

Математична модель перехідних процесів перенесення маси та імпульсу в довгому газопроводі

Василь Чекурін

Д. ф.-м. н. ,професор, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: chekurin@iappmm.lviv.ua

У рамках нелінійної моделі газової динаміки сформульовані задачі розрахунку перехідних процесів перенесення маси й імпульсу в довгому газопроводі. Розглянуто чотири схеми керування перехідними процесами шляхом монотонної зміни параметрів потоку на вході та виході. Введені крайові та інтегральні міри неусталеності потоку та міра енергетичних затрат на подолання сил тертя. Розроблено алгоритм числового розв'язування сформульованих нелінійних задач і розглянуто приклад його реалізації для розрахунку перехідного процесу у разі застосування однієї із схем керування. На основі отриманих числових результатів оцінено тривалість процесу та енергозатрати на його здійснення.

Ключові слова: динаміка руху газу в трубопроводі, перехідні процеси, числові методи.

Вступ. Ефективні методи розрахунку газодинамічних процесів необхідні, зокрема, для створення систем оптимального керування процесами транспортування природного газу магістральними газопроводами [1]. Газопровід можна розглядати як систему довгих трубопроводів (сегментів), послідовно з'єднаних через компресорні станції. Математична модель руху газу в такій системі складається з нелінійних одновимірних рівнянь газової динаміки, які пов'язують параметри потоку в кожному сегменті, та нелінійних умов спряження цих параметрів на межі сусідніх сегментів, що враховують дію компресорних станцій на газовий потік. Математичні моделі процесів транспортування природного газу магістральними газопроводами розглядалися, зокрема, в публікаціях [2-3].

Метою статті є формулювання в рамках моделі газової динаміки початково-крайових задач для опису перехідних процесів, які виникають за зміни режимів течії газу, розроблення алгоритму числового розв'язування сформульованих задач та оцінка його ефективності.

1. Математична модель динаміки газу в довгому трубопроводі

Дослідження проведемо в рамках одновимірної моделі, яка описує нестационарний рух газу в циліндричній трубі сталого діаметру [4]. Обмежимося тут ізотермічним випадком, вважаючи температуру T газу незалежною від часу t та координати x уздовж осі труби. Вихідними диференціальними рівняннями для кожного сегмента у цьому випадку є рівняння балансу маси

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

та рівняння балансу імпульсу

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V^2 + P) + \rho g \frac{\partial h}{\partial x} + f_R = 0. \quad (2)$$

Тут ρ — густина маси газу, V — осереднена в перерізі труби осьова компонента макроскопічної швидкості руху газу, P — тиск газу, g — прискорення земного тяжіння, $h = h(x)$ — параметр, що визначає зміну висоти осі труби над рівнем моря, f_R — густина осередненої в перетині труби сили тертя.

Густина ρ газу пов'язана з його тиском P та температурою T рівнянням

$$P = R/\mu_g z \rho T = c_0^2 z \rho, \quad c_0^2 \equiv RT/\mu_g, \quad (3)$$

де R — універсальна газова стала, μ_g — молярна маса газу, z — коефіцієнт надстисливості, що враховує відмінність реальних термодинамічних властивостей від моделі ідеального газу. Відомі емпіричні формули, які визначають z як функцію параметрів стану P та T [5].

За достатньо високих швидкостей течії сила f_R виражається формулою Дарсі-Вейсбаха [5]

$$f_R = \frac{\lambda |V|}{2D} \rho V. \quad (4)$$

Тут λ — коефіцієнт гідравлічного опору, що визначається шорсткістю внутрішньої поверхні труби та її внутрішнім діаметром D .

Використовуючи формули (3), (4), зведемо математичну модель руху газу в трубопроводі до нелінійної системи диференціальних рівнянь у частинних похідних стосовно функцій $\rho(x, t)$, $J(x, t)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{J^2}{\rho} \right) + \frac{\lambda}{2D} \frac{|J|J}{\rho} + g \frac{dh}{dx} \rho = 0. \quad (6)$$

За такого вибору ключових функцій перше з рівнянь системи є лінійне.

Без зниження загальності можна розглядати коефіцієнт надстисливості z і як функцію параметрів стану ρ та T . Тож, на підставі формули (3) маємо

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = c_0^2 Z(\rho), \quad Z(\rho) \equiv z(\rho) + \rho \frac{\partial z(\rho)}{\partial \rho}. \quad (7)$$

За відомими ρ , J неважко підрахувати тиск P та швидкість V потоку

$$P = c_0^2 z(\rho) \rho, \quad V = J/\rho. \quad (8)$$

Перейдемо до безрозмірних змінних

$$\xi = 2 \frac{x}{L} - 1, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad j = \frac{J}{J_0}, \quad p = \frac{P}{P_0}, \quad v = \frac{V}{V_0}, \quad (9)$$

де L — довжина трубопроводу, $t_0 \equiv L/c_0$, ρ_0 — густина, що відповідає характерному тискові $P_0 = c_0^2 z(\rho_0)\rho_0$, $V_0 = J_0/\rho_0$ — характерна швидкість.

У результаті система (5), (6) набуває вигляду

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tau} + Ma \frac{\partial j}{\partial \xi} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial j}{\partial \tau} + \frac{1}{Ma} Z(\tilde{\rho}) \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \xi} + Ma \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{j^2}{\tilde{\rho}} \right) + Ma \beta \left(\frac{j^2}{\tilde{\rho}} \right) + \frac{d\gamma}{d\xi} \tilde{\rho} = 0. \quad (11)$$

Тут $Ma = \frac{J_0}{\rho_0 c_0} = \frac{V_0}{c_0}$, $\beta = \frac{\lambda L}{2D}$, $\gamma = \frac{H}{H_0}$, $H_0 = \frac{c_0 V_0}{g}$.

У стаціонарному випадку $\partial \tilde{\rho} / \partial \tau = \partial j / \partial \tau = 0$. Із рівняння (10) випливає, що $j(\xi) = const$. З урахуванням цього рівняння (11) набуває вигляду

$$\frac{d\tilde{\rho}}{d\xi} = - \frac{Ma^2 \beta j^2 \tilde{\rho} + Ma \frac{d\gamma}{d\xi} \tilde{\rho}^3}{Z(\tilde{\rho}, T) \tilde{\rho}^2 - Ma^2 j^2}. \quad (12)$$

2. Модель керування перехідними режимами

З усіх можливих випадків нестационарного руху газу в трубопроводі виокремимо так звані перехідні режими. Тож розглядатимемо динамічний процес, що розпочинається з деякого усталеного режиму 0 і завершується іншим усталеним режимом 1.

Нехай J^0 та J^1 — густини потоків маси через трубопровід у режимах 0 та 1, а P_-^0 та P_+^0 і P_-^1 та P_+^1 — статичні тиски, що діють на вході та виході трубопроводу в цих режимах. Щоб знайти розподіли тиску $P^0(x)$ і $P^1(x)$ у трубі в режимах 0 та 1, покладемо в рівнянні (12) $j = J^0/J_0 \equiv j^0$, а відтак $j = J^1/J_0 \equiv j^1$ і проінтегруємо отримані рівняння, підпорядкувавши їх розв'язки $\tilde{\rho}^0 \equiv \tilde{\rho}^0(\xi)$ та $\tilde{\rho}^1 \equiv \tilde{\rho}^1(\xi)$ одній із двох крайових умов

$$\tilde{\rho}^\lambda \Big|_{\xi=-1} = \tilde{\rho}_-^\lambda, \quad \tilde{\rho}^\lambda \Big|_{\xi=1} = \tilde{\rho}_+^\lambda \quad (\lambda = 0, 1), \quad (13)$$

де

$$\tilde{\rho}_-^\lambda = \frac{P_-^\lambda}{c_0^2 z(P_-^\lambda) \rho_0}, \quad \tilde{\rho}_+^\lambda = \frac{P_+^\lambda}{c_0^2 z(P_+^\lambda) \rho_0}. \quad (14)$$

Першу з двох умов (13) використовуємо, якщо в режимі λ заданий тиск на вході до трубопроводу, а другу — на виході.

За знайденими розв'язками визначаємо розподіли тисків $P^\lambda(x)$ у трубці

$$P^\lambda(x) = P_0 c_0^2 \tilde{\rho}^\lambda(x/L_0) z(\tilde{\rho}^\lambda(x/L_0), T), \quad (15)$$

а також значення тиску на її протилежному кінці. Наприклад, якщо в режимі λ задано тиск P_-^λ на вході, то тиск на виході P_+^λ знайдемо як $P_+^\lambda = P_0 c_0^2 \tilde{\rho}^\lambda(1) \times z(\tilde{\rho}^\lambda(1), T)$, і, навпаки, якщо задано тиск на виході P_+^λ , то для тиску на вході маємо

$$P_-^\lambda = P_0 c_0^2 \tilde{\rho}^\lambda(-1) z(\tilde{\rho}^\lambda(-1), T). \quad (16)$$

Зміни режиму експлуатації досягають нарощуючи або знижуючи механічну потужність, яку віддають у газовий потік компресорні станції. Внаслідок цього рух газу характеризується змінними в часі розподілами тиску та густини потоку в сегментах.

Зроблені припущення дозволяють розглядати варіанти крайових умов для кожного сегмента, коли на обох його кінцях задані залежності від часу значень тиску (умови першого роду) чи густини потоку маси (умови другого роду), або ж змішані умови — коли на вході задано зміну тиску, а на виході — потоку і, навпаки, коли на вході задано зміну потоку, а на виході — тиску. Відповідно до цього розглядатимемо для системи (10), (11) такі умови на краях кожного сегмента

$$\tilde{\rho}|_{\xi=-1} = \tilde{\rho}_-(\tau), \quad \tilde{\rho}|_{\xi=1} = \tilde{\rho}_+(\tau), \quad (17)$$

$$j|_{\xi=-1} = j_-(\tau), \quad j|_{\xi=1} = j_+(\tau), \quad (18)$$

$$\tilde{\rho}|_{\xi=-1} = \tilde{\rho}_-(\tau), \quad j|_{\xi=1} = j_+(\tau), \quad (19)$$

$$j|_{\xi=-1} = j_-(\tau), \quad \tilde{\rho}|_{\xi=1} = \tilde{\rho}_+(\tau). \quad (20)$$

Тут

$$\tilde{\rho}_\pm(\tau) = \frac{P_\pm(\tau t_0)}{c_0^2 z(P_\pm(\tau t_0), T) \rho_0}, \quad j_\pm(\tau) = J_\pm(\tau t_0) / J_0, \quad (21)$$

де $P_\pm(t)$ та $J_\pm(t)$ — задані функції, які визначають зміни в часі значень тиску та густини потоку маси на вході (–) і виході (+) сегмента.

Оскільки перехідний режим розпочинається з усталеного режиму 0, то початкові умови для системи (10), (11) будуть такі

$$\tilde{\rho}|_{\tau=0} = \tilde{\rho}^0(\xi), \quad j|_{\tau=0} = j^0. \quad (22)$$

Отже, за такого підходу чотири крайові задачі (10), (11), (17), (22); (10), (11), (17), (22); (10), (11), (18), (22) та (10), (11), (19), (22) визначають чотири моделі (схеми) керування перехідними режимами магістральних трубопроводів. Функціями керування є $P_\pm(t), J_\pm(t)$, через які співвідношеннями (21) однозначно визначаються функції правих частин крайових умов (17)-(20).

З усіх можливих функцій керування $P_{\pm}(t)$ та $J_{\pm}(t)$ розглядатимемо лише ті, що монотонно змінюються в межах $[P_{\pm}^0, P_{\pm}^1]$ та $[J^0, J^1]$ відповідно.

За умов, коли проміжки часу Δ_{\pm}^P та Δ_{\pm}^J , за які функції керування $P_{\pm}(t)$ та $J_{\pm}(t)$ змінюються в межах від P_{\pm}^0 до P_{\pm}^1 та від J^0 до J^1 відповідно, є набагато менші за час переходу системи до усталеного режиму 1, важливе значення для перебігу перехідного процесу матимуть середні швидкості зміни функцій $P_{\pm}(t)$ та $J_{\pm}(t)$. Тому обмежимося надалі розглядом функцій керування $P_{\pm}(t)$ та $J_{\pm}(t)$, які лінійно змінюються в інтервалах $[P_{\pm}^0, P_{\pm}^1]$ і $[J^0, J^1]$ за задані проміжки часу Δ_{\pm}^P та Δ_{\pm}^J .

Для цього введемо функцію

$$\varphi(t, \Delta) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ t/\Delta, & 0 < t \leq \Delta, \quad \Delta > 0, \\ 1, & \Delta < t, \end{cases} \quad (23)$$

з допомогою якої подамо функції керування перехідними режимами роботи газопроводу у вигляді

$$\begin{aligned} P_{-}(t) &= P_{-}^0 + (P_{-}^1 - P_{-}^0)\varphi(t, \Delta_{-}^P), & P_{+}(t) &= P_{+}^0 + (P_{+}^1 - P_{+}^0)\varphi(t - t^P, \Delta_{+}^P), \\ J_{-}(t) &= J^0 + (J^1 - J^0)\varphi(t, \Delta_{-}^J), & J_{+}(t) &= J^0 + (J^1 - J^0)\varphi(t - t^J, \Delta_{+}^J). \end{aligned} \quad (24)$$

Тут t^P та t^J — дійсні сталі, які мають розмірність часу та визначають запізнення (випередження) функцій керування на виході сегмента стосовно вхідних функцій.

З урахуванням цього крайові умови (17)-(20) набувають вигляду

$$\tilde{\rho}|_{\xi=-1} = \tilde{\rho}_{-}^0 + (\tilde{\rho}_{-}^1 - \tilde{\rho}_{-}^0)\varphi(\tau, \Delta_{-}^P), \quad \tilde{\rho}|_{\xi=+1} = \tilde{\rho}_{+}^0 + (\tilde{\rho}_{+}^1 - \tilde{\rho}_{+}^0)\varphi(\tau - \tau^P, \Delta_{+}^P), \quad (25)$$

$$j|_{\xi=-1} = j^0 + (j^1 - j^0)\varphi(\tau, \Delta_{-}^J), \quad j|_{\xi=+1} = j^0 + (j^1 - j^0)\varphi(\tau - \tau^J, \Delta_{+}^J), \quad (26)$$

$$\tilde{\rho}|_{\xi=-1} = \tilde{\rho}_{-}^0 + (\tilde{\rho}_{-}^1 - \tilde{\rho}_{-}^0)\varphi(\tau, \Delta_{-}^P), \quad j|_{\xi=+1} = j^0 + (j^1 - j^0)\varphi(\tau - \tau^J, \Delta_{+}^J), \quad (27)$$

$$j|_{\xi=-1} = j^0 + (j^1 - j^0)\varphi(\tau, \Delta_{-}^J), \quad \tilde{\rho}|_{\xi=+1} = \tilde{\rho}_{+}^0 + (\tilde{\rho}_{+}^1 - \tilde{\rho}_{+}^0)\varphi(\tau - \tau^P, \Delta_{+}^P). \quad (28)$$

Тут $\tilde{\rho}_{\pm}^{\lambda} = \frac{P_{\pm}^{\lambda}}{c_0^2 \rho_0 z(P_{\pm}^{\lambda}, T)}$, $j^{\lambda} = \frac{J^{\lambda}}{J_0}$, $\Delta_{\pm}^{P,J} = \frac{\Delta_{\pm}^{P,J}}{t_0}$, $\tau^{P,J} = \frac{t^{P,J}}{t_0}$.

Таким чином, згідно запропонованого підходу будь-яка з чотирьох схем керування перехідним режимом визначається для кожного сегмента трьома скалярними параметрами — середніми швидкостями зміни керуючого параметра на його вході й виході та часовим зсувом між вхідною і вихідною керуючими функціями. Так, за моделі керування (27) цими параметрами є середня швидкість

зміни тиску на вході $(P_-^1 - P_-^0)/\Delta_-^P$, середня швидкість зміни потоку на виході $(J_-^1 - J_-^0)/\Delta_+^J$ і затримка (випередження) функції зміни потоку на виході стосовно функції зміни тиску на вході t^J .

3. Оцінювання ефективності керування

На основі розв'язку $\tilde{\rho}(\xi, \tau)$ та $j(\xi, \tau)$ початково-крайової задачі, що відповідає будь-якій вибраній схемі керування (17)-(20), можна оцінити енергетичні та часові затрати на реалізацію перехідного режиму.

Важливим параметром керування перехідним режимом є його тривалість. Газ, нагромаджений у трубопроводі, є інерційна система, перехідні процеси в якій тривають і після виходу на усталений режим компресорних станцій. Для оцінки тривалості перехідного режиму введемо міри відхилення миттєвого стану газу в трубопроводі від стаціонарного режиму 1, до якого прямує система. Розглядаємо два типи таких мір.

Міри першого типу визначають відхилення актуальних значень газодинамічних параметрів на кінцях сегмента від відповідних значень для усталеного режиму 1, до якого здійснюється перехід. Залежно від вибраної схеми керування (18)-(21) розглядатимемо чотири таких міри

$$\begin{aligned} \delta^J(\tau) &= \max(\delta_-^J(\tau), \delta_+^J(\tau)), & \delta^P(\tau) &= \max(\delta_-^P(\tau), \delta_+^P(\tau)), \\ \delta^{JP}(\tau) &= \max(\delta_-^J(\tau), \delta_+^P(\tau)), & \delta^{PJ}(\tau) &= \max(\delta_-^P(\tau), \delta_+^J(\tau)), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \text{де} \quad \delta_-^J(\tau) &= \left| \frac{j(-1, \tau) - j^1}{j^1} \right|, & \delta_+^J(\tau) &= \left| \frac{j(1, \tau) - j^1}{j^1} \right|, \\ \delta_-^P(\tau) &= \left| \frac{\tilde{\rho}(-1, \tau) - \tilde{\rho}_-^1}{\tilde{\rho}_-^1} \right|, & \delta_+^P(\tau) &= \left| \frac{\tilde{\rho}(1, \tau) - \tilde{\rho}_+^1}{\tilde{\rho}_+^1} \right|. \end{aligned} \quad (30)$$

Міри другого типу визначають відхилення миттєвих значень інтегральних характеристик руху газу в газопроводі. Розглядатимемо дві таких міри, що відповідають двом рівнянням динаміки газу (5) і (6). Одна з них $\delta^M(\tau)$ визначає відхилення маси газу, нагромадженого у трубі в поточний момент часу τ , від маси газу в трубі за стаціонарного режиму 1, а друга $\delta^J(\tau)$ — миттєве відхилення кількості руху цієї маси газу

$$\delta^M(\tau) = \frac{\int_{-1}^1 |\tilde{\rho}(\xi, \tau) - \tilde{\rho}^1(\xi)| d\xi}{\int_{-1}^1 \tilde{\rho}^1(\xi) d\xi}, \quad \delta^J(\tau) = \frac{\int_{-1}^1 |j(\xi, \tau) - j^1| d\xi}{j^1}. \quad (31)$$

Для будь-якого дійсного $\varepsilon > 0$ число $\tau_\varepsilon^\omega = \text{Inf} \{ \tau : \delta^\omega(\tau) \leq \varepsilon \}$, де ω — індекс $\omega \in \{j, \rho, i\rho, \rho j, M, J\}$, називатимемо безрозмірною тривалістю перехідного режиму зі стану 0 у стан 1 за мірою неусталеності $\delta^\omega = \varepsilon$.

Таким чином, введені міри (29) і (31) неусталеності режиму течії газу через трубопровід дозволяють кількісно оцінити для обраної схеми керування тривалість перехідного режиму та визначити вплив на τ_ε^ω параметрів функцій керування — середніх швидкостей зміни керуючого параметра на його вході і виході та зсуву за часом вхідної й вихідної керуючих функцій.

Оскільки в цій статті обмежилися моделлю ізотермічного руху, то енергетичну ефективність перехідного режиму оцінюватимемо лише за втратами енергії на подолання сил тертя.

Для будь-якого моменту часу τ можемо обчислити потужність сил тертя

$$W_R(\tau) = \beta \frac{\pi D^2 J_0^3}{8 \rho_0^2} \int_{-1}^1 \frac{j^3(\xi, \tau)}{\tilde{\rho}^2(\xi, \tau)} d\xi. \quad (32)$$

Тоді енергетичну ефективність перехідного режиму можемо оцінити за середніми за період його тривалості τ_ε^ω енергетичними затратами на транспортування одиниці маси газу

$$\eta_\varepsilon^\omega = \beta \frac{J_0^2}{2 \rho_0^2} \int_0^{\tau_\varepsilon^\omega} \int_{-1}^1 \frac{j^3(\xi, \tau)}{\tilde{\rho}^2(\xi, \tau)} d\xi d\tau \bigg/ \int_0^{\tau_\varepsilon^\omega} j(1, \tau) d\tau \quad (33)$$

і порівняти його з параметрами η^0 і η^1 , які визначають енергетичні затрати транспортування газу в усталених режимах 0 та 1

$$\eta^0 = \beta \frac{(J^0)^2}{2 \rho_0^2} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{(\tilde{\rho}^0(\xi))^2}, \quad \eta^1 = \beta \frac{(J^1)^2}{2 \rho_0^2} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{(\tilde{\rho}^1(\xi))^2}. \quad (34)$$

Таким чином, використовуючи введений параметр η_ε^ω , можемо кількісно порівнювати перехідні режими за величиною питомих втрат на подолання сил тертя для різних схем керування та залежно від середніх швидкостей зміни керуючих параметрів і часового зсуву між керуючими функціями на вході та виході.

4. Числові дослідження

Наведемо приклад застосування розробленого математичного апарату для дослідження схеми керування, за якої на входах усіх сегментів задані значення тиску газу як функції часу, а на виході — густини потоку. Окрім того обмежимося випадком синхронного керування усіма компресорними станціями.

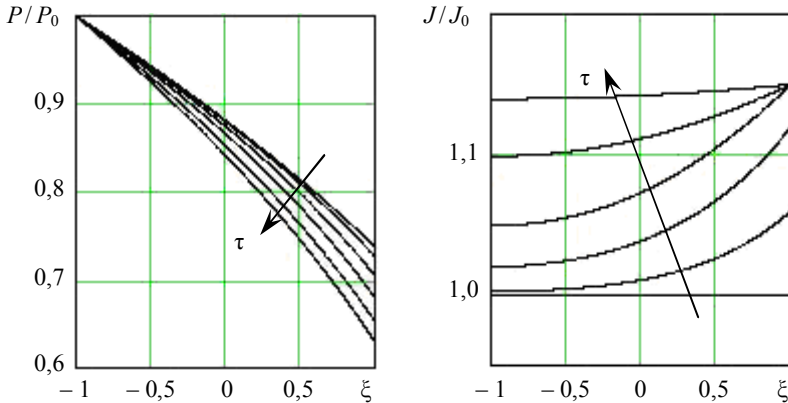


Рис. 1. Розподіли тиску та густини масового потоку вздовж труби у моменти часу $\tau = 0; 4; 8; 12; 20$ і 40 (стрілки на графіках вказують напрям зростання часу)

Для числового розв'язування початково-крайової задачі (10), (11), (22), (27) застосовували спектральний метод Бубнова-Гальоркіна, використовуючи як пробні та вагові функції поліноми Лежандра [6]. Для розв'язування отриманої нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь здійснювали її дискретизацію за методом Кранка-Ніколсона [6].

Розрахунок здійснювали для газової суміші у складі: метан — 98,6 %, етан — 0,15 %, двоокис вуглецю — 0,31 %, азот — 1,24 %. Приймали такі значення параметрів задачі: довжина трубопроводу $L = 120$ км, внутрішній діаметр труби $D = 1,378$ м, характерний тиск $P_0 = 6,65$ МПа, температура $T = 300$ К. Характерну густину масового потоку приймали $J_0 = 468$ кг/м²с, що відповідає комерційній витраті, віднесеній до стандартних умов — 86 млн. кубічних метрів за день. Коефіцієнт тертя брали $\lambda = 9,22 \cdot 10^{-3}$. Розраховані для таких параметрів характерний час $t_0 = 302,58$ с, число Маха $Ma = 0,024$, коефіцієнт $\beta = 413,46$.

На рис. 1 наведені результати числового розв'язування задачі (10), (11), (22), (27) для випадку, коли масовий потік на виході підвищують на 15 % за проміжок часу $10t_0$ без зміни тиску на вході трубопроводу. При розрахунках приймали $N = 15$, крок дискретизації за часом $\delta\tau = 0,05$.

На рис. 2 показані залежності від часу мір неусталеності $\delta_-^J(\tau)$ (суцільна лінія), $\delta_+^P(\tau)$ (штрихова лінія) $\delta^M(\tau)$ (штрих-пунктирна лінія) та $\delta^J(\tau)$ (пунктирна лінія). Для $\tau = 48$ отримано $\delta_-^J(\tau) = 4,79 \cdot 10^{-3}$, $\delta_+^P(\tau) = 3,24 \cdot 10^{-3}$, $\delta^M(\tau) = 1,28 \cdot 10^{-3}$, $\delta^J(\tau) = 6,42 \cdot 10^{-3}$. На цій підставі можемо стверджувати, що з точністю $6,42 \cdot 10^{-3}$ тривалість перехідного процесу, визначена за мірою неусталеності δ^J , дорівнює $48t_0 \approx 1,452 \cdot 10^4$ с, тобто сягає понад чотири години.

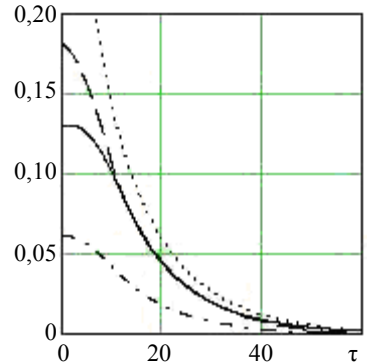


Рис. 2. Залежність мір неусталеності процесу від часу

Питомі енергетичні затрати на подолання сил тертя, віднесені до сталої $(\beta J_0^2)/(2\rho_0^2) = 8,143$ Дж/кг складають для перехідного режиму $\eta_E^J = 3,689$, а для усталених режимів 0 та 1 $\eta^0 = 2,744$ та $\eta^1 = 3,207$ відповідно.

Висновки. Сформульовані одновимірні нестационарні початково-крайові задачі динаміки газу в довгій циліндричній трубі, які описують перехідні процеси, що виникають за зміни режимів роботи газопроводу високого тиску. Функції керування перехідним режимом визначені трьома скалярними параметрами — середніми швидкостями зміни заданих параметрів потоку на кінцях і часовим зсувом між керуючими діями на вході та виході трубопроводу.

Запропоновано підхід до оцінювання тривалості перехідного процесу та питомих енергозатрат на транспортування газу. Це дозволяє кількісно порівнювати за часовою й енергетичною ефективністю перехідні режими для різних схем і параметрів керування.

Розроблено алгоритм числового розв'язування сформульованих нелінійних задач із використанням апроксимації розв'язку поліномами Лежандра та дискретизації за часом отриманих систем звичайних нелінійних диференціальних рівнянь. Проведені числові експерименти для різних режимів і параметрів керування підтвердили високу ефективність алгоритму та можливість його застосування для моделювання нестационарних процесів у магістральних газопроводах.

Розглянута у статті модель ізотермічної течії не враховує енергозатрат, зумовлених нагріванням газу внаслідок його компресування та теплообміном із зовнішнім середовищем. Щоб підвищити практичну цінність розробленого підходу для розрахунку перехідних режимів роботи реальних газопроводів у подальшому його буде розвинено шляхом урахування в математичній моделі процесу перенесення енергії у взаємозв'язку з перенесенням маси та імпульсу. Окрім того, планується ввести у розгляд термодинамічні параметри, що описують роботу компресорних станцій, та пов'язати їх із параметрами керування перехідними режимами.

Література

- [1] Чекурін, В. До побудови програмної системи для моделювання та оптимізації процесів транспортування природного газу / В. Чекурін // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. — 2007. — Вип. 5. — С. 158-170.
- [2] Modelling the Dynamics of Flow in Gas Pipelines / J. Kralik, P. Stiegler, Z. Vostry and J. Zavorka // IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics. — July/August, 1984. — Vol. sms-14, No 4. — P. 586-596.
- [3] A Universal Dynamic Simulation Model of Gas Pipeline Networks / J. Kralik, P. Stiegler, Z. Vostry and J. Zavorka // IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics. — July/August, 1984. — Vol. sms-14, No 4. — P. 597-606.
- [4] Чарный, И. А. Основы газовой динамики / И. А. Чарный. — Москва: Гостоптехиздат, 1961. — 200 с.
- [5] Rohsenow, W. M. Handbook of Heat Transfer Fundamentals, 2nd edition / W. M. Rohsenow, J. P. Hartnett and E. N. Ganic. — New York: McGraw-Hill, 1985. — 1440 p.
- [6] Флэтчер К. Численные методы на основе метода Галеркина / К. Флэтчер. — Москва: Мир, 1988. — 352 с.

A mathematical model for the transient processes of mass and momentum transfer in a long gas pipeline

Vasyl Chekurin

Boundary value problems for calculation of transient processes of mass and momentum transfer in a long pipeline have been formulated within the nonlinear model of gas dynamics. Four models for transient processes control, implemented via monotonous changing of flow parameters on the inlet and outlet of the pipeline, have been considered. Boundary and integral measures for flow transiency and a measure for friction power inputs have been introduced. An algorithm for numerical solution of the problems has been developed and an example of its application to calculate transient process, controlled by one of the introduced models, has been considered. Duration of the transient process and power input for its implementation has been evaluated.

Математическая модель переходных процессов переноса массы и импульса в длинном газопроводе

Василь Чекурин

В рамках нелинейной модели газовой динамики сформулированы задачи для расчета переходных процессов переноса массы и импульса в длинном газопроводе. Рассмотрены четыре схемы управления переходными процессами путем монотонного изменения параметров потока на входе и выходе. Введены краевые и интегральные меры нестационарности потока, а также мера энергетических затрат на преодоления сил трения. Разработан алгоритм численного решения сформулированных нелинейных задач и рассмотрен пример его реализации для расчета переходного процесса при применении одной из схем управления. Исходя из полученных численных результатов получена оценка длительности переходного процесса и рассчитаны энергозатраты на его осуществление.

Отримано 05.05.10