V^*)}U_e dV=-\oint\limits_{(\Sigma)}\vec{S}_e\cdot\vec{n}d\Sigma-\int\limits_{(V^*)}\vec{J}_e\cdot\vec{E}dV\,. \tag{1.4}$$

Тут $\left(V^*\right)=\left(V_v\right)\cup\left(V\right)$, $\left(V_v\right)$ — область вакууму,

$$\vec{S}_e=\vec{E}\times\vec{H}\,,\qquad \frac{d}{dt}\int\limits_{(V^*)}U_e dV=\int\limits_{(V^*)}\left(\vec{E}\cdot\dot{\vec{D}}+\vec{H}\cdot\dot{\vec{B}}\right)dV\,, \tag{1.5}$$

крапка над символом означає похідну за часом.

Надалі у виразі (1.5) для енергії електромагнітного поля нехтують вкладом енергії магнітного поля. Враховуючи також співвідношення (1.3), з рівнянь (1.4), (1.5) отримують

$$\oint\limits_{(\Sigma)} \vec{S}_e \cdot \vec{n} d\Sigma = -\int\limits_{(V^*)} \vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} dV . \tag{1.6}$$

Беручи до уваги співвідношення (1.6) і теорему Остроградського-Гауса [55], рівняння балансу енергії (1.1) у локальній формі набуває вигляду

$$\dot{U} = \vec{v} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \vec{F}_v - \rho \dot{\vec{v}} \right) + \hat{\sigma} : \vec{\nabla} \vec{v} + \vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} . \tag{1.7}$$

Тут враховано, що $\vec{\sigma}_a = \hat{\sigma} \cdot \vec{n}$, де $\hat{\sigma}$ — тензор напружень Коші. Рівняння балансу енергії повинно задовольняти принцип об'єктивності, тобто бути інваріантним відносно просторових трансляцій і поворотів. Як наслідок із цього твердження випливає рівняння руху

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \vec{F}_v = \rho \ddot{\vec{u}} , \quad \forall \vec{r} \in \left(V \right). \tag{1.8}$$

Тут $\vec{u}$ — вектор переміщення, $\vec{r}$ — радіус-вектор.

З умови незмінності рівняння (1.7) у разі повороту тіла, як жорсткого цілого з постійною кутовою швидкістю випливає симетрія тензора напружень. Тоді з рівняння балансу енергії (1.7) отримують таке рівняння Гіббса

$$\dot{U} = \hat{\sigma} : \dot{\hat{e}} + \vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} . \tag{1.9}$$

Тут $\hat{e}$ — тензор деформації, введений співвідношенням

$$\hat{e} = \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \vec{u} + \vec{u} \vec{\nabla} \right). \tag{1.10}$$

Електричну ентальпію означають формулою $H = U - \vec{E} \cdot \vec{D}$ [71]. Для неї рівняння Гіббса набуває вигляду $\dot{H} = \hat{\sigma} : \dot{\hat{e}} - \vec{D} \cdot \dot{\vec{E}}$. Відтак, рівняння стану, які визначають тензор напружень і вектор індукції електричного поля через тензор деформації та вектор напруженості електричного поля, записують у вигляді

$$\hat{\sigma} = \frac{\partial H}{\partial \hat{e}}, \qquad \vec{D} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{E}} . \tag{1.11}$$

Якщо функцію електричної ентальпії H апроксимувати поліномом другого степеня за збуреннями функцій $\hat{e}$ та $\vec{E}$ відносно вихідного природного стану, у якому деформація тіла та вектор напруженості електричного поля відсутні, то рівняння стану (1.11) в явному вигляді будуть такі

$$\hat{\sigma} = \hat{C}^{(4)} : \hat{e} - \hat{h}^{(3)} \cdot \vec{E} , \qquad \vec{D} = \hat{\varepsilon} \cdot \vec{E} + \hat{h}^{(3)} : \hat{e} , \tag{1.12}$$

де $\hat{C}^{(4)}$, $\hat{h}^{(3)}$, $\hat{\varepsilon}$ — відповідно тензори пружних та п'єзоелектричних модулів і тензор діелектричної проникності. Тут і далі валентність тензорів понад другого порядку відзначатимемо верхнім індексом у круглих дужках.

Рівняння руху (1.8) і стану (1.12) разом із рівняннями електростатики $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ (φ — електричний потенціал) й співвідношенням Коші (1.10), яке пов'язує тензор деформації $\hat{e}$ з вектором переміщення $\vec{u}$, складають повну система рівнянь лінійної теорії п'єзоелектриків, яку часто називають теорією Фойхта. Зазначимо, що за такого модельного опису у рівнянні руху (1.8) пондеромоторні сили відсутні, а взаємозв'язок механічних та електричних полів реалізується лише у рівняннях стану (1.12). Оскільки цей взаємозв'язок характеризується тензором третьої валентності $\hat{h}^{(3)}$, то він властивий лише анізотропним матеріалам певного типу симетрії [67, 71, 90, 237] та ін. Для тіл високого рівня симетрії (центрально-симетричних, ізотропних) взаємовплив деформаційного й електричного полів відсутній.

Рівняння класичної теорії п'єзоелектриків були основою багаточисленних досліджень, які широко відображені у науковій літературі (див. [1, 2, 5-13, 21, 23, 24, 34-37, 41-49, 56-62, 67, 68, 71, 72, 74-76, 78, 81-85, 87, 90, 91, 93-95, 104, 156-158, 209, 227, 229] та ін.). Теорію багатокомпонентних діелектриків розвинуто в роботах [18, 22].

1.2. Врахування локального електричного поля. Поляризовний діелектрик — джерело електричного поля. У зв'язку з цим напруженість електричного поля, яке діє на частинки діелектрика (локальне поле), буде відрізнятися від напруженості зовнішнього поля. Це врахував *Тупін (Toupin)* під час побудови нелінійної теорії взаємодії механічних та електромагнітних полів у деформівних тілах [232, 234], яка узагальнює класичну теорію п'єзоелектриків.

Обмежимося розглядом лінеаризованої системи рівнянь, яку *Тупін* отримав на основі варіаційного принципу Гамільтона, записаного щодо діелектричних тіл

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{(V^*)}\left(K-H\right)dV dt+\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{(V)}\left(\vec{F}_v\cdot\delta\vec{u}+\vec{E}^0\cdot\delta\vec{P}\right)dV+\int_{(\Sigma)}\vec{\sigma}_a\cdot\delta\vec{u}d\Sigma\right]dt=0\,. \quad (1.13)$$

Тут K — кінетична енергія; H — електрична ентальпія, означена формулою

$$H = U^L\left(\hat{e}, \vec{P}\right) - \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{P}\,; \quad (1.14)$$

U^L — внутрішня енергія, визначена у просторі тензора деформації $\hat{e}$ та вектора поляризації $\vec{P}$; $\vec{E}^0$ — вектор напруженості зовнішнього електричного поля; $\left[t_1, t_2\right]$ — часовий проміжок.

Тупін ввів вектор локального електричного поля [234], як параметр, спряжений до вектора поляризації $\vec{P}$

$$\vec{E}^L = -\frac{\partial U^L}{\partial \vec{P}}. \tag{1.15}$$

Якщо врахувати також рівняння стану для тензора напружень

$$\hat{\sigma} = \frac{\partial U^L}{\partial \hat{e}}, \tag{1.16}$$

то з варіаційного рівняння (1.13) отримаємо рівняння руху, яке має вигляд (1.8), а також:

- рівняння для вектора локального електричного поля («баланс міжмолекулярних сил» [232])

$$\vec{E}^L - \vec{\nabla}\varphi + \vec{E}^0 = 0, \tag{1.17}$$

- рівняння електростатики для середовища

$$-\varepsilon_0 \vec{\nabla}^2 \varphi + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0, \quad \forall \vec{r} \in (V) \tag{1.18}$$

та вакууму

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = 0, \quad \forall \vec{r} \in (V_v), \tag{1.19}$$

- крайові умови

$$\hat{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{\sigma}_a, \quad \left(-\varepsilon_0 \left|\vec{\nabla}\varphi\right| + \vec{P}\right) \cdot \vec{n} = 0, \quad \forall \vec{r} \in (\Sigma). \tag{1.20}$$

Тут $\left|\vec{\nabla}\varphi\right|$ — стрибок градієнта електричного потенціалу на поверхні тіла (Σ).

Зазначимо, що за відсутності зовнішнього електричного поля та рівності $\vec{E}^L = -\vec{E}$ отримаємо $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$.

Аналіз співвідношень (1.8), (1.15)-(1.20) показує, що у лінійному наближенні теорія *Тупіна* враховує зв’язок деформаційних та електричного полів лише у рівняннях стану. Для ізотропних тіл і центрально-симетричних кристалів у рамках теорії такий зв’язок відсутній.

1.3. Тензорні електричні параметри стану. Бурак [14] запропонував характеризувати термодинамічний стан поляризованого діелектрика, окрім тензорів механічних напружень і деформації, також тензорами другої валентності — тензором питомої густини поляризаційного (зв’язаного) заряду $\hat{\Omega}$ та тензором електричних напружень $\hat{\tau}$. Тензор $\hat{\Omega}$ введено з урахуванням деформаційної анізотропії тіла та різного характеру деформування й руху позитивних і негативних зарядів частинок тіла [14]. Тензор $\hat{\tau}$ характеризує силову дію електричного поля на зв’язані заряди. Вектор питомої поляризації $\vec{p} = \vec{P}/\rho$ означено формулою $\vec{p} = \vec{w}\omega_0/\rho_0$, де ω_0, ρ_0 — початкові значення густин позитивного заряду та маси, а $\vec{w} = \vec{u}_+ - \vec{u}_-$ — різниця векторів переміщень позитивних і негативних зарядів. У роботі одержано, що

$$\hat{\Omega} = -\frac{1}{2}\left[\vec{\nabla}\vec{p} + \vec{p}\vec{\nabla}\right], \qquad \Omega = \vec{\nabla} \cdot \vec{p}.$$

Тут Ω — перший інваріант тензора $\hat{\Omega}$.

Рівняння Гіббса, записане для вільної енергії F, тепер має вигляд

$$dF = -sdT + \frac{1}{\rho_0}\hat{\sigma} : \hat{e} + \frac{1}{\omega_0}\hat{\tau} : \hat{\Omega}, \tag{1.21}$$

де s — питома ентропія, а T — абсолютна температура.

Відтак, у лінійному наближенні за ізотермічних умов для ізотропного тіла з рівняння Гіббса (1.21) випливають такі рівняння стану

$$\hat{\sigma} = 2G\hat{e} + \rho_0 R\hat{\Omega} + \left[\left(K - \frac{2}{3}G\right)e + \rho_0\left(N - \frac{1}{3}R\right)\Omega\right]\hat{I},$$

$$\hat{\tau} = 2L\hat{\Omega} + \omega_0 R\hat{e} + \left[\left(M - \frac{2}{3}L\right)\Omega + \omega_0\left(N - \frac{1}{3}R\right)e\right]\hat{I}.$$

Тут K, G — ізотермічні модулі всестороннього стиску та зсуву, M, L — модулі кульової та девіаторної поляризації [14], R, N — коефіцієнти взаємозв'язку між процесами поляризації та деформування, $\hat{I}$ — одиничний тензор.

Бачимо, що побудована таким чином модель, на відміну від класичної теорії діелектриків, у лінеаризованому наближенні в рівняннях стану враховує взаємозв'язок деформаційних та електричних полів для тіл високого рівняння симетрії. Однак, праця [14] не містить кількісної оцінки нових характеристик матеріалу тіла, що ускладнює використання цієї теорії для аналізу ефектів, які вона описує. Нам також не відомі роботи, в яких би побудована модель використовувалася для дослідження механоелектромагнітних процесів у діелектричних тілах.

1.4. Врахування динамічних ефектів у рівняннях Максвелла. Перелічені вище теорії побудовані в електростатичному наближенні, коли рівняння механіки містять динамічні складники, а рівняння Максвелла є стаціонарні. У такому наближенні електромагнітні та механічні поля динамічно не взаємозв'язані. Такі рівняння не враховують хвильову природу електромагнітних полів, а відтак, таке наближення не завжди прийнятне. Зокрема, у такому наближенні не можна врахувати електромагнітну хвилю, спричинену поширенням акустичної хвилі, і навпаки.

Систему рівнянь, яка містить рівняння руху (1.8), рівняння Максвелла (1.2), рівняння стану (1.12), співвідношення Коші (1.10), а також формули (1.3) та $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ часто називають рівняннями п'єзоелектромагнетизму [200, 240].

Якщо за розв'язуючі функції вибрати вектори переміщення та напруженості електричного поля, то ключова система рівнянь моделі п'єзоелектромагнетизму для неферомагнітного діелектричного тіла набуває вигляду

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{1}{2}\hat{C}^{(4)} : \left(\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{u}\vec{\nabla}\right) - \hat{h}^{(3)} \cdot \vec{E}\right] + \vec{F}_v = \rho\frac{d^2\vec{u}}{dt^2},$$

$$-\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \mu_0 \hat{\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\mu_0 \hat{h}^{(3)} : \left(\vec{\nabla}\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}\vec{\nabla}\right).$$

У праці [92] за ключові функції пропонується взяти вектори переміщення q електричної індукції.

Варіаційні принципи та узагальнені варіаційні принципи для моделей, що описують взаємозв'язані механічні й електромагнітні процеси у пружних діелектричних п'єзоелектромагнітних середовищах і тілах скінченних розмірів за умови дії на них різних типів зовнішнього навантаження запропоновані в [163, 242, 243, 245].

У такій динамічній постановці в працях [147, 148, 159, 208] вивчено процес поширення плоских хвиль, а в [160] досліджено вплив на них в'язкості та електропровідності. *Craine* [119] вивчив поведінку нестаціонарних розв'язків одномірних задач. *Yang J.* у праці [248] досліджував хвилі Лява, а в [252] — поперечні горизонтальні електромагнітні хвилі. Закономірності поширення поверхневих хвиль у п'єзоелектромагнітних матеріалах проаналізовано в працях [164, 219, 221, 223, 235, 236, 247]. Електромагнітне випромінювання, спричинене механічною вібрацією п'єзоелектричних пластин і циліндрів, вивчено в роботах [107, 161, 162, 197, 254]. *Yang J.* [249, 250] дослідив електромагнітне випромінювання, спричинене поширенням півбезмежної тріщини та рухом дислокації, а у співпраці з *Li* [167] — електромагнітне випромінювання, спричинене поширенням обмеженої тріщини. У роботі [166] вивчено хвильові поля, спричинені поширенням тріщини між двома п'єзоелектричними півпросторами, а у [130] — між п'єзоелектричним і пружним півпросторами. У праці [165] досліджено розсіяння акустоелектричних хвиль на півбезмежній провідній тріщині у п'єзоелектричному трансверсально-ізотропному середовищі. Взаємозв'язок механічних та електромагнітних хвиль проаналізовано в [71].

2. Нелокальні теорії діелектриків

Залежність локального термодинамічного стану тіла у вибраній точці від стану його сусідніх точок, характерну для нелокальних моделей деформівних тіл, можна врахувати функціональними визначальними співвідношеннями просторового типу або ж шляхом розширення простору параметрів стану градієнтами певних фізичних величин. У науковій літературі розглядають як теорії першого типу (див. напр. [134, 135]), так і другого, коли до простору параметрів стану тіла додатково вводять градієнт тензора деформації [50, 79, 186] та ін., градієнт вектора поляризації [110, 190] чи градієнт вектора напруженості електричного поля [122, 151, 255]. При цьому термін «нелокальні теорії» застосовують, зазвичай, до теорій першого типу, тоді як теорії другого типу називають «градієнтними». Така термінологія уклалася історично, однак, ми не завжди дотримуватимемося її, оскільки загалом нелокальними є теорії не лише першого, а й другого типів.

Нелокальні теорії п'єзоелектриків ближчі до теорії динаміки ґратки, аніж класичні теорії [97, 100, 134, 194]. Вони дають узгоджені з експериментом результати для тіл із малими характерними розмірами (тонких плівок, волокон), для яких співвідношення класичних теорій стають неефективні. Нелокальні теорії також застосовують для дослідження ударних хвиль, хвиль прискорення, стаціонарних і динамічних ефектів за дії зосереджених факторів (сил, електричних зарядів тощо), а також за наявності у тілі різного роду дефектів.

2.1. Врахування градієнтів тензора деформації. Відомо, що п'єзоелектричний ефект невластивий тілам із центрально-симетричною структурою й ізотропним матеріалам. Однак, якщо центрально-симетричні кристали піддати дії неоднорідної деформації, то вони також можуть поляризуватися. Мабуть уперше про існування в лінійному наближенні взаємозв'язку між механічними й електричними полями в діелектричних матеріалах високого рівня симетрії (центрально-симетричних кристалах, ізотропних тілах) йшлося в роботах [64, 65], опублікованих у 1957 році. Декількома роками пізніше *Коган* запропонував для опису такого ефекту в рамках лінійної теорії врахувати залежність вектора поляризації не лише від тензора деформації, а й від його градієнта [50].

Зазначимо, що розвиток таких моделей електромеханіки діелектричних тіл, які враховують вплив градієнта деформації, певним чином був стимульований низкою наукових публікацій, які вийшли друком у 60-их роках минулого століття та стосувалися узагальнення теорії пружності шляхом врахування у модельному описі градієнта поворотів $\kappa_{ij} = 1/2\, e_{jkl} u_{l},_{ik}$ (тут e_{jkl} — символи Леві-Чивіта) та градієнта тензора деформації [4, 143, 217, 233]. Ідея врахування впливу на напружено-деформований стан пружного тіла градієнтів тензора деформації вищих порядків полягала у постулюванні залежності густини потенціальної енергії від цих градієнтів: $W = W\left(\hat{e}, \vec{\nabla}\hat{e}, \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\hat{e}\right), \ldots\right)$. Зокрема, якщо таку залежність прийняти квадратичною, то компоненти тензора напружень будуть визначатися не лише тензором деформації, а й його градієнтами

$$\hat{\sigma} = \hat{C}^{(4)} : \hat{e} + \underset{\sim}{\hat{C}}^{(5)} \vdots \left(\vec{\nabla}\hat{e}\right) + \ldots .$$

Тут $\hat{C}^{(4)}$ та $\underset{\sim}{\hat{C}}^{(5)}$ — тензорні величини відповідної валентності.

У моделі електромеханіки діелектричних тіл залежність вектора поляризації від тензора деформації Коган означив таким рівнянням [50]

$$\vec{P} = \hat{h}^{(3)} : \hat{e} + \hat{\gamma}^{(4)} \vdots (\vec{\nabla}\hat{e}) . \qquad (2.1)$$

Для центрально-симетричних кристалів (або ізотропних тіл) тензор $\hat{h}^{(3)}$ дорівнює нулеві. Тоді співвідношення (2.1) спрощується та набуває вигляду

$$\vec{P} = \hat{\gamma}^{(4)} \vdots (\vec{\nabla}\hat{e}) . \qquad (2.2)$$

Пізніше тензор $\hat{\gamma}^{(4)}$ отримав назву тензора флексоелектричних модулів [79, 169, 170, 172, 175, 176, 225].

Слід відзначити, що прямий та обернений п'єзоелектричний ефект у рідких неоднорідно деформованих кристалах уперше досліджував *Meyer* у 1969 році [189]. Декількома роками пізніше *De Genness* [121] запропонував термін «п'єзоелектричний ефект», який описував поляризацію рідких кристалів внаслідок їх неоднорідного деформування, замінити на термін «флексоелектричний ефект». Флексоелектричний ефект, зазвичай, пов'язують із рідкими кристалами, однак, він властивий і твердим кристалічним тілам. Явище поляризації твердих кристалів (у тому числі і завідомо неп'єзоелектричних, тобто центрально-симетричних чи ізотропних) внаслідок їх неоднорідного деформування, за аналогією до подібного явища у рідких кристалах, *Інденбом, Логінов* та *Осіпов* [40] також назвали флексоелектричним ефектом і там же ж аналізували зв'язок цього ефекту з атомною будовою кристалів.

Розробці теоретичних основ опису механоелектромагнітних процесів у конденсованих тілах за урахування впливу градієнтів тензора деформації, дослідженню флексоелектричного ефекту в матеріалах різної природи (діелектриках, напівпровідниках), вивченню аспектів його застосування в нанотехнологіях і для створення композитних матеріалів із заданими п'єзоелектричними властивостями присвячено роботи ряду вчених, зокрема, [38, 40, 66, 79, 80, 108, 129, 140, 145, 150, 174-176, 178, 180, 202, 222, 225, 230].

У працях [79, 80, 225, 226] розглянуто задачі про лінійний відгук поляризації на градієнт деформації (флексоелектричний ефект) і градієнт температури (термополяризаційний ефект). Автор показав, що за однакових макроскопічних електродинамічних умов, на відміну від п'єзоелектричного, флексоелектричний відгук може суттєво відрізнятися у статичній (статичне неоднорідне деформування) та динамічній (поширення акустичної хвилі) ситуаціях. Аналіз відгуку поляризації на градієнт деформації в обмеженому тілі показав, що поряд із об'ємними вкладами у середню густину дипольного моменту виникають і поверхневі вклади, які можуть бути того ж порядку, що й об'ємні. Проаналізовано також можливість практичного використання термополяризаційного та флексоелектричного ефектів, зокрема, відзначено, що виняткова чутливість останнього до властивостей поверхні може зробити його ефективним методом її дослідження.

На основі порівняння результатів, отриманих із використанням теорії динаміки ґратки, *Міндлін* [194] показав, що узагальнена теорія діелектриків, яка містить лише перший градієнт тензора деформації, некоректно описує дисперсію коротких хвиль, а саме, вона передбачає невірний знак кривизни дисперсійної кривої. Дещо пізніше *Можен* [186] узагальнив цей результат і показав, що теорії, які включають градієнти тензора деформації парних порядків коректно описують дисперсію коротких хвиль, на відміну від теорій із градієнтами тензора деформацій непарних порядків.

У науковій літературі також нагромадилося достатньо багато експериментальних досліджень флексоелектричного ефекту у кристалічних матеріалах. Ймовірно, вперше такі дослідження провів Жёлудев у 1966 році [39]. *Bursian* і *Trunov* [106] спостерігали флексоелектричний ефект під час згину кристалічних пластин, а *Catalan*, *Sinnamon* і *Gregg* [108] досліджували вплив цього ефекту на діелектричні характеристики неоднорідно деформованих тонких плівок. *Dumitrică*, *Landis* та *Yakobson* [129] вивчали нормальну поляризацію графітових оболонок, спричинену деформаціями згину. *Ma* та *Cross* [169, 170, 172] досліджували зв'язок між градієнтом пружних деформацій та електричною поляризацією у керамічних матеріалах різного складу (PMN, BST, PZT) і показали, зокрема, що флексоелектрична поляризація пропорційна до величини прикладеного градієнта деформації.

Значну кількість робіт як теоретичних, так і експериментальних, присвячено визначенню флексоелектричних модулів для різних матеріалів. До таких, зокрема, належать [99, 120, 129, 152, 169-173, 179, 261].

Зазначимо також, що після виявлення флексоелектричного ефекту в рідких кристалах [189], його дослідженню надавалася значна увага. Це пов’язано, насамперед, із надзвичайно широким практичним використанням флексоелектричного ефекту в електронній техніці. Короткий огляд багаточисленних робіт цього напрямку міститься в [146].

2.2. Градієнтна теорія п’єзоелектриків Міндліна. У теорії *Тупіна* з функціонала не отримуються крайові умови, які б відповідали сформульованому рівнянню балансу міжмолекулярних сил (1.17). Такі умови, згідно *Міндліна*, можна отримати, якщо додатково прийняти, що внутрішня енергія U^L системи залежить не лише від тензора деформації $\hat{e}$ та вектора поляризації $\vec{P}$, як це передбачала теорія п’єзоелектриків *Тупіна*, а й від градієнта вектора поляризації $\vec{\nabla}\vec{P}$. Таким чином узагальнену градієнтну лінійну теорію п’єзоелектриків *Міндлін* [190] запропонував у 1968 році як розширення лінійної версії робіт *Тупіна* [232]. Відтак, означивши електричну ентальпію *H* згідно формули

$$H = U^L\left(\hat{e}, \vec{P}, \vec{\nabla}\vec{P}\right) - 2^{-1}\varepsilon_0\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{P}, \tag{2.2}$$

на основі варіаційного принципу Гамільтона (1.13) для визначення взаємозв’язаних механічних та електричних полів у пружному діелектрику *Міндлін* отримав рівняння руху (1.8), рівняння електростатики (1.18) та (1.19), а також

- узагальнене рівняння балансу міжмолекулярних сил

$$\vec{\nabla}\cdot\hat{E} + \vec{E}^L - \vec{\nabla}\varphi + \vec{E}^0 = 0\,, \tag{2.3}$$

- природні крайові умови

$$\forall\vec{r}\in(\Sigma):\quad \hat{\sigma}\cdot\vec{n} = \vec{\sigma}_a\,,\quad \hat{E}\cdot\vec{n} = 0\,,\quad \left(-\varepsilon_0\left|\vec{\nabla}\varphi\right| + \vec{P}\right)\cdot\vec{n} = 0\,. \tag{2.4}$$

Тут $\hat{E}$ — тензорна величина, спряжена до градієнта вектора поляризації [190]. При цьому рівняння стану узагальнені внаслідок введення у простір параметрів стану градієнта вектора поляризації $\vec{\nabla}\vec{P}$

$$\hat{\sigma} = \frac{\partial U^L}{\partial\hat{e}}\,,\qquad \vec{E}^L = -\frac{\partial U^L}{\partial\vec{P}}\,,\qquad \hat{E} = \frac{\partial U^L}{\partial\left(\vec{\nabla}\vec{P}\right)}\,. \tag{2.5}$$

Слід відзначити, що у 1969 році, роком пізніше від виходу публікації *Міндліна*, ґрунтуючись на роботах [131, 190], *Suhubi* [224] запропонував нелінійну градієнтну теорію п’єзоелектриків.

Градієнтна теорія п’єзоелектриків дозволила *Міндліну* описати низку ефектів, які не враховувала класична теорія електромеханічної взаємодії у пружних діелектричних середовищах, а саме:

- взаємозв’язок механічних та електромагнітних полів в ізотропних тілах [190, 191];
- виникнення поверхневої енергії поляризації та деформування (поверхневого натягу) внаслідок утворення поверхні тіла [190, 194];

- аномальну залежність ємності тонких діелектричних плівок від їх товщини (аномалію Міда) [191, 194];
- обмеженість напруженості та потенціалу електричного поля, викликаного точковим зарядом у твердому діелектрику [198];
- акустичний та оптичний відгук тіла, внаслідок дії електромагнітного поля [193, 194, 197, 199].

Зазначимо, що градієнтна теорія п'єзоелектриків *Міндліна* враховує взаємозв'язок градієнта поляризації з тензором деформації, так званий, *обернений флексоелектричний ефект*.

Міндлін обґрунтував [191, 194] запропоновану ним градієнтну теорію п'єзоелектриків, виходячи із мікроскопічної теорії динаміки ґратки. Він показав, що, з точки зору останньої, рівняння (2.3) балансу міжмолекулярних сил відповідає в континуальному або довгохвильовому наближенні умові рівноваги електронної оболонки атома під дією ядра цього атома, сусідніх атомів, оточуючого макроскопічного електричного поля $\vec{E}$ та прикладеного зовнішнього поля $\vec{E}^0$. При цьому величини $\vec{E}^L$ і $\hat{E}$ характеризують відповідно взаємодії «ядро атома» – «оболонка» («core» – «shell») та «оболонка» – «оболонка» («shell» – «shell»).

Взаємозв'язок механічних та електромагнітних полів в ізотропних тілах. У лінійному наближенні для визначення компонент тензорів $\hat{\sigma}$ й $\hat{E}$ з рівнянь стану (2.5) маємо [190]

$$\hat{\sigma} = \hat{C}^{(4)} : \hat{e} + \hat{G}^{(3)} \cdot \vec{P} + \hat{Q}^{(4)} : \left(\vec{\nabla}\vec{P}\right), \; \hat{E} = \hat{b}_0 + \hat{Q}^{(4)} : \hat{e} + \hat{J}^{(3)} \cdot \vec{P} + \hat{B}^{(4)} : \left(\vec{\nabla}\vec{P}\right), \quad (2.6)$$

де $\hat{C}^{(4)}$, $\hat{Q}^{(4)}$, $\hat{B}^{(4)}$, $\hat{J}^{(3)}$, $\hat{G}^{(3)}$ та $\hat{b}_0$ — характеристики матеріалу. У випадку кристалів високої симетрії (центрально-симетричних, ізотропних) тензорні величини третьої валентності $\hat{G}^{(3)}$ та $\hat{J}^{(3)}$ дорівнюють нулю, однак тензорні величини четвертої валентності $\hat{C}^{(4)}$, $\hat{Q}^{(4)}$ та $\hat{B}^{(4)}$ відмінні від нуля, завдяки чому забезпечується взаємовплив механічних та електричних полів.

Поверхневий натяг і приповерхнева неоднорідність. Відомо, що для поділу довільного іонно-кристалічного тіла на дві частини вздовж деякої поверхні (Σ) потрібно затратити енергію на подолання енергії зв'язку частинок тіла. Енергія, необхідна для руйнування атомних зв'язків уздовж поверхні (Σ) за незмінних деформацій і поляризації, надається ззовні. Після розриву зв'язків в околі новоутвореної поверхні проходить перебудова структури матеріалу тіла. Внаслідок цього кристал в околі поверхні (Σ) деформується та поляризується. Так виникає відповідна поверхнева енергія поляризації та деформування (поверхневий натяг) [190, 194]. *Міндлін* показав, що ця енергія є від'ємна величина [194]. Для кристалів NaCl величина поверхневої енергії приблизно дорівнює –59 ерг/см^2 [67, 97, 194]. Поверхнева енергія деформації та поляризації складає приблизно 30% повної енергії зв'язку, а відтак, нею не можна нехтувати [67, 194]. *Міндлін* також показав [194], що отримані ним результати добре узгоджуються з експериментальними дослідженнями [141, 231].

На прикладі задачі про рівноважний стан вільного від зовнішньої дії ізотропного півпростору $x \geq 0$ показано [194], що ненульові компоненти тензора напружень σ_{yy} і σ_{zz} у півпросторі змінюються пропорційно до $\exp\left(-x/\lambda_1\right)$, де λ_1 — фундаментальна масштабна довжина або характерна віддаль, яка характеризує структуру матеріалу. Цей параметр відсутній у класичних теоріях. Виходячи з даних електронної дифракції [141], у роботах [67, 194] показано, що величина λ_1 має порядок віддалі взаємодії. Згадані напруження σ_{yy} і σ_{zz} мають такий же ж порядок, що й величина $\lambda + 2\mu$, де λ та μ — коефіцієнти Ляме, і дуже швидко загасають із віддаленням від поверхні $x = 0$. Числові розрахунки *Міндлін* провів із використанням значень параметра λ_1, визначених для галогенів лужних металів на основі теорії динаміки ґраток [97]. Так, для кристалів NaCl стала загасання $\lambda_1 \approx 7{,}3 \cdot 10^{-7}$ см, що приблизно дорівнює половині віддалі між сусідніми атомами, а для KCl $\lambda_1 \approx 9{,}1 \cdot 10^{-7}$ см.

Аномалія Міда. Аналіз результатів експериментів, проведених *Мідом* [187, 188], свідчить, що для тонких діелектричних шарів характерне більше значення електроємності, аніж це передбачає класична теорія, нелінійний розподіл електричного потенціалу та поляризації, а також наявність механічних напружень. *Міндлін* зробив припущення, що таку аномальну поведінку ємності тонких діелектричних плівок можна пояснити електромеханічною взаємодією, яку не враховує класична теорія п’єзоелектриків. Він показав [191, 194], що цей ефект можна описати на основі запропонованої ним градієнтної теорії п’єзоелектриків. Там же ж показано, що отриманий із використанням градієнтної теорії аналітичний розв’язок відповідної задачі для плівки добре узгоджується з результатами, одержаними ним на основі теорії динаміки ґратки.

Акустичний та оптичний відгук тіла внаслідок дії електромагнітного поля. У працях [193, 194, 197] вивчено акустичну й оптичну активність α-кварцу, яку в 1970 році експериментально спостерігав *Pine* [210]. У [192, 199] досліджено електромагнітне випромінювання центрально-симетричної кристалічної пластини та кулі. Показано, що електромагнітне випромінювання ізотропної пружної діелектричної кулі, яка здійснює обертові коливання з максимальними деформаціями зсуву порядку 10^{-3}, є величина порядку 10^{-3} Вт [199].

Закони збереження для градієнтної теорії п’єзоелектриків довели *Yang* і *Batra* [244].

Із використанням співвідношень градієнтної теорії п’єзоелектриків у [98, 142, 220] досліджено аналітичні розв’язки задач та ефекти взаємодії полів в ізотропних діелектричних тілах простої геометрії. У працях [98, 220] проаналізовано вплив кривини вільної поверхні на поверхневу енергію деформації та поляризації (поверхневий натяг) тіл із циліндричною чи сферичною порожнинами та показано, що наявність кривини внутрішньої поверхні приводить до зменшення абсолютної величини поверхневої енергії, порівняно з тілом із плоскою поверхнею. *Schwartz* [220] запропонував розділити взаємозв'язану систему рівнянь градієнтної електромеханіки шляхом запису векторів пружних переміщень і поляризації на взірець подання Папковича. З використанням такого подання ним вивчено вплив дії зосередженої сили на пружні діелектрики [220]. Таке ж подання та перетворення Фур'є використані авторами статті [113] для дослідження електричного та механічного потенціалів у пружному діелектричному півпросторі, на поверхні якого поміщено точковий електричний заряд. Раніше ці ж автори [111] із використанням перетворення Ганкеля вивчили закономірності розподілу компонент вектора переміщень, вектора поляризації, тензора напружень і тензора $\hat{E}$ у пружному діелектричному півпросторі з точковим зарядом, розташованим усередині півпростору на деякій віддалі від його поверхні, й обчислили на цій основі густину поверхневої енергії деформації та поляризації. Таку ж задачу розглядали у [104], де для аналізу рівнянь градієнтної теорії Міндліна застосовано варіаційне формулювання задачі для кристалів із кубічною центрально-симетричною структурою та метод скінченних елементів. Автори статті для знаходження розв'язку задачі про точковий заряд в ізотропному півпросторі використали дев'ятивузловий осесиметричний ізопараметричний елемент і показали, що отримані ними результати співпадають з одномірним випадком, розглянутим раніше *Міндліном* [190].

У праці [183] вказано, що наслідком введення градієнта вектора поляризації у простір параметрів стану є виникнення ефектів, характерних для всіх теорій градієнтного типу. Одним із таких ефектів є «подолання» чи «згладжування» сингулярностей розв'язків різних типів задач з особливостями. Це, зокрема, стосується розв'язків задач, об'єктами дослідження яких є тіла з тріщинами чи дефектами або ж тіла, які перебувають під дією зосередженої чи ударної сили. Там, де вплив градієнтів вагомий (у приповерхневих і приконтактних областях, сильних перехідних зонах, які виникають в ударних хвилях тощо), там виникають ефекти примежових шарів, які проявляються в областях дуже малої товщини, а поза цими областями розв'язки задач, що ґрунтуються на співвідношеннях «градієнтних» і класичних теорій, практично співпадають [67, 183].

Співвідношення градієнтної теорії п'єзоелектриків знайшли широке застосування для дослідження тіл з тріщинами та дефектами, а також тіл, які перебувають під дією зосередженої чи ударної сили. Так *Gou* [142] дослідив інтенсивність концентрації напружень навколо циліндричного отвору та показав, що, виходячи із співвідношень градієнтної моделі п'єзоелектриків, тіло може зруйнуватися за дії менших зовнішніх навантажень, аніж це передбачає класична теорія пружності. З використанням значень характеристик матеріалів, обчислених раніше на основі теорії гратки, *Askar, Lee* та *Cakmak* [97, 98] показали, що у разі застосування співвідношень теорії п'єзоелектриків Міндліна поверхнева енергія лінійної тріщини в іонному кристалі є величина обмежена. *Nowacki J.* та *Hsieh* [205, 206], ґрунтуючись на співвідношеннях градієнтної теорії п'єзоелектриків, аналітично дослідили властивості різного роду дефектів (дислокацій) і включень.

Chowdhury та *Glockner* [114, 115] отримали розв'язок задачі Буссінеска для пружного діелектричного півпростору.

Nowacki W. [71] вивчив поширення монохроматичних плоских хвиль і поверхневих хвиль Релея. Автори праці [177] дослідили процес поширення поверхневих хвиль Лява у пружному ізотропному шарі діелектрика, що контактує з пружним півпростором, отримали відповідне моделі дисперсійне рівняння та встановили умови існування таких хвиль. *Collet* [116, 117] у квазіелектростатичному наближенні дослідив процес поширення ударних хвиль і хвиль прискорення для одномірного випадку, а у тривимірній постановці *Dost*, *Epstein* і *Gödze* [126, 127] вивчали хвилі прискорення у пружних та термопружних діелектриках.

У роботі [204] доведено теорему взаємності робіт для динамічних задач термопружних діелектричних тіл.

Одночасно із прикладним застосуванням співвідношень градієнтної теорії п'єзоелектриків для аналізу різного роду нелокальних ефектів та ефектів взаємозв'язку, ряд дослідників провели її узагальнення. До таких належать, зокрема, роботи [109, 110, 112], спрямовані на узагальнення нелінійних теорій термопружності ізотропних та анізотропних діелектриків шляхом врахування градієнта вектора поляризації. Співвідношення моделі, запропонованої в [110], використані авторами для дослідження процесу поширення плоскої хвилі в необмеженому центрально-симетричному діелектрику.

Tiersten і *Tsai* [228] узагальнили теорію Міндліна, розглядаючи поряд із процесом поляризації також процес намагнічування.

Maugin та *Pouget* [67, 184] у модельному описі, окрім градієнта вектора поляризації, врахували також інерцію поляризації та застосували отримані співвідношення для дослідження акусто-оптичних й поверхневих хвиль і хвиль Релея у деформівних фероелектриках [211-213], а *Collet* [118] — для аналізу дії на них ударних хвиль. Слід зауважити, що інерцію процесу поляризації *Maugin* врахував раніше у працях [181, 182] під час дослідження фероелектриків. Кількома роками пізніше *Maugin* і *Pouget* у співпраці з *Askar* показали узгодженість побудованої ними моделі з теорією динаміки ґратки [100, 214, 215].

У дослідженнях [175, 218] разом із градієнтом вектора поляризації враховано також градієнт тензора деформації, а також інерційність процесу поляризації [218]. Так, автори статті [218] із використанням варіаційних підходів прийняли за незалежні параметри стану тензор деформації, вектор поляризації, перший і другий градієнти тензора деформації та градієнт вектора поляризації, узагальнивши таким чином градієнтну модель п'єзоелектриків Міндліна. Під час формулювання функціоналу автори врахували також інерційність процесу поляризації. Там же ж для α-кварцу та $KTaO_3$ визначено величини деяких нововведених параметрів моделі, що дозволило дослідити акустичну, оптичну й інфрачервону активність α-кварцу. Слід відзначити, що процес поширення плоских, сферичних і циліндричних хвиль у твердих діелектриках із врахуванням інерції процесу поляризації цими ж авторами [128] був вивчений раніше на прикладі $BaTiO_3$.

Автори статей [175, 176] отримали систему рівнянь взаємозв'язаної електромеханіки, ґрунтуючись на варіаційному принципі Гамільтона (1.13), однак, означивши у формулі (2.2) для електричної ентальпії внутрішню енергію, як функцію не лише тензора деформації, вектора поляризації та його просторового градієнта, а й градієнта тензора деформації: $U^L = U^L\left(\hat{e}, \vec{P}, \vec{\nabla}\vec{P}, \vec{\nabla}\vec{\nabla}\vec{u}\right)$. За такого підходу рівняння стану набувають вигляду

$$\hat{\sigma} = \frac{\partial U^L}{\partial \hat{e}}, \quad \vec{E}^L = -\frac{\partial U^L}{\partial \vec{P}}, \quad \hat{E} = \frac{\partial U^L}{\partial\left(\vec{\nabla}\vec{P}\right)}, \quad \underset{\sim}{\hat{T}} = \frac{\partial U^L}{\partial\left(\vec{\nabla}\vec{\nabla}\vec{u}\right)},$$

де $\underset{\sim}{\hat{T}}$ інтерпретують як тензор напружень вищого порядку [175]. Отриману систему рівнянь автори використовують для вивчення пружних властивостей неоднорідно деформованих п’єзоелектричних і неп’єзоелектричних наноструктур.

2.3. Середовища із квадрупольними та вищими електричними моментами. Розподіл зв’язаних зарядів довільної системи частинок за континуального опису характеризують величинами [151]

$$Q = \int\limits_{(V')} q(\vec{r}')dV, \quad \ldots \quad Q^{k_1\ldots k_n}(\vec{r}) = \frac{1}{n!}\int\limits_{(V')} q(\vec{r}')r^{k_1}\ldots r^{k_n}dV = Q^{[k_1\ldots k_n]}(\vec{r}),$$

де q — густина електричного заряду, Q — величина заряду системи частинок в області (V'), $Q^{k_1\ldots k_n}$ — компоненти електричних моментів відповідного порядку (Q^{k_1} — дипольного моменту, $Q^{k_1k_2}$ — квадрупольного моменту і т. д.), $k_j = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,n}$, $r^{k_j} = \vec{e}^{k_j}(\vec{r}_0)\cdot(\vec{r} - \vec{r}')$, $\vec{r}_0$ — радіус-вектор відлікової точки, а квадратні дужки біля верхніх індексів означають симетризацію індексів.

Кафадар (Kafadar) прийняв, що в електростатичному наближенні лагранжіан L такої системи залежить як від напруженості електричного поля $\vec{E}$, так і від його градієнтів першого та вищих порядків $\vec{\nabla}\vec{E}$, $\vec{\nabla}\vec{\nabla}\vec{E}$, ... (чи їхніх компонент E_{k_1}, E_{k_1,k_2}, E_{k_1,k_2k_3}, ...) [151]. У припущенні, що

$$\delta\int\limits_{(V^*)}\left(\rho L + \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right)dV = \int\limits_{(V)} q\delta\varphi\, dV + \int\limits_{(\Sigma)}\sigma\delta\varphi\, d\Sigma \tag{2.7}$$

справджується для довільних допустимих варіацій $\delta\varphi$, отримано визначальні співвідношення для компонент електричних моментів

$$Q^{k_1\ldots k_n} = \rho\frac{\partial L}{\partial E_{k_1,k_2\ldots k_n}}.$$

У рівнянні (2.7) σ — густина поверхневого заряду.

У дослідженні [151] вказано також на можливість застосування запропонованого підходу для опису деформівних систем. При цьому допускається залежність лагранжіана системи як від тензора деформації та вектора напруженості електричного поля, так і їх градієнтів.

Подібним чином розглянуто тіла, які характеризуються магнітними моментами першого та вищих порядків. За чотиривимірного опису досліджено системи, стан яких характеризується як електричними, так і магнітними моментами. При цьому в згаданих моделях дисипацією енергії нехтується.

У наближенні, в якому враховано лише електричні моменти не вище квадрупольного, записано лінійні визначальні співвідношення для недеформівного тіла [151]. На цій основі розв'язано ряд задач електростатики. Зокрема, встановлено, що наслідком врахування квадрупольного моменту системи (градієнта напруженості електричного поля) є відсутність особливостей у формулах для потенціалу та напруженості електричного поля, створених точковим зарядом у такому середовищі. На відміну від класичної теорії, ємність провідної кулі у квадрупольному середовищі є нелінійна функція її радіуса, а показник заломлення такого середовища залежить від частоти.

Надалі теорія пружних діелектриків із врахуванням електричних квадруполів набула розвитку в роботах [101, 122, 137, 144, 153-155, 183, 185, 203, 216] та ін. Зокрема, теплові ефекти враховано в праці [153], градієнт поляризації в [144], градієнт тензора деформації в [155]. Порівняльний аналіз теорій, які враховують градієнт напруженості електричного поля (електричні квадруполі), та теорій, які враховують градієнт вектора поляризації, провів *Maugin* [185].

У роботі [101] із використанням варіаційного підходу отримано рівняння Максвелла, руху та матеріальні співвідношення для поляризовних намагнічуваних середовищ із дипольним і квадрупольним електричними та дипольним магнітним моментами. Лагранжіан системи подано сумою електромагнітного та матеріального складників і лагранжіана взаємодії. Під час побудови останнього тіло розглядають як систему заряджених частинок, а для отримання макроскопічних співвідношень застосовують процедуру усереднення. У підсумку лагранжіан взаємодії отримують у вигляді розвинення за електричними дипольним і квадрупольним та магнітним дипольним моментами. Проведено порівняння отриманих модельних співвідношень із відомими з літератури.

Yang X., Hu та *Yang J.* [255] під час моделювання взаємозв'язаних деформаційних та електричних процесів у діелектричних тілах прийняли, що внутрішня енергія U є функція тензора деформації, вектора напруженості електричного поля та його просторового градієнта, тобто $U\left(\hat{e}, \vec{E}, \vec{\nabla}\vec{E}\right)$, та ввели у розгляд функціонал

$$\Gamma\left(\vec{u},\varphi\right)=\int\limits_{(V)}\left[U\left(\hat{e},\vec{E},\vec{\nabla}\vec{E}\right)-\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}\cdot\vec{E}-\vec{F}_v\cdot\vec{u}+\rho_e\varphi\right]dV-$$
$$-\int\limits_{(\Sigma)}\left(\vec{\sigma}_a\cdot\vec{u}+\sigma\varphi+\vec{\pi}_c\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\right)d\Sigma\,. \tag{2.8}$$

Тут $\vec{\pi}_c$ — характеризує величину квадрупольного моменту на поверхні тіла [255].

Означивши внутрішню енергію співвідношенням [255]

$$U\left(\hat{\sigma},\vec{E},\vec{\nabla}\vec{E}\right)=\frac{1}{2}\left(\hat{C}^{(4)}:\hat{e}\right):\hat{e}-\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\hat{\chi}\cdot\vec{E}\right)\cdot\vec{E}-\left(\hat{h}^{(3)}\cdot\vec{E}\right):\hat{e}-$$

$$-\varepsilon_0\left(\hat{\beta}^{(3)}\cdot\vec{E}\right):\vec{\nabla}\vec{E}-\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\hat{\alpha}^{(4)}:\vec{\nabla}\vec{E}\right):\vec{\nabla}\vec{E},$$

з умови стаціонарності функціонала (2.8) отримали рівняння рівноваги

$$\vec{\nabla}\cdot\hat{\sigma}+\vec{F}_v=0 \tag{2.9}$$

та рівняння електростатики

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_e, \tag{2.10}$$

до яких долучили такі матеріальні співвідношення

$$\hat{\sigma}=\frac{\partial U}{\partial\hat{e}}=\hat{C}^{(3)}:\hat{e}-\hat{h}^{(3)}\cdot\vec{E},$$

$$\vec{\Pi}_d=-\frac{\partial U}{\partial\vec{E}}=\hat{h}^{(3)}:\hat{e}+\varepsilon_0\hat{\chi}\cdot\vec{E}+\varepsilon_0\hat{\beta}^{(3)}:\left(\vec{\nabla}\vec{E}\right),$$

$$\hat{\Pi}_c=-\frac{\partial U}{\partial\left(\vec{\nabla}\vec{E}\right)}=\varepsilon_0\hat{\beta}^{(3)}\cdot\vec{E}+\varepsilon_0\hat{\alpha}^{(4)}:\left(\vec{\nabla}\vec{E}\right); \tag{2.11}$$

$$\vec{P}=\vec{\Pi}_d-\vec{\nabla}\cdot\hat{\Pi}_c,\qquad \vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}. \tag{2.12}$$

Тут $\hat{\chi}$ — тензор діелектричної сприйнятливості $\left(\hat{\varepsilon}=\varepsilon_0\left(\hat{I}+\hat{\chi}\right)\right)$, $\hat{\beta}^{(3)}$ й $\hat{\alpha}^{(4)}$ — нові характеристики матеріалу, а векторна $\vec{\Pi}_d$ та тензорна $\hat{\Pi}_c$ величини пов'язані відповідно з електричним дипольним і квадрупольним моментами [255].

Наслідком функціонала (2.8) також є відповідні крайові умови на поверхні (Σ)

$$\hat{\sigma}\cdot\vec{n}=\vec{\sigma}_a \quad \text{або} \quad \delta\vec{u}=0,$$

$$\int\limits_{(\Sigma)}\left[\left(\vec{D}\cdot\vec{n}-\sigma\right)\delta\varphi+\left(\hat{\Pi}\cdot\vec{n}\right)\cdot\left(\vec{\nabla}_\Sigma\delta\varphi\right)\right]d\Sigma=0,$$

$$\left(\hat{\Pi}\cdot\vec{n}\right)\cdot\vec{n}=\overline{\pi} \quad \text{або} \quad \delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\right)=0, \tag{2.13}$$

де $\vec{\nabla}_\Sigma$ — оператор поверхневого градієнта.

Зауважимо, що незважаючи на те, що підходи до побудови теорій діелектриків у працях [151] і [255] різні, у підсумку автори прийшли до еквівалентних теорій. У літературі такі теорії часто називають теоріями діелектриків із просторовою дисперсією [240].

У роботі [255] із використанням співвідношень (2.9)-(2.13) показано, що потенціал електричного поля лінійного електричного заряду є обмежена функція. Ємність кругової циліндричної оболонки з такого матеріалу для малих товщин суттєво зменшується зі зменшенням товщини, а для плоскої механоелектромагнітної хвилі, яка поширюється в тілі, характерна високочастотна дисперсія. Для оболонки, на поверхнях якої задано сталу у часі різницю електричних потенціалів, на відміну від класичної теорії, вузькій приповерхневій області властива нелінійність розподілів механічних деформацій і напруженості електричного поля.

У працях [253, 255] співвідношення (2.9)-(2.13) застосовані для пояснення аномальної залежності ємностей тонких діелектричних плівок від їхньої товщини. Роботу [241] присвячено вивченню розмірного ефекту у тонких діелектричних плівках.

Вплив градієнта вектора напруженості електричного поля на процес поширення неплоских поверхневих хвиль у півпросторі поляризованої кераміки досліджено у [168], а поширення плоских хвиль уздовж поверхні двох контактуючих між собою поляризовних керамічних півпросторів — у праці [258]. Показано, що, завдяки розширенню простору параметрів стану градієнтом вектора напруженості електричного поля, вдається описати дисперсію коротких поверхневих хвиль, що не враховує класична лінійна теорія п'єзоелектриків.

У роботі [257] досліджено збурення електричного поля, спричинене циліндричним непровідним неферомагнітним включенням у безмежному непровідному неферомагнітному середовищі у зовнішньому постійному однорідному на безмежності електричному полі. Для матеріалів включення та матриці враховано залежність стану від першого градієнта напруженості електричного поля (від квадрупольного електричного моменту). Встановлено, що для тонкого включення розподіл напруженості електричного поля у включенні відмінний від розподілу, який передбачає класична теорія. Ефективна діелектрична проникність включення залежить від його діаметра. Відзначено, що такий розмірний ефект може бути важливим для розрахунку композитних матеріалів і наноструктур [257].

Wang, Pan та *Feng* [239] вивчили пружні й електричні поля, індуковані дією стаціонарної лінійної сили та лінійного електричного заряду. Співвідношення моделі, у простір параметрів стану якої введено градієнт напруженості електричного поля, застосували для дослідження електричних і деформаційних полів в околі тріщини [251, 260], а в [256] — в околі малої циліндричної порожнини в п'єзоелектричному середовищі.

2.4. Середовища з функціональними конститутивними рівняннями просторового типу. У ряді робіт для опису нелокальних ефектів автори виходять із визначальних рівнянь, заданих інтегральними (функціональними) співвідношеннями між параметрами стану. Ядра таких співвідношень залежать, зазвичай, від різниці радіусів-векторів біжучої точки та довколишніх точок тіла. Таким чином враховують взаємовплив станів різних точок тіла (нелокальність). У науковій літературі термін «нелокальні» закріпився, власне, за такими моделями. Для нелокальної моделі електромеханіки рівняння стану мають вигляд

$$\hat{\sigma}(\vec{r}) = \int\limits_{(V)} \left[\hat{C}^{(4)}(\vec{r},\vec{r}') : \hat{e}(\vec{r}') - \hat{h}^{(3)}(\vec{r},\vec{r}') \cdot \vec{E}(\vec{r}') \right] dV(\vec{r}'),$$

$$\vec{P}(\vec{r}) = \int\limits_{(V)} \left[\hat{\varepsilon}(\vec{r},\vec{r}') \cdot \vec{E}(\vec{r}') + \hat{h}^{(3)}(\vec{r},\vec{r}') : \hat{e}(\vec{r}') \right] dV(\vec{r}'). \quad (2.14)$$

Отож, тензор напружень $\hat{\sigma}$ та вектор поляризації $\vec{P}$ у точці з радіус-вектором $\vec{r}$ залежать не лише від значень тензора деформації $\hat{e}$ та напруженості електричного поля $\vec{E}$ у цій точці, а й від їхніх значень в усіх точках тіла.

Серед досліджень згаданого напрямку, насамперед, слід згадати роботи [134, 135, 139], автори яких природним чином узагальнювали запропоновані раніше нелокальні моделі теорії пружності [132, 133] на п'єзоелектрики. Загальнішу нелокальну теорію п'єзоелектриків подано в монографії *Eringen* і *Maugin* [136]. *Eringen* і *Kim* [134] проаналізували взаємозв'язок нелокальних теорій із теорією ґратки.

У перелічених дослідженнях нелокальні теорії п'єзоелектриків застосовані для пояснення тих ефектів, які не можуть обґрунтувати співвідношення класичної теорії електромагнітомеханіки. Зокрема, в [135] вивчено дисперсію коротких плоских хвиль і поле точкового електричного заряду. З використанням нелокального взаємозв'язку між ненульовими компонентами векторів поляризації P та напруженості E електричного поля [138]

$$P = \varepsilon_0 \chi \int_0^h K\left(x', x\right) E\left(x'\right) dx',$$

де $K\left(x', x\right) = \left(2\alpha\right)^{-1} \exp\left(-\left|x' - x\right| / \alpha\right)$ (тут α — характеристична довжина мікроскопічної взаємодії), *Yang* дослідив аномальну залежність ємності тонких плівок від їх товщини [246] і показав хороше узгодження отриманих ним результатів із теоретичними роботами *Міндліна* [191] та експериментальними результатами *Міда* [187].

Принагідно відзначимо, що в науковій літературі широко висвітлені дослідження хвильових електромагнітних процесів у нелокальних середовищах, рівняння стану яких задані співвідношенням на взірець (2.14) [3, 61, 77]. Такі середовища також називають середовищами з просторовою дисперсією.

2.5. Врахування процесу локального зміщення маси. *Бурак* [16] прийняв, що потік маси може мати складник $\partial\vec{\Pi}/\partial t$ неконвективної та недифузійної природи і пов'язав цей потік із процесом, який назвав локальним зміщенням маси, а $\vec{\Pi}$ — вектором такого зміщення. Врахування такого складника за припущення, що він приводить до потоку енергії $\mu\,\partial\vec{\Pi}/\partial t$, де μ — хімічний потенціал речовини, дозволило побудувати нелокальну теорію фізико-механічних процесів у твердих пружних і термопружних одно- та багатокомпонентних тілах, названу локально-градієнтною [15, 17, 25-27, 69, 70, 73, 201]. Праця [28] містить докладний огляд робіт цього напрямку. У роботах [20, 52, 63] уточнено закон збереження енергії термопружних одно- та багатокомпонентних систем за врахування локального зміщення маси, введено поняття наведеної маси та встановлено закон її збереження.

Під час запису рівняння балансу маси враховано, що вектор потоку маси $\vec{J}_*$ є сума конвективного складника $\rho\vec{v}_*$ ($\vec{v}_*$ — вектор середньої швидкості переміщення частинок тіла) та складника $\vec{J}_{ms}$, пов'язаного з упорядкуванням структури фізично малого елемента (частинки) тіла, тобто $\vec{J}_* = \rho\vec{v}_* + \vec{J}_{ms}$. Тоді рівняння балансу маси має вигляд

$$\frac{d}{dt}\int_{(V)} \rho dV = -\int_{(\Sigma)} \left(\rho\vec{v}_* + \vec{J}_{ms}\right)\cdot\vec{n}d\Sigma . \tag{2.15}$$

Співвідношенням $\vec{\Pi}_m(t) = \int_0^t \vec{J}_{ms}(t')\,dt'$ введено у розгляд вектор локального зміщення маси. Звідси

$$\vec{J}_{ms} = \frac{\partial\vec{\Pi}_m}{\partial t} . \tag{2.16}$$

За такого підходу вектор $\vec{v}$ швидкості центра мас частинок тіла визначають виразом $\vec{v} = \rho^{-1}\left(\rho\vec{v}_* + \partial\vec{\Pi}_m/\partial t\right)$. Отож, у локальній формі рівняння балансу маси (2.15) набуває стандартного вигляду

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0 . \tag{2.17}$$

Аналогічно до поняття наведеного електричного заряду [13], у розгляд вводять густину наведеної маси $\rho_{m\pi}$ так, щоб для довільного тіла скінченних розмірів (область (V)) вектор $\vec{\Pi}_m$ локального зміщення маси та густина $\rho_{m\pi}$ справджували співвідношення [52]

$$\int_{(V)} \vec{\Pi}_m dV = \int_{(V)} \rho_{m\pi}\vec{r}\, dV . \tag{2.18}$$

Наслідком формули (2.18) є

$$\rho_{m\pi} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_m . \tag{2.19}$$

При цьому для $\rho_{m\pi}$ справджується рівняння

$$\frac{\partial\rho_{m\pi}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_{ms} = 0 , \tag{2.20}$$

яке має форму закону збереження наведеної маси [52].

Записавши рівняння балансу енергії й ентропії та провівши їх аналіз, автори [29, 52, 63] отримали повну систему співвідношень нелокальної (градієнтної) моделі термопружного твердого тіла та в’язкої рідини. Під час моделювання механотермодифузійних процесів у багатокомпонентних розчинах приймали, що локальне зміщення маси властиве лише розчиннику (скелету) [20, 30].

Надалі процес локального зміщення маси було враховано під час побудови моделей електромагнітотермомеханіки неферомагнітних поляризовних тіл [19, 51, 105]. При цьому рівняння балансу енергії системи «тіло-електромагнітне поле» в інтегральній формі записано у вигляді [19]

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(V)}\left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2+\rho u+U_e\right)dV=-\oint\limits_{(\Sigma)}\left[\rho\left(u+\frac{1}{2}\vec{v}^2\right)\vec{v}-\hat{\sigma}\cdot\vec{v}+\right.$$

$$\left.+\vec{S}_e+\vec{J}_q+\mu\vec{J}_m+\mu_\pi\frac{\partial\vec{\Pi}_m}{\partial t}\right]\cdot\vec{n}\,d\Sigma+\int\limits_{(V)}\left(\rho\vec{F}\cdot\vec{v}+\rho\Re\right)dV\,. \qquad (2.21)$$

Тут u, $\rho\vec{v}^2/2$ й U_e — питома внутрішня, кінетична енергії й енергія електромагнітного поля відповідно; $\vec{J}_q$ — потік тепла; $\mu\vec{J}_m$, $\mu_\pi\,\partial\vec{\Pi}_m/\partial t$ — роботи, затрачені на перенесення маси й упорядкування структури тіла (локальним зміщенням маси); $\vec{J}_m=\rho(\vec{v}-\vec{v}_*)$; $\vec{F}$ — масова сила; $\Re$ — розподілені теплові джерела; μ_π — міра зміни внутрішньої енергії системи, зумовленої локальним зміщенням маси.

Якщо врахувати співвідношення (2.19) і (2.16), рівняння балансу маси (2.17) та ентропії, а також енергії електромагнітного поля [19]

$$\frac{\partial U_e}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{S}_e+\left(\vec{J}_e+\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\right)\cdot\vec{E}=0\,,$$

і використати теорему Остроградського-Ґаусса, то з (2.21) отримаємо таку локальну форму рівняння балансу внутрішньої енергії

$$\rho\frac{du}{dt}=\rho T\frac{ds}{dt}+\hat{\sigma}_*:\frac{d\hat{e}}{dt}+\rho\vec{E}_*\cdot\frac{d\vec{p}}{dt}+\rho\mu'_\pi\frac{d\rho_m}{dt}-\rho\vec{\nabla}\mu'_\pi\cdot\frac{d\vec{\pi}_m}{dt}+$$

$$+\vec{J}_{e*}\cdot\vec{E}_*-\vec{J}_q\cdot\frac{\vec{\nabla}T}{T}-T\sigma_s+\vec{v}\cdot\left\{-\rho\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{\nabla}\cdot\hat{\sigma}_*+\rho\vec{F}_*+\vec{F}_e\right\}, \qquad (2.22)$$

де $\mu'_\pi=\mu_\pi-\mu$, $\vec{\pi}_m=\vec{\Pi}_m/\rho$, $\rho_m=\rho_{m\pi}/\rho$, $\vec{E}_*=\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}$, $\vec{J}_{e*}=\vec{J}_e-\rho_e\vec{v}$, $\hat{\sigma}_*=\hat{\sigma}-$ $-\rho\left(\vec{E}_*\cdot\vec{p}-\rho_m\mu'_\pi-\vec{\pi}_m\cdot\vec{\nabla}\mu'_\pi\right)\hat{I}$, $\vec{F}_*=\vec{F}+\rho_m\vec{\nabla}\mu'_\pi-\vec{\pi}_m\cdot\vec{\nabla}\vec{\nabla}\mu'_\pi$, $\vec{F}_e=\rho_e\vec{E}_*+\left(\vec{J}_{e*}+\right.$ $\left.+\frac{\partial(\rho\vec{p})}{\partial t}\right)\times\vec{B}+\rho\left(\vec{\nabla}\vec{E}_*\right)\cdot\vec{p}$.

Перейшовши у рівнянні (2.22) до узагальненої вільної енергії Гельмгольца $f=u-Ts-\vec{E}_*\cdot\vec{p}+\vec{\nabla}\mu'_\pi\cdot\vec{\pi}_m$, враховуючи інваріантність цього рівняння відносно просторових трансляцій і припускаючи, що вільну енергію f визначають скалярні T, ρ_m, векторні $\vec{E}_*,\vec{\nabla}\mu'_\pi$ і тензорний $\hat{e}$ параметри, які незалежні, тобто $f=f\left(T,\ \mu'_\pi,\ \vec{E}_*,\ \vec{\nabla}\mu'_\pi,\hat{e}\right)$, отримаємо узагальнене рівняння Ґіббса

$$df=-sdT+\rho^{-1}\hat{\sigma}_*:d\hat{e}-\vec{p}\cdot d\vec{E}_*+\mu'_\pi d\rho_m+\vec{\pi}_m\cdot d\vec{\nabla}\mu'_\pi\,, \qquad (2.23)$$

вираз для виробництва ентропії

$$\sigma_s = \vec{J}_{e*} \cdot \frac{\vec{E}_*}{T} - \vec{J}_q \cdot \frac{\vec{\nabla} T}{T^2} \qquad (2.24)$$

та рівняння балансу імпульсу

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma}_* + \vec{F}_e + \rho \vec{F}_* . \qquad (2.25)$$

Зауважимо, що у виразі (2.24) для виробництва ентропії відсутні складники, зумовлені поляризацією та зміщенням маси, оскільки тут ці процеси розглянуто у наближенні оборотних. Бачимо також, що врахування локального зміщення маси, як і локального зміщення електричного заряду (поляризації), приводить до виникнення у рівнянні руху додаткових (пондеромоторних) масових сил і переозначення тензора напружень [19, 51, 105].

Із рівняння Гіббса (2.23) випливає, що для опису локального термодинамічного стану середовища поруч із такими загальноприйнятими параметрами стану, як температура-ентропія, тензор напружень-тензор деформацій і вектор поляризації-вектор напруженості електричного поля введено дві пари додаткових параметрів, а саме:

- питому наведену масу ρ_m і приведену енергетичну міру μ'_π впливу зміщення маси на внутрішню енергію тіла,
- вектор $\vec{\pi}_m$ питомого зміщення маси та просторовий градієнт $\vec{\nabla}\mu'_\pi$ енергетичної міри μ'_π.

Таким чином до параметрів локального термодинамічного стану середовища входить градієнт величини μ'_π, що дозволяє назвати сформульовану модель градієнтною чи локально-градієнтною. Побудована модель діелектричних тіл враховує взаємозв’язок деформаційних та електромагнітних процесів і у випадку просторової ізотропії [51, 105].

Одержані модельні співвідношення дозволили описати приповерхневу неоднорідність напружено-деформованого стану й електричної поляризації, виникнення наведеного поверхневого зв’язаного електричного заряду та електричного імпульсу внаслідок утворення поверхонь шару [19, 105]. За такого модельного опису тіло поляризується внаслідок дії не лише електричного поля, а й градієнта величини μ'_π. В околі поверхні тіла величина $\left|\vec{\nabla}\mu'_\pi\right|$ може бути суттєва та спричинити вагому приповерхневу поляризацію тіла [19, 105]. Отримані результати можуть бути важливі для опису та дослідження електромагнітної емісії, внаслідок утворення нової поверхні в тілі, чи електромагнітного відгуку тіла на нестаціонарну силову дію на його поверхню.

Шляхом виключення з теорії параметрів, які характеризують зміщення маси, у праці [51] сформульовано повну систему інтегродиференціальних співвідношень просторово нелокальної електромагнітотермомеханіки поляризовних тіл.

У роботах [53, 207] показано, що рівняння електромеханіки, які є частковим випадком побудованої моделі електромагнітотермомеханіки, дозволяють коректно описати результати експерименту Міда [187], які стосувалися дослідження електричних властивостей тонких діелектричних плівок. Як уже зазначалося вище, раніше такий же ж результат отримали на основі моделей електромеханіки діелектриків, побудованих за врахування залежності локального стану середовища від градієнта вектора поляризації [191], градієнта вектора напруженості електричного поля [151, 253] та з використанням інтегрального взаємозв'язку між векторами поляризації та напруженістю електричного поля [246].

У праці [54] ключові лінеаризовані рівняння моделі електромагнітомеханіки поляризовних твердих тіл, що враховує процес локального зміщення маси, записано відносно скалярних і векторних потенціалів вектора переміщення та векторів електромагнітного поля. Запропоновано узагальнення калібрування Лоренца, за якого рівняння для визначення скалярного та векторного потенціалів електромагнітного поля стають незв'язаними та введено параметр взаємозв'язку процесів локального зміщення маси й деформування. На цій основі досліджено процес поширення плоскої гармонічної хвилі у безмежному ізотропному середовищі та показано, що співвідношення моделі [19, 54, 105], також описують дисперсію пружної хвилі в області високих частот.

В усіх роботах, що передували [31], процес локального зміщення маси описували у наближенні оборотного. У згаданій роботі для діелектричних тіл враховано необоротність процесу локального зміщення маси. Як наслідок отримано нелокальні за часом визначальні співвідношення з експоненціальними ядрами релаксації. У праці [31] вказано, що така модель дозволяє аналізувати кінетику становлення приповерхневої неоднорідності напружено-деформованого стану пружних поляризовних тіл. У дослідженні [32] отримано повні системи співвідношень механотермоелектродифузії як рідкого, так і твердого розчинів за урахування необоротності процесу локального зміщення маси. Застосовані до опису механічних, теплових, електромагнітних і дифузійних процесів у скелеті пористого тіла та поровій рідині, доповнені відповідними умовами спряження полів на межі контакту фаз ці співвідношення складають повну систему мезорівнянь механотермоелектродифузії для пористого електропровідного неферомагнітного поляризовного середовища. Вона є основа для отримання шляхом просторового усереднення відповідної системи макрорівнянь з урахуванням ефектів контактної взаємодії твердої та рідкої фаз. Зауважимо, що визначальні рівняння термомеханіки з урахуванням локального зміщення маси для спадкових середовищ із загасаючою пам'яттю отримано в [33].

3. Двоконтинуумні теорії діелектриків

Відомо, що більшість матеріалів не одно-, а багатокомпонентні за своїм складом і характеризується складною внутрішньою структурою. Однак, класичні континуальні теорії не враховують можливі відносні зміщення атомів різних хімічних елементів у рамках комірки і це одна з причин того, що такі спрощені теорії не описують низку спостережуваних ефектів. Це стало поштовхом до застосування багатоконтинуумних підходів для побудови узагальнених теорій діелектриків, які б враховували складну внутрішню структуру тіл. Одна з таких спроб була реалізована ще у 50 роках минулого століття у роботах [103, 149], у яких, ґрунтуючись на теорії динаміки ґратки, сформульовані рівняння взаємозв'язаної електромагнітомеханіки двоатомних оптично ізотропних іонних кристалів.

Міндлін на прикладі кристалів простої структури на взірець NaCl [195, 196] узагальнив ці рівняння, приймаючи за параметри стану два тензори деформацій $\hat{e}^{(i)} = \left[\vec{\nabla}\vec{u}^{(i)} + \vec{u}^{(i)}\vec{\nabla} \right] / 2$, взаємні зміщення двох іонів $\vec{u}^* = \vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}$, тензор відносних поворотів $\hat{\omega}^* = \left[\vec{\nabla}\vec{u}^* - \vec{u}^*\vec{\nabla} \right] / 2$, вектори $\vec{P}^{(1)}$, $\vec{P}^{(2)}$ поляризації підсистем, а також два градієнти векторів поляризації $\vec{\nabla}\vec{P}^{(i)}$. Тут верхні індекси $i = 1, 2$ відповідають континуумам різних сортів іонів. Відтак, густину повної внутрішньої енергії U *Міндлін* означив як суму $U = U^L + \varepsilon_0 \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\varphi / 2$, де U^L — густина енергії деформування та поляризації, яка є функцією таких параметрів $U^L = U^L\left(\hat{e}^{(1)}, \hat{e}^{(2)}, \vec{P}^{(1)}, \vec{P}^{(2)}, \vec{\nabla}\vec{P}^{(1)}, \vec{\nabla}\vec{P}^{(2)}, \vec{u}^*, \hat{\omega}^*\right)$, а $\varepsilon_0 \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\varphi / 2$ — густина енергії макроскопічного електричного поля $\left(\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi\right)$. Густина кінетичної енергії за такого підходу має вигляд: $K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \rho^{(i)} \frac{d\vec{u}^{(i)}}{dt} \cdot \frac{d\vec{u}^{(i)}}{dt}$, де $\rho^{(i)}$ — густина маси частинок i-го континуума, а електрична ентальпія H означена так: $H = U^L - \varepsilon_0 \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\varphi / 2 + \vec{\nabla}\varphi \cdot \left(\vec{P}^{(1)} + \vec{P}^{(2)} + q\vec{u}^*\right)$. Систему співвідношень моделі двоатомних діелектриків *Міндлін* отримав на основі узагальненого варіаційного принципу, який стосовно кристалів такої структури набуває вигляду

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{(V^*)} (K - H)\, dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{2} \int_{(V)} \left(\vec{F}_v^{(k)} \cdot \delta\vec{u}^{(k)} + \vec{E}^0 \cdot \delta\vec{P}^{(k)} + q\vec{E}^0 \cdot \delta\vec{u}^* \right) dV dt +$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{2} \int_{(\partial V)} \vec{\sigma}_a^{(k)} \cdot \delta\vec{u}^{(k)} d\Sigma\, dt = 0 . \tag{2.26}$$

Якщо врахувати рівняння стану

$$\hat{\sigma}^{(k)} = \frac{\partial U^L}{\partial \hat{e}^{(k)}}, \quad \vec{E}^{L(k)} = -\frac{\partial U^L}{\partial \vec{P}^{(k)}}, \quad \hat{E}^{(k)} = \frac{\partial U^L}{\partial\left(\vec{\nabla}\vec{P}^{(k)}\right)}, \quad \vec{T}^* = \frac{\partial U^L}{\partial \vec{u}^*}, \quad \hat{T}^* = \frac{\partial U^L}{\partial \hat{\omega}^*},$$

то з (2.26) випливають такі рівняння Ейлера

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma}^{(k)} + (-1)^{(k)}\left(\vec{\nabla} \cdot \hat{T}^* - \vec{T}^* - q\vec{\nabla}\varphi + q\vec{E}^0 \right) + \vec{F}_v^{(k)} = \rho^{(k)} \frac{d^2\vec{u}^{(k)}}{dt^2},$$
$$\vec{E}^{L(k)} + \vec{\nabla} \cdot \hat{E}^{(k)} - \vec{\nabla}\varphi + \vec{E}^0 = 0,$$
$$-\varepsilon_0 \vec{\nabla}^2\varphi + \vec{\nabla} \cdot \vec{P}^{(1)} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P}^{(2)} + q\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^* = 0 \quad \forall \vec{r} \in (V);$$
$$\vec{\nabla}^2\varphi = 0 \quad \forall \vec{r} \in (V_v)$$

та крайові умови $\forall\vec{r} \in (\Sigma)$

$$\left[\hat{\sigma}^{(k)} + (-1)^{(k)}\hat{T}^*\right]\cdot\vec{n} = \vec{\sigma}_a^{(k)}, \ \hat{E}^{(k)}\cdot\vec{n} = 0, \ \left(-\varepsilon_0\left|\vec{\nabla}\varphi\right| + \vec{P}^{(1)} + \vec{P}^{(2)} + q_*\vec{u}^*\right)\cdot\vec{n} = 0.$$

Завдяки врахуванню градієнтів векторів переміщення і поляризації та докладнішому опису взаємодії між підсистемами [194], отримано рівняння, що, зокрема, ефективно описують короткі хвилі, а дисперсійне рівняння для плоских хвиль, окрім оптичної й електромагнітної віток, містить також акустичну вітку. *Міндлін* навів зв'язок між співвідношеннями градієнтної теорії п'єзоелектриків і рівняннями двоатомних діелектричних середовищ, отриманими ним на основі двоконтинуумного підходу [194].

Варіаційне рівняння п'єзоелектромагнетизму для двоатомних діелектричних середовищ записано в [200].

Askar і *Lee* [99] на мікроскопічному рівні досліджували двоатомні пружні діелектрики з використанням теорії ґратки. Це дозволило їм визначити матеріальні коефіцієнти у рівняннях стану, введені у градієнтній теорії Міндліна. Числові результати наведено для NaI, NaCl, KI та KCl.

Багатоконтинуумний підхід до дослідження діелектричних деформівних тіл застосовували також *Demiray* та *Dost* [123-125]. Так, у праці [123] з використанням варіаційного принципу, сформульованого для діелектричних тіл Тупіним, та концепції парціальних напружень отримано рівняння поля та конститутивні рівняння для двоатомних поляризованих тіл, а у [124] теорію двоатомних пружних діелектриків розвинено на випадок врахування інерційних ефектів і градієнта вектора поляризації.

У роботах [86, 88, 89] запропоновано іншу концепцію побудови теорії взаємозв'язаних механічних та електромагнітних процесів у діелектричних тілах. Діелектрики автор розглядає як суміш позитивних і негативних зарядів, пов'язаних між собою у нейтральні частинки. Для опису механічного руху заряджених підсистем застосовано двоконтинуумний підхід теорії сумішей. За такого підходу рівняння балансу імпульсу позитивних і негативних зарядів мають вигляд

$$\rho^{(k)}\frac{d^2\vec{u}^{(k)}}{dt^2} = \vec{\nabla}\cdot\hat{\sigma}^{(k)} + (-1)^{(k+1)}\vec{R} + \vec{F}^{(k)}, \quad k = 1, 2. \tag{2.27}$$

Тут $\hat{\sigma}^{(k)}$ — парціальні напруження, які є складниками рівнодійних сил, що діють на додатні ($k = 1$) та від'ємні ($k = 2$) заряди площинки діелектрика, віднесені до її площі, $\rho^{(k)}$ та $\vec{u}^{(k)}$ — густина маси та вектор переміщень відповідних зарядів, $\vec{R}$ — віднесена до елементарного макрооб'єму результуюча сила взаємодії між додатними та від'ємними зарядами, $\vec{F}^{(k)}$ — зовнішні об'ємні сили, які діють на відповідну зарядову підсистему. За такого підходу для приросту внутрішньої енергії отримано співвідношення

$$\frac{dU}{dt} = \hat{\sigma}^{(1)} : \frac{d\hat{e}^{(1)}}{dt} + \hat{\sigma}^{(2)} : \frac{d\hat{e}^{(2)}}{dt} - \vec{R}\cdot\left(\frac{d\vec{u}^{(1)}}{dt} - \frac{d\vec{u}^{(2)}}{dt}\right),$$

на основі якого внутрішню енергію системи означено як функцію тензорів деформацій $\hat{e}^{(1)}$ й $\hat{e}^{(2)}$ та відносного зміщення $\vec{u}^{(1)}-\vec{u}^{(2)}$. Тоді рівняння стану є такі

$$\hat{\sigma}^{(1)}=\frac{\partial U}{\partial\hat{e}^{(1)}},\qquad \hat{\sigma}^{(2)}=\frac{\partial U}{\partial\hat{e}^{(2)}},\qquad \vec{R}=-\frac{\partial U}{\partial\left(\vec{u}^{(1)}-\vec{u}^{(2)}\right)}. \tag{2.28}$$

На основі (2.27) і (2.28) отримано рівняння, які описують зв'язані динамічні поля макроскопічних переміщень $\vec{u}=\left(\vec{u}^{(1)}+\vec{u}^{(2)}\right)/2$ нейтральних частинок і взаємних зміщень $\vec{u}'=\left(\vec{u}^{(1)}-\vec{u}^{(2)}\right)/2$ додатних та від'ємних зарядів. Далі, виходячи з визначення вектора поляризації $\vec{P}=2Nq\vec{u}'$ та спричиненого ним електричного поля $\vec{E}=-8\pi Nq\vec{u}'$ (де N — кількість молекул в одиниці макрооб'єму), рівняння механіки трансформуються у зв'язані рівняння відносно вектора переміщень $\vec{u}$ нейтральних молекул і вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$. У підсумку автор доходить висновку, що внутрішня енергія анізотропного пружного діелектрика залежить від деформацій, вектора напруженості електричного поля, спричиненого поляризацією тіла, а також його похідних за координатами [86]. Автор зазначає, що одержана ним ключова система рівнянь описує дисперсію поздовжньої електричної та поперечної електромагнітної хвиль у рухомих діелектриках, а також зв'язані акустичні й електромагнітні хвилі в діелектриках і п'єзоелектриках. При цьому для ізотропного тіла взаємозв'язок електромагнітного та механічного полів буде здійснюватися лише через динамічні складники, а у стаціонарному випадку взаємовплив цих полів відсутній.

Показано, що отримана таким чином система рівнянь двоконтинуумної механіки діелектриків співпадає з просторово усередненими рівняннями мікромеханіки попарно зв'язаних додатних і від'ємних зарядів, отриманими на основі дискретно-структурного методу [88], згідно якого тіло розглядають як дискретну систему нейтральних молекул, утворених додатним і від'ємним зарядами.

Висновки. Зроблено огляд лінійних теорій взаємозв'язаної електромагнітомеханіки діелектричних тіл, у тому числі нелокальних, стан яких визначається не лише загальноприйнятими параметрами (тензор деформації, вектор поляризації чи напруженості електричного поля), а й їхніми просторовими похідними, або зв'язок між спряженими параметрами стану вибирається у вигляді інтегральних співвідношень з ядрами, що залежать від просторових координат. Коротко викладено основні ідеї та співвідношення теорій п'єзоелектриків *Фойхта*, *Тупіна* та теорії діелектриків *Бурака*. Проведено стислий огляд нелокальних теорій діелектриків, які враховують у модельному описі залежність стану тіла від: градієнтів тензора деформації чи вектора поляризації; градієнтів вектора напруженості електричного поля чи вищих електричних моментів (квадруполів, октуполів тощо); теорій, які передбачають інтегральний взаємозв'язок між параметрами стану, а також теорій, у яких поруч з електромагнітними та деформаційними процесами враховують процес локального зміщення маси. Проаналізовано багатоконтинуумний підхід до побудови теорії взаємодії механічних та електромагнітних полів у пружних поляризовних середовищах. Показано, що нелокальні теорії діелектриків описують низку спостережуваних ефектів, які не вдається пояснити з використанням співвідношень класичної теорії.

Література

[1] *Аветисян, А. С.* Поверхностные электроупругие волны конечной амплитуды в пьезоэлектрической среде / *А. С. Аветисян* // Изв. НАН РА. Механика. — 1995. — Т. 48, № 2. — С. 27-37.

[2] *Агранович, З. С.* Электроупругие поля прямого пьезоэффекта при деформировании пьезокерамических тел / *З. С. Агранович, Н. И. Деревянко* // Прикл. механика. — 1974. — Т. 10, № 9. — С. 3-8.

[3] *Александров, А. Ф.* Основы электродинамики плазмы; под ред. *А. А. Рухадзе* / *А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе.* — Москва: Высшая шк., 1978. — 407 с.

[4] *Аэро, Е. Л.* Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц / *Е. Л. Аэро, Е. В. Кувшинский* // Физика твердого тела. — 1960. — Т. 2, вып. 7. — С. 1399-1409.

[5] *Багдасарян, Г. Е.* Электромагнитоупругие волны / *Г. Е. Багдасарян, З. Н. Даноян.* — Ереван: Изд. ЕГУ, 2006. — 492 с.

[6] *Багдасарян, Р. А.* Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке / *Р. А. Багдасарян, М. В. Белубекян, К. Б. Казарян.* — В сб.: Волновые задачи механики; под ред. *А. И. Веснинского, В. И. Ерофесева.* — Ниж. Новгород. — 1992. — С. 87-93.

[7] *Багдоев, А. Г.* Нелинейные волновые пучки в упругом, вязком, дисперсном и теплопроводящем пьезодиэлектрическом слое / *А. Г. Багдоев, А. В. Шекоян* // Изв. НАН Армении. Механика. — 1995. — Т. 44, № 1. — С. 64-72.

[8] *Балакирев, М. К.* Волны в пьезокристаллах / *М. К. Балакирев, И. А. Гилинский.* — Новосибирск: Наука, 1982. — 239 с.

[9] *Бардзокас, Д. И.* Электроупругость кусочно-однородных тел / *Д. И. Бардзокас, М. Л. Фильштинский.* — Сумы: «Университетская книга», 2000. — 308 с.

[10] *Белубекян, М. В.* О сдвиговой волне, локализованной вдоль движущейся границы пьезоэлектриков / *М. В. Белубекян, В. М. Белубекян* // Изв. НАН Армении. Механика. — 1994. — Т. 47, № 3-4. — С. 78-82.

[11] *Берберян, А. Х.* Переломление электроупругой сдвиговой волны на границе раздела пьезоэлектрических кристаллов кубической и гексагональной симметрии (классы 23 и 6mm) / *А. Х. Берберян* // Изв. НАН Армении. Механика. — 2002. — Т. 55, № 4. — С. 30-37.

[12] *Борисейко, В. А.* Соотношения электроупругости для пьезокерамических оболочек вращения / *В. А. Борисейко, В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко* // Прикл. механика. — 1976. — Т. 12, № 2. — С. 26-33.

[13] *Бредов, М. М.* Классическая электродинамика / *М. М. Бредов, В. В. Румянцев , И. Н. Топтыгин.* — Москва: Наука, 1985. — 400 с.

[14] *Бурак, Я. И.* Уравнения электроупругости изотропного диэлектрика в электростатическом поле / *Я. И. Бурак* // Физ.-хим. механика материалов. — 1966. — Т. 2, № 1. — С. 51-57.

[15] *Бурак Я. И.* Математическое моделирование локально-градиентных процессов в инерционных термомеханических системах / *Я.И.Бурак, Т. С. Нагирный* // Прикл. механика. — 1992. — Т. 28, №12. — С. 3-23.

[16] *Бурак, Я. Й.* Визначальні співвідношення локально-градієнтної термомеханіки / *Я. Й. Бурак* // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1987. — № 12. — С. 19-23.

[17] *Бурак Я. Й.* Теоретичні основи розрахунку локально-градієнтних термомеханічних систем з врахуванням поверхневих явищ / *Я. Й. Бурак, Т. С. Нагірний* // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 1993, № 4. — С. 24-30.

[18] *Бурак, Я. Й.* Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл; під заг. ред. *Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра*. Т. 1: Термомеханіка багатокомпонентних тіл низької електропровідності / *Я. Й. Бурак, О. Р. Гачкевич, Р. Ф. Терлецький.* — Львів: Сполом, 2006. — 300 с.
[19] *Бурак, Я. Й.* Приповерхневі механоелектромагнетні явища у термопружних поляризовних тілах за локального зміщення маси / *Я. Й. Бурак, В. Ф. Кондрат, О. Р. Грицина* // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2007. — № 4. — С. 5-17.
[20] *Бурак, Я. Й.* Математичне моделювання механотермодифузійних процесів у твердих розчинах при врахуванні локального зміщення маси / *Я. Й. Бурак, В. Ф. Кондрат, О. Р. Грицина* // Доп. НАН України. — 2007. — № 3. — С. 59-64.
[21] Введение в теорию термоэлектричества / *Д. И. Бардзокас, А. И. Зобнин, Н. А. Сеник, М. Л. Фильштинский.* — Москва: КомКнига, 2005. — Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. В 2 т. — Т. 1.— 312 с.
[22] *Гачкевич О. Р.* Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл; під заг. ред. *Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра.* Т. 2. Механотермодифузія в частково прозорих тілах / *О. Р. Гачкевич, Р. Ф. Терлецький, Т. Л. Курницький.* — Львів: Сполом, 2007. — 184 с.
[23] *Григорян, Э. Х.* О сдвиговых колебаниях пьезоэлектрического полупространства / *Э. Х. Григорян, Л. В. Саркисян* // Изв. НАН Армении. Механика. — 1996. — Т. 49, № 3. — С. 23-30.
[24] *Гринченко, В. Т.* Электроупругость / *В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко Н. А. Шульга;* под ред. *А. Н. Гузя.* — Механика связанных полей в элементах конструкций. В 5-и т. Т. 5. — Киев: Наук. думка, 1989. — 280 с.
[25] *Грицина, О. Р.* Рівноважний стан насиченої домішками кулі з покриттям з урахуванням приповерхневих явищ / *О. Р. Грицина, Т. С. Нагірний* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2000. — Т. 143, № 2. — С. 171-175.
[26] *Грицина, О. Р.* Міцність розтягуваного шару з домішками / *О. Р. Грицина, Т. С. Нагірний* // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2000. — № 4. — С.87-90.
[27] *Грицина, О. Р.* Механотермодифузійні процеси у розтягнутій пластині із врахуванням ефектів приповерхневої неоднорідності / *О. Р. Грицина, Т. С. Нагірний, К. А. Червінка* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2002. —Т. 45, № 1. — С. 123-127.
[28] *Грицина, О.* Локально градієнтний підхід у термомеханіці / *О. Грицина, Т. Нагірний, К. Червінка* // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2006. — Вип. 3. — С. 72-83.
[29] *Грицина, О.* Термомеханічні процеси у в'язкій рідині з урахуванням локального зміщення маси / *О. Грицина, В. Кондрат* // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2006.— Вип. 4. — С. 39-46.
[30] *Грицина, О.* Механотермодифузійні процеси в багатокомпонентних твердих розчинах з урахуванням необоротності локальних зміщень маси / *О. Грицина* // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2007. — Вип. 5. — С. 30-41.
[31] *Грицина, О.* Моделювання електротермомеханічних процесів у в'язкій електропровідній поляризованій рідині з урахуванням необоротності локальних зміщень маси та електричного заряду / *О. Грицина, В. Кондрат* // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2007. — Вип. 5. — С. 42-54.
[32] *Грицина, О.* Мезорівняння термомеханіки пористого насиченого рідиною багатокомпонентного середовища з урахуванням локальних зміщень маси та електричного заряду / *О. Грицина, В. Кондрат, Т. Нагірний* // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2007. — Вип. 6. — С. 30-43.
[33] *Грицина, О.* Визначальні співвідношення термомеханіки спадкових середовищ із загасаючою пам'яттю за урахування локального зміщення маси / *О. Грицина* // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2008. — Вип. 7. — С. 52-57.
[34] *Гузь, А. Н.* Акустоэлектромагнитоупругость / *А. Н. Гузь, Ф. Г. Махорт.* — Механика связанных полей в элементах конструкций. В 5-и т. Т. 3. — Киев: Наук. думка, 1988. — 288 с.
[35] *Гуляев, Ю. В.* Поверхностные электрозвуковые волны в твердых телах / *Ю. В. Гуляев* // Письма в ЖЭТФ. — 1969. — Т. 9, № 1. — С. 63-65.
[36] *Даноян, З. Н.* Поверхностные электроупругие волны Лява для двух слоев на пьезоэлектрической подложке / *З. Н. Даноян, Н. З. Даноян, Г. А. Манукян* // Изв. НАН РА. Механика. — 2001. — Т. 54, № 4. — С. 22-25.

[37] *Даноян, З. Н.* Электроупругие поверхностные волны Лява в пьезоэлектриках / *З. Н. Даноян* // В кн.: Проблемы механики тонких деформируемых тел. (Посвящ 80-летию академика НАН Армении С. А. Амбарцумяну). — Ереван, 2002. — С. 167-177.

[38] *Емцев, В. В.* Пары Френкеля в германии и кремнии. Обзор / *В. В. Емцев, Т. В. Машовец, В. В. Михнович* // Физ. и техн. полупроводников. — 1992. — Т. 26, вып. 1. — С. 22-44.

[39] *Жёлудев, И. С.* Симметрия и пьезоэлектрические свойства кристаллов / *И. С. Жёлудев* // Czech. J. Phys. — 1966. —Vol. 16, No 5. — P. 368-381.

[40] *Инденбом, В. Л.* Флексоэлектрический эффект и строение кристаллов / *В. Л. Инденбом, Е. Б. Логинов, М. А. Осипов* // Кристаллография. — 1981. — Т. 26, вып. 6. — С. 1157-1162.

[41] Исследование планарных колебаний пьезокерамических пластин / *В. Т. Гринченко, В. Л. Карлаш, В. В. Мелешко, А. Ф. Улитко* // Прикл. механика. — 1976. — Т. 12, № 5. — С. 71-78.

[42] *Калоеров, С. А.* Двумерная задача электроупругости для многосвязного пьезоэлектрического тела / *С. А. Калоеров, А. И. Баева, Ю. А. Глущенко* // Прикл. механика. — 2003. — Т. 39, № 1. — С. 84-91.

[43] *Калоеров, С. А.* Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей / *С. А. Калоеров, А. И. Баева, О. И. Бороненко.* — Донецк: ООО «Юго-Восток, Лтд», 2007. — 268 с.

[44] *Карлаш, В. Л.* Про один спосіб дослідження радіальних коливань тонкої п’єзокерамічної пластинки / *В. Л. Карлаш, А. Т. Улітко* // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1974. — № 9. — С. 804-807.

[45] *Карнаухов, В. Г.* Электротермовязкоупругость / *В. Г. Карнаухов, И. Ф. Киричок.* — Механика связанных полей в элементах конструкций. В 5-и т. Т. 4. — Киев: Наук. думка, 1988. — 320 с.

[46] *Кесенних, Г. Г.* Поперечные поверхностные акустические волны для изотропной подложки с пьезоэлектрическим слоем / *Г. Г. Кесенних, Любимов В. Н., Филиппов В. В.* // Акуст. журнал. — 1985. — Т. 31, вып. 4. — С. 492-495.

[47] *Кирилюк, В. С.* О напряженном состоянии пьезокерамического тела с плоской трещиной при антисимметричных нагрузках / *В. С. Кирилюк* // Прикл. механика. — 2006. — Т. 42, № 21. — С. 32-42.

[48] *Киричок, И. Ф.* Радиальные колебания и разогрев кольцевой пьезопластины при подводе электрического возбуждения к неоднородно электродированным плоскостям / *И. Ф. Киричок* // Прикл. механика. — 2004. — Т. 40, № 3. — С. 80-88.

[49] *Киселев, В. Ф.* Поверхностные явления в полупроводниках и диэлектриках / *В. Ф. Киселев.* — Москва: Наука, 1970. — 340 с.

[50] *Коган, Ш. М.* Пьезоэлектрический эффект при неоднородной деформации и акустическое рассеяние носителей тока в кристаллах / *Ш. М. Коган* // Физика твердого тела. — 1963. — Т. 5, № 10. — С. 2829-2831.

[51] *Кондрат, В.* Рівняння електромагнітотермомеханіки поляризовних неферомагнітних тіл за врахування локального зміщення маси / *В. Кондрат, О. Грицина* // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2008. — Вип. 8. — С. 69-83.

[52] *Кондрат, В.* Рівняння термомеханіки деформівного твердого тіла з урахуванням необоротності локального зміщення маси / *В. Кондрат, О. Грицина* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2008. — Т. 51, № 1. — С. 169-177.

[53] *Кондрат, В. Ф.* До опису аномалії Міда у тонких діелектричних плівках / *В. Ф. Кондрат, О. Р. Грицина* // Доп. НАН України. — 2009. — № 3. — С. 84-89.

[54] *Кондрат, В. Ф.* Механоелектромагнітна взаємодія в ізотропних діелектриках з урахуванням локального зміщення маси / *В. Ф. Кондрат, О. Р. Грицина* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2009. — Т. 52, № 1. — С. 150-158.

[55] *Корн, Г.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / *Г. Корн, Т. Корн.* — Москва: Наука, 1974. — 832 с.

[56] *Короткина, М. Р.* Электромагнитоупругость / *М. Р. Короткина.* — Москва: Изд. МГУ, 1988. — 304 с.

[57] *Космодамианский, А. С.* Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин / *А. С. Космодамианский, В. Н. Ложкин* // Прикл. механика. — 1977. — Т. 13, № 10. — С. 75-79.

[58] *Кудрявцев, Б. А.* Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная туннельная трещина на границе с проводником / *Б. А. Кудрявцев, В. З. Партон, В. И. Ракитин* // Прикл. мат. и механика. — 1975. — Т. 39, № 1. — С. 149-159.

[59] *Кудрявцев, Б. А.* Механика пьезоэлектрических материалов / *Б. А. Кудрявцев* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Механика твердого тела. — 1978. — Т. 11. — С. 5-66.

[60] *Кудрявцев, Б. А.* Трещина Гриффитса в пьезоэлектрической среде / *Б. А. Кудрявцев, В. И. Ракитин* // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1979. — № 1. — С. 125-132.

[61] *Ландау, Л. Д.* Электродинамика сплошных сред / *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* — Москва: Наука, 1982. — 620 с.

[62] *Ложкин, В. Н.* Упругое равновесие пьезоэлектрического тела с произвольной анизотропией / *В. Н. Ложкин, Л. Н. Олейник* // Мат. физика. — 1978. — № 24. — С. 98-104.

[63] Математичне моделювання термомеханічних процесів у пружних тілах із врахуванням локального зміщення маси / *Я. Й. Бурак, Є. Я. Чапля, В. Ф. Кондрат, О. Р. Грицина* // Доп. НАН України. — 2007. — № 4. — С. 45-49.

[64] *Машкевич, В. С.* Электрические, оптические и упругие свойства кристаллов типа алмаза. I / *В. С. Машкевич, К. Б. Толпыго* // Журнал эксперим. и техн. физики. — 1957. — Т. 32, вып. 3. — С. 520-525.

[65] *Машкевич, В. С.* Электрические, оптические и упругие свойства кристаллов типа алмаза. II. Колебания решетки с учетом дипольных моментов атомов / *В. С. Машкевич* // Журнал эксперим. и техн. физики. — 1957. — Т. 32, вып. 4. — С. 866-873.

[66] *Мирзаде, Ф. Х.* Нелинейные продольные волны взаимодействующих полей деформации и концентрации дефектов в германии и кремнии / *Ф. Х. Мирзаде* // Физ. и техн. полупроводников. — 2006. — Т. 40, вып. 3. — С. 69-275.

[67] *Можен, Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред / *Ж. Можен.* — Москва: Мир, 1991. — 560 с.

[68] *Мэзон, У.* Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультраакустике / *У. Мэзон.* — Москва: Иностранная литература, 1952. — 448 с.

[69] *Нагірний, Т. С.* Вплив домішок на приповерхневу неоднорідність та міцність циліндра в процесі його насичення / *Т. С. Нагірний, О. Р. Грицина //* Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2000. — Т. 43, № 3. — С. 122-126.

[70] *Нагірний, Т. С.* Вплив домішок на приповерхневу неоднорідність та міцність шару в процесі його насичення */ Т. С. Нагірний, О. Р. Грицина //* Доп. НАН України. — 2001. — №4. — С. 51-57.

[71] *Новацкий, В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах / *В. Новацкий.* — Москва: Мир, 1984. — 159 с.

[72] *Партон, В. З.* Электромагнитоупругость пьезоэлектриических и электропроводных тел / *В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев.* — Москва: Наука, 1988. — 472 с.

[73] Поверхностные напряжения в слое. Влияние температуры и примесей на прочность / *Я. И. Бурак, Т. С. Нагирный, О. Р. Грицина, К. А. Червинка* // Проблемы прочности. — 2000. — № 6. — С. 35-43.

[74] *Подильчук, Ю. Н.* Представление общего решения уравнений статической термоэлектроупругости трансверсально-изотропного пьезокерамического тела через гармонические функции / *Ю. Н. Подильчук, А. Х. Пассос Моргадо* // Теорет. и прикл. механика. — 1999. — № 29. — С. 42-51.

[75] *Подильчук, Ю. Н.* Точные аналитические решения статических задач электроупругости и термоэлектроупругости трансверсально-изотропного тела в криволинейных системах координат / *Ю. Н. Подильчук* // Прикл. механика. — 2003. — Т. 39, № 2. — С. 14-54.

[76] *Половинкина, Т. Б.* К теории равновесия пьезокерамических тел с трещинами / *Т. Б. Половинкина, А. Ф. Улитко* // Тепловые напряжения в элементах конструкций. — 1978. — № 18. — С. 10-17.

[77] *Силин, В. П.* Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред / *В. П. Силин, А. А. Рухадзе.* — Москва: Гос. изд. литер. в обл. атомной энергии, 1961. — 244 с.

[78] Статические и динамические задачи электроупругости для составных многосвязных тел / *Д. И. Бардзокас, А. И. Зобнин, Н. А. Сеник, М. Л. Фильштинский.* — Москва: КомКнига, 2005. — Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. В 2 т. — Т. 2. — 376 с.

[79] *Таганцев, А. К.* К теории флексоэлектрического эффекта в кристаллах / *А. К. Таганцев* // Журнал экспериментальной и техн. физики. — 1985. — Т. 88, вып. 6. — С. 2108-2122.

[80] *Таганцев, А. К.* Пиро-, пьезо-, флексоэлектрический и термополяризационный эффекты в ионных кристаллах / *А. К. Таганцев* // Успехи физических наук. — 1987. — Т. 152, вып. 3. — С. 423-448.

[81] *Улитко, А. Ф.* К теории колебаний пьезокерамических тел / *А. Ф. Улитко* // Тепловые напряжения в элементах конструкций. — 1975. — № 15. — С. 90-98.

[82] *Улитко, А. Ф.* К теории электромеханического преобразования энергии в неравномерно деформируемых пьезокерамических телах / *А. Ф. Улитко* // Прикл. механика. — 1977. — Т. 13, № 10. — С. 115-123.

[83] *Улитко, А. Ф.* О некоторых особенностях постановки граничных задач электроупругости / *А. Ф. Улитко* // Соврем. пробл. механики и авиации. — 1982. — С. 290-300.

[84] *Хома, И. Ю.* Об уравнениях теории термопьезокерамических нетонких оболочек / *И. Ю. Хома* // Прикл. механика. — 2005. — Т. 41, № 2. — С. 12-22.

[85] *Хорошев, К. Г.* Термоэлектроупругое состояние конечной анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами / *К. Г. Хорошев* // Вісн. Донец. ун-та. Сер. А. Природничі науки. — 2005. — № 2. — С. 67-72.

[86] *Хорошун, Л.* Построение динамических уравнений єлектромагнитомеханики диєлектриков и пьезоєлектриков на основе двухконтинуумной механики / *Л. Хорошун* // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2006. — Вип. 3. — С. 177-198.

[87] *Хорошун, Л. П.* Прогнозирование эффективных пьезоактивных композитных материалов / *Л. П. Хорошун, Б. П. Маслов, П. В. Лещенко*. — Киев: Наук. думка, 1989. — 208 с.

[88] *Хорошун, Л. П.* Двухконтинуумная теория деформирования диэлектриков / *Л. П. Хорошун* // Доп. НАН України. — 2003. — № 9. — С. 56-64.

[89] *Хорошун, Л. П.* Двухконтинуумная механика диэлектриков как основа электромагнитомеханики// Прикл. механика. — 2003. — Т. 39, № 8. — С. 28-47.

[90] *Шульга, М. О.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин / *М. О. Шульга, В. Л. Карлаш*. — Київ: Наукова думка, 2008. — 272 с.

[91] *Шульга, М. О.* Визначення електрорушійної сили п'єзоелектричних перетворювачів при механічних навантаженнях / *М. О. Шульга //* Доп. НАН України. — 2009. — № 1.— С. 70-74.

[92] *Шульга, М. О.* Про повну систему рівнянь електропружності / *М. О. Шульга* // Доп. НАН України. — 2009. — № 3.— С. 95-98.

[93] *Шульга, Н. А.* Колебания пьезоэлектрических тел / *Н. А. Шульга, А. М. Болкисев*. — Киев: Наук. думка, 1990. — 228 с.

[94] *Шульга, Н. А.* Распространение гармонических волн в анизотропных пьезоэлектирических цилиндрах. Однородные пьезоэлектирические волноводы / *Н. А. Шульга* // Прикл. механика. — 2002. — Т. 38, № 8. — С. 46-68.

[95] *Шульга, Н. А.* Дисперсия поверхностных волн в слоисто-периодическом пьезоэлектрическом полупространстве с жидким верхним слоем / *Н. А. Шульга, Л. П. Зинчук* // Прикл. механика. — 2005. — Т. 41, № 3. — С. 55-61.

[96] *Altay, G.* Variational Principles for Piezoelectric, Thermopiezoelectric, and Hydrothermopiezoelectric Continua Revisited / *G. Altay, M. C. Dökmeci* // Mech. of Advanced Materials and Struct. — 2007. — Vol. 14, Issue 7. — P. 549-562.

[97] *Askar, A.* Lattice Dynamics Approach to the Theory of Elastic Dielectrics with Polarization Gradient / *A. Askar, P. C. Y. Lee, A. S. Cakmak* // Phys. Rev. B. — 1970. — Vol. 1. — P. 3525-3537.

[98] *Askar, A.* The Effect of Surface Curvature and Discontinuity on the Surface Energy Density and Other Induced Fields in Elastic Dielectrics with Polarization Gradient / *A. Askar, P. C. Y. Lee, A. S. Cakmak* // Int. J. Solids and Struct. — 1971. — Vol. 7, Issue 5. — P. 523-537.

[99] *Askar, A.* Lattice Dynamics Approach to the Theory of Diatomic Elastic Dielectrics / *A. Askar, P. C. Y. Lee* // Phys. Rev. B. — 1974. — Vol. 9. — P. 5291-5299.

[100] *Askar, A.* Lattice Model for Elastic Ferroelectrics and Related Continuum Theories. In: Mechanical Behavior of Electromagnetic Solid Continua. Ed. by *G. A. Maugin* / *A. Askar, J. Pouget, G. A. Maugin*. — North-Holland, Amsterdam: Elsevier. — 1984. — P. 151-156.

[101] *Bampi, F.* A Variational Approach to Deformable Electromagnetic Solids / *F. Bampi, A. Morro* // Acta Physica Polonica. — 1986. — Vol. B17, No 11. — P. 937-949.

[102] *Beevers, C. E.* Wave Propagation in a Thermoelastic Dielectric / *C. E. Beevers, R. E. Craine* // J. Mec. Theor. Appl. — 1985. — Vol. 4. — P. 159-174.

[103] *Born, M.* Dynamical Theory of Crystal Lattices / *M. Born, K. Huang.* — Oxford: University Press, 1956. — 420 p. (У перекладі: *Борн М., Хуан К.* Динамическая теория кристаллических решеток. — Москва: Иностранная литература, 1958.)

[104] *Buchanan, G. R.* Variational Principles and Finite Element Analysis for Polarization Gradient Theory / *G. R. Buchanan, M. Sallah, K. F. Fong* // Computational Mech. — 1990. — Vol. 5. — P. 447-458.

[105] *Burak, Ya.* An Introduction of the Local Displacements of Mass and Electric Charge Phenomena into the Model of the Mechanics of Polarized Electromagnetic Solids / *Ya. Burak, V. Kondrat, O. Hrytsyna* // J. Mech. Mat. and Struct. — 2008. — Vol. 3, No 6. — P. 1037-1046.

[106] *Bursian, E. V.* Nonlocal piezoelectric effect / *E. V. Bursian, N. N. Trunov* // Sov. Phys.-Solid State. — 1974. — T. 16. — C. 760-762.

[107] *Campbell, C. F.* Calculation of Radiated Electromagnetic Power from Bulk Acoustic Wave Resonators / *C. F. Campbell, R. J. Weber* // Proc. IEEE International Frequency Control Symposium, Salt Lake City, UT, 1993 June 2-4. — P. 472-475.

[108] *Catalan, G.* The Effect of Flexoelectricity on the Dielectric Properties of Inhomogeneously Strained Ferroelectric Thin Films / *G.Catalan, L. J. Sinnamon, J. M. Gregg* // J. of Phys.: Condensed Matter. — 2004. — Vol. 16. — P. 2253-2264.

[109] *Chowdhury, K. L.* Constitutive Equations for Elastic Dielectrics / *K. L. Chowdhury, P. G. Glockner* // Int. J. Non-Linear Mech. — 1976. —Vol. 11. — P. 315-324.

[110] *Chowdhury, K. L.* On Thermoelastic Dielectrics / *K. L. Chowdhury, P. G. Glockner* // Int. J. Solids and Struct. — 1977. — Vol. 13, Issue 11. — P. 1173-1182.

[111] *Chowdhury, K. L.* Point Charge in the Interior of an Elastic Dielectric Half Space / *K. L. Chowdhury, P. G. Glockner* // Int. J. Engng. Sci. — 1977. — Vol. 15, Issue 8. — P. 481-493.

[112] *Chowdhury, K. L.* On the Thermodynamics of Non-Linear Elastic Dielectrics / *K. L. Chowdhury, M. Epstein, P. G. Glockner* // Int. J. Non-Linear Mech. — 1979. — Vol. 13. — P. 311-322.

[113] *Chowdhury, K. L.* On a Boundary Value Problem for an Elastic Dielectric Half-Plane / *K. L. Chowdhury, P. G. Glockner* // Acta Mech. — 1980. — Vol. 37. — P. 65-74.

[114] *Chowdhury, K. L.* On a Similarity Solution of the Boussinesq Problem of Elastic Dielectrics / *K. L. Chowdhury, P. G. Glockner* // Arch. Mech. — 1981. — Vol. 32. — P. 429-442.

[115] *Chowdhury, K. L.* On an Axisymmetric Boundary Value Problem for an Elastic Dielectric Half-Space / *K. L. Chowdhury* // Int. J. Solids and Struct. — 1982. —Vol. 18, Issue 3. — P. 263-271.

[116] *Collet, B*. One-Dimensional Acceleration Waves in Deformable Dielectrics with Polarization Gradients / *B. Collet* // Int. J. Engng. Sci. —1981. — Vol. 19, Issue 3. — P. 389-407.

[117] *Collet, B*. Shock Waves in Deformable Dielectrics with Polarization Gradients / *B. Collet* // Int. J. Engng. Sci. — 1982. — Vol. 20, Issue 10. — P. 1145-1160.

[118] *Collet, B*. Shock Waves in Deformable Ferroelectric Materials / *B. Collet* // In: The Mechanical Behavior of Electromagnetic Solid Continua. Ed. by *G. A. Maugin*. — North-Holland, Amsterdam: Elsevier, 1984. — P. 157-163.

[119] *Craine R. E.* Estimates for One-Dimensional Dynamical Solutions in Nonlinear Dielectrics / *R. E. Craine* // Int. J. Engng. Sci. — 1986. — Vol. 24, Issue 5. — P. 859-863.

[120] *Cross, L. E.* Flexoelectric Effects: Charge Separation in Insulating Solids Subjected to Elastic Strain Gradients / *L. E. Cross* // J. Materials Sci. — 2006. — Vol. 41. — P. 53-63.

[121] *De Genness, P. G.* The Physics of Liquid Crystals / *P. G. De Genness*. — Oxford: Clarendon Press, 1974. — 344 p.

[122] *Demiray, H.* On the Constitutive Relations of Polar Elastic Dielectrics / *H. Demiray, C. A. Eringen* // Lett. Appl. Eng. Sci. — 1973. — Vol. 1. — P. 517-527.

[123] *Demiray, H.* A Continuum Theory of Diatomic Solids: Viewed as Directed Media / *H. Demiray* // J. of Eng. Math. — 1977. — Vol. 11, No 3. — P. 257-271.

[124] *Demiray, H.* A Variational Formulation of Diatomic Elastic Dielectrics / *H. Demiray, S. Dost* // Int. J. Engng. Sci. — 1988. — Vol. 26, Issue 8. — P. 865-871.

[125] *Demiray, H.* Diatomic Elastic Dielectrics with Polarization Inertia / *H. Demiray, S. Dost* // Int. J. Engng. Sci. — 1989. — Vol. 27, Issue 10. — P. 1275-1284.

[126] *Dost, S.* Acceleration Waves in Elastic Dielectrics with Polarization Gradient Effects / *S. Dost* // Int. J. Engng. Sci. — 1983. — Vol. 21, Issue 11. — P. 1305-1311.

[127] *Dost, S*. Propagation of Acceleration Waves in Generalized Thermoelastic Dielectrics. In: Mechanical Behavior of Electromagnetic Solid Continua, Ed. by G. A. Maugin / *S. Dost, M. Epstein, S. Gödze*. — North-Holland, Amsterdam: Elsevier, 1984. — P. 211-216.
[128] *Dost, S.* Wave Propagation in Rigid Dielectrics with Polarization Inertia / *S. Dost, E. Sahin* // Int. J. Engng. Sci. — 1986. — Vol. 24, Issue 8. — P. 1445-1451.
[129] *Dumitrică, T.* Curvature-Induced Polarization in Carbon Nanoshells / *T. Dumitrică, C. M. Landis, B. I. Yakobson* // Chem. Phys. Lett. — 2002. — Vol. 360, Issues 1-2. — P. 182-188.
[130] *Dynamic* Interfacial Crack Propagation in Elastic–Piezoelectric Bi-materials Subjected to Uniformly Distributed Loading / *Xi-Hong Chen, Chien-Ching Ma, Yi-Shyong Ing, Chung-Han Tsai* // Int. J. Solids and Struct. — 2008. — Vol. 45, Issues 3-4. — P. 959-997.
[131] *Eringen, A. C.* On the Foundations of Electroelastostatics / *A. C. Eringen* // Int. J. Engng. Sci. — 1963. — Vol. 1. — P. 127-153.
[132] *Eringen, A. C.* Nonlocal Polar Elastic Continua / *A. C. Eringen* // Int. J. Engng. Sci. — 1972. — Vol. 10, Issue 1. — P. 1-16.
[133] *Eringen, A. C.* On Nonlocal Elasticity / *A. C. Eringen, D. G. B. Edelen* // Int. J. Engng. Sci. — 1972. — Vol. 10, Issue 3. — P. 233-248.
[134] *Eringen, A. C.* Relation Between Non-Local Elasticity and Lattice Dynamics / *A. C. Eringen, B. S. Kim* // Cryst. Lattice Defects. — 1977. — Vol. 7. — P. 51-57.
[135] *Eringen, A. C.* Theory of Nonlocal Piezoelectricity / *A. C. Eringen* // J. Math. Phys. — 1984. — Vol. 25, No 3. — P. 717-727.
[136] *Eringen, A. C.* Electrodynamics of Continua. Vol. 1. Foundations and Solid Media / *A. C. Eringen, G. A. Maugin.* — New York: Springer-Verlag, 1990. — 453 p.
[137] *Eringen, A. C.* Electrodynamics of Continua. Vol. 2. Fluids and Complex Media / *A. C. Eringen, G. A. Maugin.* — New York: Springer-Verlag, 1990. — 358 p.
[138] *Eringen, A. C.* Vistas of Nonlocal Electrodynamics // In: Mechanics of Electromagnetic Materials and Structures. Ed. by *J. S. Lee, G. A. Maugin, Y. Shindo*. American Society of Mechanical Engineers / *A. C. Eringen.* — 1993. — Vol. 161. — P. 1-20.
[139] *Eringen, A. C.* Nonlocal Continuum Field Theories. / *A. C. Eringen.* — New York: Springer-Verlag, 2002. — 376 p.
[140] *Fousek, J.* Possible Piezoelectric Composites Based on Flexoelectric Effect / *J. Fousek, L. E. Cross, D. B. Litvin* // Materials Lett. — 1999. — Vol. 39. — P. 289-291.
[141] *Germer, L. N.* (110) Nickel Surface / *L. N. Germer, A. U. Mac Rae, C. D. Hartman* // J. Appl. Phys. — 1961. — Vol. 32. — P. 2432-2439.
[142] *Gou, P. F.* Effects of Gradients of Polarization on Stress-Concentration at a Cylindrical Hole in an Elastic Dielectric / *P. F. Gou* // Int. J. Solids and Struct. — 1971. — Vol. 7, Issue 11. — P. 1467-1476.
[143] *Grioli G.* Elasticita assimmetrica / *G. Grioli* // Ann. di Mat. pura ed appl. Ser. IV. — 1960. — Vol. 50. — P. 1399-1409.
[144] *Hadjigeorgiou, E. P.* A General Theory for Elastic Dielectrics. II. The Variational Approach / *E. P. Hadjigeorgiou, V. K. Kalpakides, C. V. Massalas* // Int. J. Non-Linear Mech. — 1999. — Vol. 34. — P. 967-980.
[145] *Harden, J.* Measurement of the Converse Flexoelectric Effect in a Bent-Core Nematic Liquid Crystal / *J. Harden, R. Teeling, S. Sprunt* et al. // http://www.ilcsoc.org/lcd/Abstracts/1220576342.pdf
[146] *Hinov, H.-P.* On the «Gradient Flexoelectric Effect» in Nematics Thirty Years Later / *H.-P. Hinov* // Bulg. J. Phys. — 2004. — Vol. 31. — P. 55-67.
[147] *Hruska, H.* The Rate of Propagation of Ultrasonic Waves in ADP and in Voigt's Theory / *H. Hruska* // Czech. J. Phys. Sect. B. — 1966. — Vol. B16. — P. 446-453.
[148] *Hruska, H.* Relation between the General and the Simplified Condition for the Velocity of Propagation of Ultrasonic Waves in a Piezoelectric Medium / *H. Hruska* // Czech. J. Phys. Sect. B. — 1966. — Vol. B18. — P. 214-221.
[149] *Huang, K.* On the Interaction between the Radiation Field and Ionic Crystals / *K. Huang* // Proc. Roy. Soc. — 1951. — Vol. A208. — P. 352-365.
[150] *Huang, Y.-N.,* Energy-Momentum Tensors in Nonsimple Elastic Dielectrics / *Y.-N. Huang, R. C. Batra* // J. Elast. — 1996. — Vol. 42. — P. 275-281.

[151] *Kafadar, C. B.* Theory of Multipoles in Classical Electromagnetism / *C. B. Kafadar* // Int. J. Engng. Sci. — 1971. — Vol. 9. — P. 831-853.
[152] *Kalinin, S. V.* Electronic Flexoelectricity in Low-Dimensional Systems / *S. V. Kalinin, V. Meunier* // Phys. Rev. B. — 2008. — Vol. 77, Issue 3. — P. 033403–033406.
[153] *Kalpakides, V. K.* Tiersten's Theory of Thermoelectroelasticity: An Extension / *V. K. Kalpakides, C. V. Massalas* // Int. J. Engng. Sci. — 1993. — Vol. 31. — P. 157-164.
[154] *Kalpakides, V. K.* A Variational Principle for Elastic Dielectrics with Quadruple Polarization / *V. K. Kalpakides, E. P. Hadjigeorgiou, C. V. Massalas* // Int. J. Engng. Sci. — 1995. — Vol. 33. — P. 793-801.
[155] *Kalpakides, V. K.* On Material Equations in Second Order Gradient Electroelasticity / *V. K. Kalpakides, E. K. Agiasofitou* // J. Elast. — 2002. — Vol. 67. — P. 205-227.
[156] *Kao, K. C.* Dielectric Phenomena in Solids / *Kwan Chi Kao.* — London-San Diego: Elsevier. — 2004. — 598 p.
[157] *Karlash, V. L.* Electroelastic Vibrations and Transformation Ratio of a Planar Piezoceramic Transformer / *V. L. Karlash* // J. Sound Vib. — 2004. — Vol. 277. — P. 353-367.
[158] *Karlash, V.* Longitudinal and Lateral Vibrations of a Planar Piezoceramic Transformer / *V. Karlash* // Jpn. J. Appl. Phys. — 2005. — Vol. 44, No 4A. — P. 1852-1856.
[159] *Kyame, J. J.* Wave Propagation in Piezoelectric Crystals / *J. J. Kyame* // J. Acoust. Soc. Am. — 1949. — Vol. 21. — P. 159-167.
[160] *Kyame, J. J.* Conductivity and Viscosity Effects on Wave Propagation in Piezoelectric Crystals / *J. J. Kyame* // J. Acoust. Soc. Am. — 1953. — Vol. 26. — P. 990-993.
[161] *Lee, P. C. Y.* Electromagnetic Radiation From an AT-Cut Quartz Plate Under Lateral-Field Excitation / *P. C. Y. Lee* // J. Appl. Phys. — 1989. — Vol. 65. — P. 1395-1399.
[162] *Lee, P. C. Y.* Electromagnetic Radiation From Doubly Rotated Piezoelectric Crystal Plates Vibrating at Thickness Frequencies / *P. C. Y. Lee, Y.-G. Kim, J. H. Prevost* // J. Appl. Phys. — 1990. — Vol. 67. — P. 6633-6642.
[163] *Lee, P. C. Y.* A Variational Principle for the Equations of Piezoelectromagnetism in Elastic Dielectric Crystals / *P. C. Y. Lee* // J. Appl. Phys. — 1991. — Vol. 69. — P. 7470-7473.
[164] *Li, S.* The Electromagneto-Acoustic Surface Wave in a Piezoelectric Medium: The Bleustein-Gulyaev Mode / *S. Li* // J. Appl. Phys. — 1996. — Vol. 80. — P. 5264-5269.
[165] *Li, S.* On Scattering by an Interfacial Crack in Piezoelectric Materials / *S. Li, A. C. To, S. D. Glaser* // J. Appl. Mech. — 2005. — Vol. 72. — 943-954.
[166] *Li, S.* Propagation of a mode-III interfacial conductive crack along a conductive interface between two piezoelectric materials / *S. Li, A. C. To, S. D. Glaser* // Wave Motion. — 2006. — Vol. 43. — P. 368-386.
[167] *Li, X. F.* Electromagnetoelastic Behavior Induced by a Crack under Antiplane Mechanical and Inplane Electric Impacts / *X. F. Li, J. S. Yang* // Int. J. Fract. — 2005. — Vol. 132. — P. 49-65.
[168] *Li, X. F.* Spatial Dispersion of Short Surface Acoustic Waves in Piezoelectric Ceramics / *X. F. Li, J. S. Yang, Q. Jiang* // Acta Mech. — 2005. — Vol. 180, No 1-4. — P. 11-20.
[169] *Ma, W. H.* Observation of the Flexoelectric Effect in Relaxor $Pb(Mg_{1/3}Nb_{2/3})O_3$ Ceramics / *W. H. Ma, L. E. Cross* // Appl. Phys. Lett. — 2001. — Vol. 78, Issue 19. — P. 2920-2921.
[170] *Ma, W. H.* Large Flexoelectric Polarization in Ceramic Lead Magnesium Niobate / *W. H. Ma, L. E. Cross* // Appl. Phys. Lett. — 2001. — Vol. 79, Issue 19. — P. 4420-4422.
[171] *Ma, W. H.* Flexoelectric Polarization in Barium Strontium Titanate in the Paraelectric State / *W. H. Ma, L. E. Cross* // Appl. Phys. Lett. — 2002. — Vol. 81, Issue 19. — P. 3440-3442.
[172] *Ma, W. H.* Strain-Gradient-Induced Electric Polarization in Lead Zirconate Titanate Ceramics / *W. H. Ma, L. E. Cross* // Appl. Phys. Lett. — 2003. — Vol. 82, Issue 19. — P. 3293-3295.
[173] *Ma, W. H.* Flexoelectricity of Barium Titanate / *W. H. Ma, L. E. Cross* // Appl. Phys. Lett. — 2006. — Vol. 88, Issue 23. — P. 232902-232904.
[174] *Ma, W. H.* A Study of Flexoelectric Coupling Associated Internal Electric Field and Stress in Thin Film Ferroelectrics / *W. H. Ma* // Phys. Status Solidi B. — 2008. — Vol. 245, Issue 4. — P. 761-768.
[175] *Majdoub, M. S.* Enhanced Size-Dependent Piezoelectricity and Elasticity in Nanostructures Due to the Flexoelectric Effect / *M. S. Majdoub, P. Sharma, T. Cagin* // Phys. Rev. B. — 2008. — Vol. 77. — P. 125424–125432.

[176] *Majdoub, M. S.* Erratum: Enhanced Size-Dependent Piezoelectricity and Elasticity in Nanostructures Due to the Flexoelectric Effect [Phys. Rev. B. 77, 125424 (2008)] / *M. S. Majdoub, P. Sharma, T. Cagin* // Phys. Rev. B. — 2009. — Vol. 79. — P. 1119904-1119905.
[177] *Majorkowska-Knap, K.* Piezoelectric Love Waves in Non-Classical Elastic Dielectrics / *K. Majorkowska-Knap, J. Lenz* // Int. J. Engng. Sci. — 1989. — Vol. 27, Issue 8. — P. 879-893.
[178] *Maranganti, R.* Electromechanical Coupling in Nonpiezoelectric Materials Due to Nanoscale Nonlocal Size Effects: Green's Functions and Embedded Inclusions / *R. Maranganti, N. D. Sharma, P. Sharma* // Phys. Rev. B. — 2006. — Vol. 74. — P. 14110–14123.
[179] *Marvan, M.* Flexoelectric Effect in Elastomers / *M. Marvan, A. Havránek* // Progress in Colloid & Polymer Science. — 1988. — Vol. 78. — P. 33-36.
[180] *Marvan, M.* Static Volume Flexoelectric Effect in a Model of Linear Chains / *M. Marvan, A. Havránek* // Solid State Communications. — 1997. — Vol. 101, No 7. — P. 493-496.
[181] *Maugin, G. A.* Deformable Dielectrics II. Voigt's Intramolecular Force Balance in Elastic Dielectrics / *G. A. Maugin* // Arch. Mech. — 1977. — Vol. 29. — P. 143-151.
[182] *Maugin, G. A.* Deformable Dielectrics III. A Model of Interactions / *G. A. Maugin* // Arch. Mech. — 1977. — Vol. 29. — P. 251-258.
[183] *Maugin, G. A.* Nonlocal Theories or Gradient-Type Theories: A Matter of Convenience? / *G. A. Maugin* // Arch. Mech. — 1979. — Vol. 31. — P. 15-26.
[184] *Maugin, G. A.* Electroacoustic Equations for One-Domain Ferroelectric Bodies / *G. A. Maugin, J. Pouget* // J. Acoust. Soc. Am. — 1980. — Vol. 68. — P. 575-587.
[185] *Maugin, G. A.* The Principle of Virtual Power: Application to Coupled Fields / *G. A. Maugin* // Acta Mech. — 1980. — Vol. 35. — P. 1-80.
[186] *Maugin, G. A.* Nonlinear Waves in Elastic Crystals / *G. A. Maugin*. — Oxford: Oxford University Press. — 1999. — P. 49.
[187] *Mead, C. A.* Anomalous Capacitance of Thin Dielectric Structures / *C. A. Mead* // Phys. Rev. Lett. — 1961. — Vol. 6. — P. 545-546.
[188] *Mead, C. A.* Electron Transport Mechanisms in Thin Insulating Films / *C. A. Mead* // Phys. Rev. — 1962. — Vol. 128. — P. 2088-2093.
[189] *Meyer, R. B.* Piezoelectric Effects in Liquid Crystals / *R. B. Meyer* // Phys. Rev. Lett. — 1969. — Vol. 22 . — P. 918-921.
[190] *Mindlin, R. D.* Polarization Gradient in Elastic Dielectrics / *R. D. Mindlin* // Int. J. Solids and Struct. — 1968. — Vol. 4. — P. 637-642.
[191] *Mindlin, R. D.* Continuum and Lattice Theories of Influence of Electromechanical Coupling on Capacitance of Thin Dielectric Films / *R. D. Mindlin* // Int. J. Solids and Struct. — 1969. — Vol. 5. — P. 1197-1208.
[192] *Mindlin, R. D.* Electromechanical Vibrations of Centrosymmetric Cubic Crystal Plates / *R. D. Mindlin* // Q. J. Mech. Appl. Math. — 1971. — Vol. 35, No 4. — P. 404-408.
[193] *Mindlin, R. D.* Acoustical and Optical Activity in Alpha Quartz / *R. D. Mindlin, R. A. Toupin* // Int. J. Solids and Struct. — 1971. — Vol. 7, Issue 9. — P. 1219-1227.
[194] *Mindlin, R. D.* Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics / *R. D. Mindlin* // J. Elast. — 1972. — Vol. 2, No 4. — P. 217-282.
[195] *Mindlin, R. D.* A Continuum Theory of a Diatomic, Elastic Dielectric / *R. D. Mindlin* // Int. J. Solids and Struct. — 1972. — Vol. 8. — P. 369-383.
[196] *Mindlin, R. D.* Coupled Elastic and Electromagnetic Fields in a Diatomic, Electric Continuum / *R. D. Mindlin* // Int. J. Solids and Struct. — 1972. — Vol. 8. — P. 401-408.
[197] *Mindlin, R. D.* Electromagnetic Radiation From a Vibrating Quartz Plate / *R. D. Mindlin* // Int. J. Solids and Struct. — 1972. — Vol. 9. — P. 697-702.
[198] *Mindlin, R. D.* On the Electrostatic Potential of a Point Charge in a Dielectric Solid / *R. D. Mindlin* // Int. J. Solids and Struct. — 1973. — Vol. 9, Issue 2. — P. 233-235.
[199] *Mindlin, R. D.* Electromagnetic Radiation from a Vibrating, Elastic Sphere / *R. D. Mindlin* // Int. J. Solids and Struct. — 1974. — Vol. 10, Issue 11. — P. 1307-1314.
[200] *Mindlin, R. D.* A Variational Principle for the Equations of Piezoelectromagnetism in a Compound Medium / *R. D. Mindlin* // In: *Complex Variable Analysis and its Applications* (I. N. Vekua 70th Birthday Volume), Academy of Sci. USSR, Moscow: Nauka. — 1978. — P. 397-400.

[201] *Nagirny T.* Thermodynamical models of continual description of the coupled processes in thin-film systems / *T. Nagirny, Y. Burak* // Trends in Continuum Physics. Proc. Inter. Symp. Poznan, Poland. Aug.17-20 1998. — Singapure: Word Scientific, 1999. — P. 263-276.
[202] *Nakhmanson, S. M.* Sponatneous Polarization and Piezoelectricity in Boron Nitride Nanotubes / *S. M. Nakhmanson, A. Calzolari, V. Meunier et al.* // Phys. Rev. B. — 2003. — Vol. 67. — P. 235406-235410.
[203] *Nelson, D. F.* Electric, Optic and Acoustic Interactions in Crystals / *D. F. Nelson.* — New York: Wiley. — 1979. — 511 p.
[204] *Nowacki, J. P.* Some Dynamical Problems of Thermoelastic Dielectrics / *J. P. Nowacki, P. G. Glockner* // Int. J. Solid and Struct. — 1979. — Vol. 15, Issue 3. — P. 183-191.
[205] *Nowacki, J. P.* Lattice defects in linear isotropic dielectrics / *J. P. Nowacki, R. K. T. Hsieh* // Int. J. Engng. Sci. — 1986. — Vol. 24, Issue 10. — P. 1655-1666.
[206] *Nowacki, J. P.* Static and Dynamic Coupled Fields in Bodies with Piezoeffects or Polarization Gradient / *J. P. Nowacki.* — Lecture Notes in Appl. and Computational Mech. — 2006. — Vol. 26. Springer. — 218 p.
[207] On Electromechanical Phenomena in Thin Dielectric Films / *Ye. Chapla, S. Kondrat, O. Hrytsyna, V. Kondrat* // Task Quarterly. — 2009. — Vol. 13, No 1. — P. 1001-1010.
[208] *Pailloux, P. M. H.* Piezoelectricite Calcul des Vitesses de Popagation / *P. M. H. Pailloux* // J. Phys. Radium. — 1958. — Vol. 19. — P. 523-526.
[209] *Paker, D. F.* Nonlinear piezoelectric surface waves / *D. F. Paker, E. A. David* // Int. J. Engng. Sci. — 1989. — Vol. 27, Issue 5. — P. 565-583.
[210] *Pine, A. S.* Direct Observation of Acoustical Activity in α-Quartz / *A. S. Pine* // Phys. Rev. — 1970. — Vol. B2. — P. 2049-2054.
[211] *Pouget, J.* Coupled Acoustic-Optic Modes in Deformable Ferroelectrics / *J. Pouget, G. A. Maugin* // J. Acoust. Soc. Am. — 1980. — Vol. 68. — P. 588-601.
[212] *Pouget, J.* Bleustein-Gulyaev Surface Modes in Elastic Ferroelectrics / *J. Pouget, G. A. Maugin* // J. Acoust. Soc. Am. — 1981. — Vol. 69. — P. 1304-1318.
[213] *Pouget, J.* Piezoelectric Rayleigh Waves in Elastic Ferroelectrics / *J. Pouget, G. A. Maugin* // J. Acoust. Soc. Am. — 1981. — Vol. 69. — P. 1319-1325.
[214] *Pouget, J.* Lattice Model for Elastic Ferroelectric Crystals: Microscopic Approximation / *J. Pouget, A. Askar, G. A. Maugin* // Phys. Rev. B. — 1986. — Vol. 33. — P. 6304-6319.
[215] *Pouget, J.* A. Lattice Model for Elastic Ferroelectric Crystals: Continuum Approximation / *J. Pouget, A. Askar, G. A. Maugin* // Phys. Rev. B. — 1986. — Vol. 33. — P. 6320-6325.
[216] *Prechtl, A.* Deformable Bodies with Electric and Magnetic Quadrupoles / *A. Prechtl* // Int. J. Engng. Sci. —1980. — Vol. 18. — P. 665-680.
[217] *Rajagopal, E. S.* The Existence of Interfacial Couples in Infinitesimal Elasticity / *E. S. Rajagopal* // Ann. der. Physik. — 1960. — Vol. 6. — P. 192-201.
[218] *Sahin, E.* A Strain-Gradient Theory of Elastic Dielectrics With Spatial Dispersion / *E. Sahin, S. Dost* // Int. J. Engng. Sci. — 1988. — Vol. 26, Issue 12. — P. 1231-1245.
[219] *Schmerr, L. W. Jr.* Some Exact Solutions for the Propagation of Transient Electroacoustic Waves II: Plane Interface between Two Piezoelectric Media / *L. W. Jr.Schmerr, A. Sedov* // Int. J. Engng. Sci. — 1986. — Vol. 24. — P. 921-932.
[220] *Schwartz, J.* Solutions of the Equations of Equilibrium of Elastic Dielectrics: Stress Functions, Concentrated Force, Surface Energy / *J. Schwartz* // Int. J. Solids and Struct. — 1969. — Vol. 5, Issue 11. — P. 1209-1220.
[221] *Sedov, A.* Some Exact Solutions for the Propagation of Transient Electroacoustic I: Piezoelectric Half-Space / *A. Sedov, L. W. Jr. Schmerr* // Int. J. Engng. Sci. — 1986. — Vol. 24. — P. 557-568.
[222] *Sharma, N. D.* On the Possibility of Piezoelectric Nanocomposites without Using Piezoelectric Materials / *N. D. Sharma, R. Maranganti, P. Sharma* // J. Mech. Phys. Solids. — 2007. — Vol. 55, No^{o}11. — P. 2328-2350.
[223] *Spaight, R. N.* Piezoelectric Surface Waves on LiNbO3 / *R. N. Spaight, G. G. Koerber* // IEEE Trans. Sonics Ultrason. — 1971. — Vol. 18. — P. 237-238.
[224] *Suhubi, E. S.* Elastic Dielectrics With Polarization Gradients / *E. S. Suhubi* // Int. J. Engng. Sci. — 1969. — Vol. 7. — P. 993-997.

[225] *Tagancev, A. K.* Piezoelectricity and Flexoelectricity in Crystalline Dielectrics / *A. K. Tagancev* // Phys. Rev. B. — 1986. — Vol. 34. — P. 5883-5889.
[226] *Tagancev, A. K.* Electric Polarization in Crystals and its Response to Thermal and Elastic Perturbations / *A. K. Tagancev* // Phase Transit. — 1991. — Vol. 35, No 3-4. — P. 119-203.
[227] *Tiersten, H. F.* Linear piezoelectric plate vibration / *H. F. Tiersten.* — New York: Plenum Press, 1969. — 211 с.
[228] *Tiersten, H. F.* On the Interaction of the Electromagnetic Field With Heat Conducting Deformable Insulators / *H. F. Tiersten, C. F. Tsai* // J. Math. Phys. — 1972. — Vol. 13. — P. 361-378.
[229] *Tiersten, H. F.* Electroelastic Interactions and the Piezoelectric Equations / *H. F. Tiersten* // J. Acoust. Soc. Am. — 1981. — Vol. 70. — P. 1567-1576.
[230] *Todorov, A. T.* First Observation of the Converse Flexoelectric Effect in Bilayer Lipid Membranes / *A. T. Todorov, A. G. Petrov , J. H. Fendler* // J. Phys. Chem. — 1994. — Vol. 98. — P. 3076-3079.
[231] *Tosi, M.* Cohesion of atomic solids in the Born model / *M. Tosi* // Solid State Phys. — 1964. — Vol. 16. — P. 92-127.
[232] *Toupin, R. A.* The Elastic Dielectric / *R. A. Toupin* // Arch. Ration. Mech. Analysis. — 1956. — Vol. 5. — P. 849-915.
[233] *Toupin, R. A.* Elastic Materials with Couple-Stresses / *R. A. Toupin* // Arch. Ration. Mech. Analysis. — 1962. — Vol. 11. — P. 385-414.
[234] *Toupin, R. A.* A Dynamical Theory of Elastic Dielectrics / *R. A. Toupin* // Int. J. Engng. Sci. — 1963. — Vol. 1. — P. 101-126.
[235] *Tseng, C.-C.* Propagation of Piezoelectric and Elastic Surface Waves on the Basal Plane of Hexagonal Piezoelectric Crystals / *C.-C. Tseng, P. M. White* // J. Appl. Phys. — 1967. — Vol. 38. — P. 4274-4280.
[236] *Tseng, C.-C.* Elastic Surface Waves on Free Surface and Metallized Surface of CdS, ZnO, and PZT-4 / *C.-C. Tseng* // J. Appl. Phys. — 1967. — Vol. 38. — P. 4281-4284.
[237] *Voigt, W.* Lehrbuch der Kristall-Physik / *W. Voigt.* — Leipzig: B. G. Teubner, 1910. — 964 S.
[238] *Wang, J.* Higher-Order Theories of Piezoelectric Plates and Applications / *J. Wang, J. S. Yang* // Appl. Mech. Rev. — 2000. — Vol. 53. — P. 87-99.
[239] *Wang, X.* Anti-Plane Green's Functions and Cracks for Piezoelectric Material with Couple Stress and Electric Field Gradient Effects / *X. Wang, E. Pan, W. J. Feng* // European J. of Mech. — A/Solids. — 2008. — Vol. 27, Issue 3. — P. 478-486.
[240] *Yang, J.* Review of a Few Topics in Piezoelectricity / *J. Yang* // Appl. Mech. Rev. — 2006. — Vol. 59. — P. 335-345.
[241] *Yang, J.* Size Effect on the Electromechanical Coupling Factor of a Thin Piezoelectric Film Due to a Nonlocal Polarization Law / *J. Yang, S. Mao, K. Yan, A. Soh* // Scripta Materialia. — 2009. — Vol. 54, Issue 7. — P. 1281-1286.
[242] *Yang, J. S.* A Generalized Variational Principle for Piezoelectromagnetism in an Elastic Medium / *J. S. Yang* // Arch. Mech. — 1991. — Vol. 43. — P. 795-798.
[243] *Yang, J. S.* Variational Principles for the Vibration of an Elastic Dielectric / *J. S. Yang* // Arch. Mech. — 1993. — Vol. 45. — P. 279-284.
[244] *Yang, J. S.* Conservation Laws in Linear Piezoelectricity / *J. S. Yang, R. C. Batra* // Eng. Fract. Mech. — 1995. — Vol. 51. — P. 1041-1047.
[245] *Yang, J. S.* The Vibration of an Elastic Dielectric with Piezoelectromagnetism / *J. S. Yang, X. Y. Wu* // Q. Appl. Math. — 1995. — Vol. 53. — P. 753-760.
[246] *Yang, J. S.* Thin Film Capacitance in Case of a Nonlocal Polarization Law / *J. S. Yang* // Int. J. Appl. Electromagn. Mech. — 1997. — Vol. 8. — P. 307-314.
[247] *Yang, J. S.* Bleustein-Gulyaev Waves in Piezoelectromagnetic Materials / *J. S. Yang* // Int. J. Appl. Electromagn. Mech. — 2000. — Vol. 12. — P. 235-240.
[248] *Yang, J. S.* Love Waves in Piezoelectromagnetic Materials / *J. S. Yang* // Acta Mech. — 2004. — Vol. 168. — P. 111-117.
[249] *Yang, J. S.* A Moving Dislocation in Piezoelectromagnetic Ceramics / *J. S. Yang* // Acta Mech. — 2004. — Vol. 172. — P. 123-129.
[250] *Yang, J. S.* Effects of Electromagnetic Coupling on a Moving Crack in Polarized Ceramics / *J. S. Yang* // Int. J. Fract. — 2004. — Vol. 126. — P. L83–L88.

[251] *Yang, J. S.* Effects of Electric Field Gradient on an Anti-Plane Crack in Piezoelectric Ceramics / *J. S. Yang* // Int. J. Fract. — 2004. — Vol. 127. — P. L111-L116.
[252] *Yang, J. S.* Piezoelectromagnetic Waves in a Ceramic Plate / *J. S. Yang* // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. — 2004. — Vol. 51. — P. 1035-1039.
[253] *Yang, J. S.* Electric Field Gradient Effect and Thin Film Capacitance / *J. S. Yang, X. M. Yang* // World J. Eng. — 2004. — Vol. 2. — P. 41-45.
[254] *Yang, J. S.* An Introduction to the Theory of Piezoelectricity/ *J. S. Yang* . — New York: Springer, 2005. — 313 p.
[255] *Yang, X. M.* Electric Field Gradient Effects in Anti-Plane Problems of Polarized Ceramics / *X. M. Yang, Y. T. Hu, J. S. Yang* // Int. J. Solids and Struct. — 2004. — Vol. 41. — P. 6801-6811.
[256] *Yang, X. M.* Electric Field Gradient Effects in Anti-Plane Problems of a Circular Cylindrical Hole in Piezoelectric Materials of 6 mm Symmetry / *X. M. Yang, Y. T. Hu, J. S. Yang* // Acta Mech. — 2005. — Vol. 18. — P. 29-36.
[257] *Yang, X. M.* Electric Field Gradient Effects in Anti-Plane Circular Inclusion in Polarized Ceramics / *X. M. Yang, H. G. Zhou, J. Y. Li* // Proc. Roy. Soc. A. — 2006. — Vol. 462. — P. 3511-3522.
[258] *Yang, Z.* Effect of Electric Field Gradient on the Propagation of Short Piezoelectric Interface Waves / *Z. Yang, J. Yang* // Int. J. Appl. Electromagn. Mech. — 2009. — Vol. 29, No 2. — P. 101-108.
[259] *Yu, Y. Y.* Some Recent Advances in Linear and Nonlinear Dynamical Modeling of Elastic and Piezoelectric Plates / *Y. Y. Yu* // J. of Intelligent Material Systems and Struct. — 1995. — Vol. 6, No 2. — P. 237-254.
[260] *Zeng, Y.* Electric Field Gradient Effects in Piezoelectric Anti-Plane Crack Problems / *Y. Zeng, Y. T. Hu, J. S. Yang* // J. Huazhong Univ. Sci. Technol. — 2005. — Vol. 22. — P. 31-35.
[261] *Zubko, P.* Strain-Gradient-Induced Polarization in $SrTiO_3$ Single Crystals / *P. Zubko, G. Catalan, P. R. L. Welche et al.* // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Vol. 99. — P. 167601-167604.

Linear theories of electromagnetomechanics of dielectrics

Vasyl Kondrat, Olha Hrytsyna

This paper deals with linear theories of coupled electro-magneto-mechanics of dielectric bodies including the theories with constitutive equations of non-local type, in which the space of the state parameter includes not only general parameters like deformation tensor, polarization vector, electric filed stress but also their space derivatives or the relation between the coupled state parameters is of integral type with kernels depending on space coordinates. The basic ideas and relationships of both Voigt's and Toupin's theories of piezoelectric materials, as well as the Burak's theory of dielectrics are briefly reviewed. A brief information is given about the bases and achievements of non-local theories of dielectrics which in model description take into account the dependence of the body state on: (1) the strain gradients; (2) the polarization gradient; (3) the electric field gradients or higher electric moments (quadrupoles, octupoles and so on); (4) theories which predict the constitutive relations of integral type, and also theories (5) which take into account the process of local mass displacement as well as the electromagnetic and deformations processes. The multicontinuum approach to the construction of the theory of the mechanical and electromagnetic fields interaction in elastic polarized medium is briefly analyzed too. It is shown that the non-local theories of dielectrics describe a number of the experimental problems that can be not described by classical theories. The article contains 261 references.

Линейные теории электромагнитомеханики диэлектриков

Василий Кондрат, Ольга Грицина

Статья посвящена обзору линейных теорий взаимосвязанной электромагнитомеханики диэлектрических тел, в том числе нелокальных, в пространство параметров состояния которых входят не только общепринятые параметры, такие как тензор деформации, вектор поляризации или вектор напряженности электрического поля, но и их пространственные производные, или же связь между сопряженными параметрами состояния является интегральной с ядрами, зависящими от пространственных координат. Изложены основные идеи и соотношения теории пьезоэлектриков Фойгта, Тупина и теории диэлектриков Бурака. Кратко рассмотрены основы и успехи нелокальных теорий диэлектриков, учитывающих в модельном описании зависимость состояния тела от: (1) градиентов тензора деформации; (2) градиента вектора поляризации; (3) градиентов вектора напряженности электрического поля или высших электрических моментов (квадруполей, октуполей и т. д.); (4) теорий, предусматривающих интегральную взаимосвязь между параметрами состояния, а также (5) теорий, учитывающих наряду с электромагнитными и деформационными процессами также процесс локального смещения массы. Кратко проанализирован многоконтинуумный подход к построению теории взаимодействия механических и электромагнитных полей в упругих поляризирующихся средах. Показано, что нелокальные теории диэлектриков позволяют описать ряд наблюдаемых эффектов, не объясняемых классической теорией. Статья содержит 261 ссылку.

Отримано 21.04.09