УДК 518.5

Інтерполяція сумою полінома та нелінійного виразу

Василь Андруник[1], Петро Малачівський[2]

[1] Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, e-mail: aprox@complex.lviv.ua
[2] д. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: psmal@cmm.lviv.ua

Встановлено необхідні та достатні умови існування інтерполяції сумою полінома та нелінійного виразу. Вказано функції, що задовольняють цим умовам. Запропоновано й обґрунтовано схему обчислення значення параметрів інтерполяції сумою полінома й експоненти, а також полінома та степеня.

Ключові слова: інтерполяція нелінійним виразом, умови існування.

Вступ. Труднощі інтерполяції нелінійними виразами зумовлені двома причинами: така інтерполяція не завжди існує, а в разі існування — обчислення значень параметрів, що входять у вираз нелінійно, здебільшого доволі трудомістке.

У цій праці встановлено необхідні та достатні умови існування інтерполяції сумою полінома та нелінійного виразу з одним параметром

$$V_n\left(a;x\right)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i+A\varphi\left(p;x\right),\quad A\neq 0,\quad p_1<p<p_2,\quad n=0,1,2,\dots. \tag{1}$$

Такі вирази використовують для опису різних фізичних процесів [1-3] та наближення деяких спеціальних функцій, зокрема, еліптичних інтегралів [4]. Розроблено також електронні схеми [1, 2, 5], які реалізують обчислення значень виразу (1).

1. Існування інтерполяції сумою полінома та нелінійного виразу

Нехай у виразі вигляду (1) нелінійна функція $\varphi(p, x)$ із параметром p має такі властивості:

u1) функція $\varphi(p, x)$ неперервна на відрізку $[\alpha, \beta]$ разом із $(n + 1)$-ою похідною $\varphi(p;x)\in C^{n+1}[\alpha,\beta]$;

u2) функція $\varphi(p, x)$ та її похідні $\varphi^{(i)}\left(p;x\right)$, $i=\overline{1,n}$, є строго монотонні функції від x на відрізку $[\alpha, \beta]$ для будь-яких $p\in(p_1, p_2)$;

u3) відношення $(n + 1)$-их похідних $\varphi(p, x)$ по x $\varphi^{(n+1)}\left(p;\chi_2\right)/\varphi^{(n+1)}\left(p;\chi_1\right)$ є строго монотонна функція від p для $p\in(p_1, p_2)$ та будь-яких різних $\chi_1, \chi_2\in[\alpha, \beta]$.

Розглянемо неперервні на $[\alpha, \beta]$ функції $f(x)$, що справджують нерівності

$$0<\tilde{W}_1^{(n)}<\tilde{W}^{(n)}<\tilde{W}_2^{(n)}, \tag{2}$$

де

$$\tilde{W}^{(n)} = \tilde{D}_{n+1}\left(f; z_2, z_3, ..., z_{n+3}\right) / \tilde{D}_{n+1}\left(f; z_1, z_2, ..., z_{n+2}\right), \tag{3}$$

$$\tilde{D}_k\left(U; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+k}\right) = \frac{\tilde{D}_{k-1}\left(U; z_{j+1}, z_{j+2}, ..., z_{j+k}\right)}{\tilde{D}_{k-1}\left(s_{k-1}; z_{j+1}, z_{j+2}, .., z_{j+k}\right)} -$$

$$-\frac{\tilde{D}_{k-1}\left(U; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+k-1}\right)}{\tilde{D}_{k-1}\left(s_{k-1}; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+k-1}\right)}, \ k = \overline{2, n+1}, \ j = \overline{1, n-k+3}, \tag{4}$$

$$\tilde{D}_1\left(U; z_j, z_{j+1}\right) = U\left(z_{j+1}\right) - U\left(z_j\right), \qquad j = \overline{1, n+2}, \tag{5}$$

$$s_k(x) = x^k,$$

$$\tilde{W}_1^{(n)} = \min\left(r_1^{(n)}, r_2^{(n)}\right); \qquad \tilde{W}_2^{(n)} = \max\left(r_1^{(n)}, r_2^{(n)}\right); \tag{6}$$

$$r_i^{(n)} = \lim_{p \to p_i} \tilde{D}_{n+1}\left(\varphi; z_2, z_3, ..., z_{n+3}\right) / \tilde{D}_{n+1}\left(\varphi; z_1, z_2, ..., z_{n+2}\right), \quad i = 1, 2; \tag{7}$$

а $z_j\left(j = \overline{1, n+3}\right)$ — будь-які, впорядковані за зростанням, числа з відрізка [α, β].

Умови існування інтерполяції функції $f(x)$ виразом (1) на множині точок $z_j\left(j = \overline{1, n+3}\right)$ з відрізка [α, β] сформулюємо у вигляді *теореми 1*.

Теорема 1. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку [α, β], а функція $\varphi(p, x)$ задовольняє вимогам u1, u2 й u3. Тоді необхідною та достатньою умовою існування інтерполяції функції $f(x)$ виразом (1) на множині різних впорядкованих за зростанням точок $z_j\left(j = \overline{1, n+3}\right)$ з [α, β] є справдження нерівностей (2).

Доведення. Нехай функція $f(x)$ задовольняє умови теореми. Тоді для існування інтерполяції функції $f(x)$ виразом (1) на множині різних точок $z_j\left(j = \overline{1, n+3}\right)$ з відрізка [α, β] необхідно та достатньо, щоб система рівнянь

$$f\left(z_j\right) - \sum_{i=0}^{n} a_i z_j^i - A\varphi\left(p; z_j\right) = 0, \quad j = \overline{1, n+3}, \tag{8}$$

мала єдиний розв’язок щодо невідомих параметрів $a_i\left(i = \overline{0, n}\right)$, A та p.

Покажемо, що в разі справдження умов (2) система рівнянь (8) має єдиний розв’язок. Припустимо, що точки $z_j\left(j = \overline{1, n+3}\right)$ впорядковані за зростанням. Після вилучення з системи (8) невідомого a_0 отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\left(z_{j+1}^i - z_j^i\right) + A\left(\varphi\left(p; z_{j+1}\right) - \varphi\left(p; z_j\right)\right) = f\left(z_{j+1}\right) - f\left(z_j\right), \quad j = \overline{1, n+2}. \tag{9}$$

З урахуванням співвідношень (4)-(5) система рівнянь (9) набуває такого вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \tilde{D}_1\left(s_i; z_j, z_{j+1}\right) + A\tilde{D}_1\left(\varphi; z_j, z_{j+1}\right) = \tilde{D}_1\left(f; z_j, z_{j+1}\right), \quad j = \overline{1, n+2}. \tag{10}$$

З отриманої системи виключимо невідомі $a_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ і A, що входять лінійно. Виключення параметрів $a_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ проводитимемо в порядку зростання індексу таким чином. Для i = 1 спочатку з кожного рівняння системи (10) визначимо a_1, а потім, попарно віднімаючи j-ті рівняння від (j + 1)-их, отримаємо систему

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \tilde{D}_2\left(s_i; z_j, z_{j+1}, z_{j+2}\right) + A\tilde{D}_2\left(\varphi; z_j, z_{j+1}, z_{j+2}\right) = \\ = \tilde{D}_2\left(f; z_j, z_{j+1}, z_{j+2}\right), \quad j=\overline{1,n+1}, \tag{11}$$

щодо невідомих $a_i\left(i=\overline{2,n}\right)$, A і p. Таке виключення з системи рівнянь (10) невідомого a_1 допустиме, тому що коефіцієнти біля нього

$$\tilde{D}_1\left(S_1; z_j, z_{j+1}\right) = z_{j+1} - z_j, \quad j=\overline{1,n+2},$$

не набувають нульового значення — числа $z_i\left(i=\overline{1,n+3}\right)$ впорядковані за зростанням. Для продовження виключення решти параметрів $a_i\left(i=\overline{2,n}\right)$ необхідно попередньо переконатися, що коефіцієнти біля них також відмінні від нуля. Справді, ці коефіцієнти для будь-яких упорядкованих за зростанням чисел $z_i\left(i=\overline{1,n+3}\right)$ з $[\alpha, \beta]$ не дорівнюють нулю. Щоб переконатися в цьому розглянемо вирази

$$\tilde{D}_k\left(s_{k+1}; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+k}\right) \Big/ \tilde{D}_k\left(s_k; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+k}\right), \quad k=\overline{1,n-1}. \tag{12}$$

Для k = 1 значення цього виразу дорівнює відношенню приросту функції $s_2(z) = z^2$ до приросту аргументу

$$\tilde{D}_1\left(s_2; z_j, z_{j+1}\right) \Big/ \tilde{D}_1\left(s_1; z_j, z_{j+1}\right) = \left(z_{j+1}^2 - z_j^2\right) \Big/ \left(z_{j+1} - z_j\right).$$

За теоремою Лагранжа [6] про кінцеві прирости, значення цього відношення дорівнює значенню похідної функції $s_2(z) = z^2$ в деякій середній точці ζ_j відрізка $\left[z_j, z_{j+1}\right]\left(\zeta_j \in \left[z_j, z_{j+1}\right]\right)$.

Аналогічно, застосувавши теорему Лагранжа та послідовно (k – 1) раз теорему Коші про відношення приростів функцій [6], можна переконатись у справедливості рівності

$$\tilde{D}_k\left(s_k; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+k}\right) = \xi_{j+1} - \xi_j, \tag{13}$$

де $\xi_j \in [z_j, z_{j+k}]$. Оскільки (k – 1)-а похідна степеневої функції $s_k(z) = z^k$ строго монотонна та точки $z_j\left(j=\overline{1,n+3}\right)$ різні й упорядковані за зростанням, то числа $\xi_j\ \left(j=\overline{1,n-k+4}\right)$ відповідно до [1] також будуть упорядковані за зростанням, тобто $\xi_j < \xi_{j+1}$. Звідси випливає, що коефіцієнти біля невідомого a_k в усіх рівняннях відповідної системи рівнянь набувають лише додатних значень.

Отже, у запропонований спосіб із системи рівнянь (11) можна виключити решта невідомих параметрів $a_i\left(i=\overline{2,n}\right)$. У результаті, щодо невідомих A і p, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} A\tilde{D}_{n+1}\left(\varphi;z_2,z_3,...,z_{n+3}\right)=\tilde{D}_{n+1}\left(f;z_2,z_3,...,z_{n+3}\right), \\ A\tilde{D}_{n+1}\left(\varphi;z_1,z_2,...,z_{n+2}\right)=\tilde{D}_{n+1}\left(f;z_1,z_2,...,z_{n+2}\right). \end{cases} \tag{14}$$

Дослідимо вільні члени рівнянь цієї системи та коефіцієнти біля невідомого A. Для цього розглянемо вираз

$$\tilde{D}_n\left(U;z_j,z_{j+1},...,z_{j+n}\right)\Big/\tilde{D}_n\left(s_n;z_j,z_{j+1},...,z_{j+n}\right). \tag{15}$$

Аналогічно, як і для співвідношення (12), застосувавши теорему Лагранжа та послідовно $(n-1)$ раз теорему Коші, можна показати, що вираз (15) є розділена різниця n-го порядку функції $U(z)$, помножена на $n!$ на множині точок $\left\{z_i\right\}_{i=j}^{j+n+1}$. А тому він дорівнює n-ій похідній функції $U(z)$ у деякій середній точці ς_j з відрізка $\left[z_j,z_{j+n}\right]\left(\varsigma_j\in\left[z_j,z_{j+n}\right]\right)$

$$\tilde{D}_n\left(U;z_j,z_{j+1},...,z_{j+n}\right)\Big/\tilde{D}_n\left(s_n;z_j,z_{j+1},...,z_{j+n}\right)=U^{(n)}\left(\varsigma_j\right). \tag{16}$$

Звідси випливає, що коефіцієнти біля невідомого A в системі рівнянь (14) дорівнюють приросту n-ої похідної функції $\varphi(p,x)$ за аргументом x, яка за умовою теореми строго монотонна. Отже, коефіцієнти біля невідомого A в системі (14) не набувають нульових значень. Тому система (14) матиме дійсний відмінний від нульового розв'язок щодо невідомого A, якщо ще й вільні члени рівнянь (14) також не набувають нульового значення. Згідно рівності (16) вільні члени рівнянь системи (14) дорівнюють приростам n-ої похідної функції $f(x)$

$$\tilde{D}_{n+1}\left(f;z_j,z_{j+1},...,z_{j+n+1}\right)=f^{(n)}\left(\xi_{j+1}\right)-f^{(n)}\left(\xi_j\right),\quad j=1,2, \tag{17}$$

де $\xi_j\in\left[z_j,z_{j+n}\right]$.

Оскільки згідно з умовою (2)

$$\tilde{W}^{(n)}<0 \tag{18}$$

відношення приростів n-их похідних функції $f(x)$ додатне за умовою теореми, то відповідно й самі прирости відмінні від нуля. Це означає, що вільні члени рівнянь системи (14) також не набувають нульових значень. Поділивши перше співвідношення системи (14) на друге, отримаємо щодо p трансцендентне рівняння

$$\omega_n\left(p\right)=\tilde{W}^{(n)}, \tag{19}$$

де

$$\omega_n\left(p\right)=\tilde{D}_{n+1}\left(\varphi;z_2,z_3,...,z_{n+3}\right)\big/\tilde{D}_{n+1}\left(\varphi;z_1,z_2,...,z_{n+2}\right). \tag{20}$$

Згідно формули (16) ліву частину рівняння (19) можна подати у вигляді

$$\omega_n(p) = \left(\varphi^{(n)}(p;\tau_3) - \varphi^{(n)}(p;\tau_2)\right) \Big/ \left(\varphi^{(n)}(p;\tau_2) - \varphi^{(n)}(p;\tau_1)\right), \tag{21}$$

де $\tau_i \in [z_i, z_{i+n}]$.

За умовою теореми n-на похідна $\varphi^{(n)}(p, x)$ є строго монотонна функція від x на відрізку $[\alpha, \beta]$ для будь-яких $p \in (p_1, p_2)$, тому згідно [7] справджуються співвідношення $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$. Отже, в лівій частині рівняння (19) можна сформувати відношення розділених різниць приростів n-ої похідної функції $\varphi(p; x)$. Для цього ліву частину рівняння (19) помножимо та поділимо на відповідні різниці приростів аргументу $(\tau_2 - \tau_1)/(\tau_3 - \tau_2)$. Замінивши в (21) отримані розділені різниці відповідними похідними в середніх точках, одержуємо

$$\omega_n(p) = K\varphi^{(n+1)}(p;\zeta_2) \big/ \varphi^{(n+1)}(p;\zeta_1), \tag{22}$$

де

$$K = (\tau_3 - \tau_2)/(\tau_2 - \tau_1), \qquad \zeta_1 \in (z_1, z_{n+2}), \qquad \zeta_2 \in (z_2, z_{n+3}).$$

Оскільки за умовою теореми відношення $(n+1)$-их похідних $\varphi^{(n+1)}(p;\chi_2) \big/ \varphi^{(n+1)}(p;\chi_1)$ є строго монотонна функція від p ($p_1 < p < p_2$) для будь-яких $\chi_1, \chi_2 \in [\alpha, \beta]$, то з (22) випливає, що ліва частина рівняння (19) є строго монотонна функція від p для $p \in (p_1, p_2)$. Таким чином, для будь-яких упорядкованих за зростанням чисел $z_i \left(i = \overline{1, n+3}\right)$ з відрізка $[\alpha, \beta]$, ліва частина рівняння (19) для $p \in (p_1, p_2)$ набуває значення з інтервалу $\left(\tilde{W}_1^{(n)}, \tilde{W}_2^{(n)}\right)$.

Отже, у разі виконання умов теореми, система рівнянь (8) має єдиний розв'язок щодо невідомих $a_i \left(i = \overline{0, n}\right)$, A та p для будь-яких упорядкованих за зростанням чисел $z_j \left(j = \overline{1, n+3}\right)$ з $[\alpha, \beta]$. Таким чином, умови (2) є необхідні та достатні для існування інтерполяції функції $f(x)$ виразом (1) на множині точок $z_j \left(j = \overline{1, n+3}\right)$ з відрізка $[\alpha, \beta]$. *Теорему доведено.*

Вираз (1) задовольняє вимоги u1, u2 й u3, зокрема, з такими $\varphi(p, x)$:

1) $\varphi(p; x) = e^{px}$ на всій числовій осі $(-\infty, \infty)$ і відмінних від нуля значень p;

2) $\varphi(p; x) = x^p$ на $[0, \infty)$ і $p \neq j$ для $j = \overline{0, n}$;

3) $\varphi(p; x) = \ln(x + p)$ на $[\alpha, \infty)$ для $p > -\alpha$.

Подані приклади функцій $\varphi(p; x)$ справджують вимоги u1, u2 й u3, оскільки всі похідні цих функцій для вказаних обмежень монотонні по x, а їхнє відношення монотонне по p.

2. Визначення параметрів інтерполяції сумою полінома та нелінійного виразу

Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(p; x)$ задовольняють умови *теореми 1* на відрізку $[\alpha, \beta]$, то параметри $a_i \left(i = \overline{0, n}\right)$ і A інтерполяції функції $f(x)$ виразом (1) на множині різних упорядкованих за зростанням точок $z_j \left(j = \overline{1, n+3}\right)$ з $[\alpha, \beta]$ визначаються за формулами

$$A=\tilde{D}_{n+1}\left(f;z_1,z_2,...,z_{n+2}\right)\Big/\tilde{D}_{n+1}\left(\varphi;z_1,z_2,...,z_{n+2}\right); \quad (23)$$

$$a_k=\frac{\tilde{D}_k\left(f;z_1,z_2,...,z_{k+1}\right)-\sum\limits_{i=k+1}^{n}a_i\tilde{D}_k\left(s_i;z_1,z_2,...,z_{k+1}\right)-A\tilde{D}_k\left(\varphi;z_1,z_2,...,z_{k+1}\right)}{\tilde{D}_k\left(s_k;z_1,z_2,...,z_{k+1}\right)},$$

$$k=\overline{1,n}; \quad (24)$$

$$a_0=\frac{1}{2}\left[f\left(z_1\right)+f\left(z_2\right)-\sum_{i=1}^{n}a_i\left(z_1^i+z_2^i\right)-A\Big(\varphi\left(p;z_1\right)+\varphi\left(p;z_2\right)\Big)\right]. \quad (25)$$

Значення параметра p визначається як розв'язок рівняння (19). Способи розв'язування цього рівняння залежать від функції $\varphi(p;x)$.

3. Інтерполяція сумою полінома й експоненти

Умови існування інтерполяції функції $f(x)$ сумою полінома й експоненти

$$E_n\left(a;x\right)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i+Ae^{px}, \quad A\neq 0, \quad p\neq 0, \quad n=0,1,2,... . \quad (26)$$

встановлює *теорема 2*.

Теорема 2. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[\alpha, \beta]$, тоді необхідною та достатньою умовою існування інтерполяції функції $f(x)$ сумою многочлена й експоненти (26) на множині різних, упорядкованих за зростанням, точок $z_j\left(j=\overline{1,n+3}\right)$ з відрізка $[\alpha, \beta]$ є справдження нерівностей

$$\tilde{W}^{(n)}>0, \qquad \tilde{W}^{(n)}\neq\tilde{W}_0^{(n)}, \quad (27)$$

де

$$\tilde{W}_0^{(n)}=\tilde{D}_{n+1}\left(s_{n+1};z_2,z_3,...,z_{n+3}\right)\Big/\tilde{D}_{n+1}\left(s_{n+1};z_1,z_2,...,z_{n+2}\right), \quad (28)$$

вирази $\tilde{W}^{(n)}$ і $\tilde{D}_k\left(U;z_i,z_{i+1},...,z_{i+k}\right)$ визначаються за формулами (3)-(5), а $\varphi(p;x)=e^{px}$.

Доведення. Сума полінома й експоненти (26) для від'ємних і додатних значень параметра p задовольняє умови *теореми 1*.

Розглянемо спочатку випадок від'ємних значень параметра p ($p<0$). Для функції $\varphi(p;x)=e^{px}$ величини $\tilde{W}_1^{(n)}$ і $\tilde{W}_2^{(n)}$ набувають таких значень

$$\tilde{W}_1^{(n)}=\lim_{p\to-\infty}\omega_n\left(p\right)=0, \quad \tilde{W}_2^{(n)}=\lim_{p\to-0}\omega_n\left(p\right)=\tilde{W}_0^{(n)},$$

де $\omega_n\left(p\right)$ визначається за формулою (20), $\tilde{W}_0^{(n)}$ — за формулою (28), а значення $\tilde{D}_k\left(U;z_j,z_{j+1},...,z_{j+k}\right)$ — за формулами (4), (5).

Отже, на підставі *теореми 1* необхідною та достатньою умовою існування інтерполяції функції $f(x)$ виразом (26) із від'ємним значенням параметра p на множині точок $z_j\left(j=\overline{1,n+3}\right)$ з відрізка $[\alpha, \beta]$ є справдження нерівностей

$$0 < \tilde{W}^{(n)} < \tilde{W}_0^{(n)} . \tag{29}$$

Аналогічно, у випадку додатних значень параметра p ($p > 0$)

$$\tilde{W}_1^{(n)} = \lim_{p \to +0} \omega_n\left(p\right) = \tilde{W}_0^{(n)} \quad \text{і} \quad \tilde{W}_2^{(n)} = \lim_{p \to \infty} \omega_n\left(p\right) = \infty .$$

Відповідно до *теореми 1* це означає, що необхідною та достатньою умовою існування інтерполяції функції $f(x)$ виразом (26) із додатним значенням параметра p на множині точок $z_j\left(j = \overline{1, n+3}\right)$ з відрізка $[\alpha, \beta]$ є справдження нерівності

$$\tilde{W}^{(n)} > \tilde{W}_0^{(n)} . \tag{30}$$

Отже, необхідною та достатньою умовою існування інтерполяції функції $f(x)$ сумою полінома й експоненти (26) із відмінним від нуля значенням параметра p ($p \neq 0$) на множині точок $z_j\left(j = \overline{1, n+3}\right)$ з відрізка $[\alpha, \beta]$ є виконання однієї з нерівностей (29) або (30), що еквівалентно умовам (27). *Теорему доведено*.

Проаналізуємо умови (27). Неважко переконатися (шляхом підстановки), що для полінома ($n + 1$)-го степеня, величина $\tilde{W}^{(n)}$ набуває значення рівного $\tilde{W}_0^{(n)}$. Отже, друга нерівність $\tilde{W}^{(n)} \neq \tilde{W}_0^{(n)}$ умови (27) справджується, зокрема, для функцій $f(x)$, відмінних від полінома ($n + 1$)-го степеня.

Виконання першої нерівності $\tilde{W}^{(n)} > 0$ умови (27) вимагає співпадання знаків величин $\tilde{D}_{n+1}\left(f; z_i, z_{i+1}, ..., z_{i+n+1}\right), i = \overline{1,2}$. Під час доведення *теореми 1* було встановлено (16), що вони дорівнюють приросту n-ої похідної функції $f(x)$. Отже, нерівність $\tilde{W}^{(n)} > 0$ виконується, зокрема, для функцій $f(x)$ неперервно диференційовних до n-го порядку, n-на похідна яких строго монотонна на відрізку $[\alpha, \beta]$.

Таким чином, необхідній і достатній умові існування на відрізку $[\alpha, \beta]$ інтерполяції функції $f(x)$ виразом (26) задовольняють, зокрема, неперервно диференційовні до n-го порядку функції, n-на похідна яких строго монотонна на $[\alpha, \beta]$, за винятком полінома ($n + 1$)-го степеня.

Якщо функція $f(x)$ задовольняє умови *теореми 1* на відрізку $[\alpha, \beta]$, то параметри $a_i\left(i = \overline{0, n}\right)$ і A інтерполяції $f(x)$ виразом (26) на множині різних упорядкованих за зростанням точок $z_j\left(j = \overline{1, n+3}\right)$ з $[\alpha, \beta]$ визначаються за формулами (23)-(25), у яких $\varphi(p; x) = e^{px}$. Значення параметра p визначається як розв'язок рівняння (19).

Ліва частина рівняння (19) для $\varphi(p; x) = e^{px}$ є експоненційна функція. Це випливає з рівності (22), яка в цьому випадку має такий вигляд

$$\omega_n\left(p\right) = K e^{p\left(\zeta_2 - \zeta_1\right)} , \tag{31}$$

де K, ζ_1, ζ_2 визначаються так само, як і у формулі (22). Враховуючи експоненційний характер залежності лівої частини рівняння (19) від p, його розв'язок доцільно шукати як корінь рівняння

$$g_n\left(p\right) = V^{(n)} , \tag{32}$$

де $g_n(p) = \ln(\omega_n(p))$, $V^{(n)} = \ln(\tilde{W}^{(n)})$.

Розв'язок рівняння (32) можна обчислити за ітераційним методом Ньютона

$$p_{i+1} = p_i - \left(g_n(p_i) - V^{(n)}\right) \Big/ g_n'(p_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \tag{33}$$

де

$$g_n'(p) = \frac{\tilde{D}_{n+1}(\bar{\varphi}; z_2, z_3, \dots, z_{n+3})}{\tilde{D}_{n+1}(\varphi; z_2, z_3, \dots, z_{n+3})} - \frac{\tilde{D}_{n+1}(\bar{\varphi}; z_1, z_2, \dots, z_{n+2})}{\tilde{D}_{n+1}(\varphi; z_1, z_2, \dots, z_{n+2})}; \tag{34}$$

$$\bar{\varphi}(p; z) = ze^{pz}; \qquad \varphi(p; z) = e^{pz};$$

$$p_0 = \operatorname{sign}\left(\tilde{W}^{(n)} - \tilde{W}_0^{(n)}\right)(n+1)\left|V^{(n)}\right| \Big/ (z_{n+3} - z_2). \tag{35}$$

Початкове значення наближення p_0 до шуканого кореня рівняння (32) визначено, виходячи з вигляду (31) лівої частини цього рівняння. За такого вибору значення p_0 його знак завжди співпадатиме зі знаком шуканого розв'язку. Співпадання знаків необхідне для забезпечення стійкості ітераційного методу (33), тому що функція $g_n(p)$ має розрив у точці $p = 0$. Під час розв'язування тестових задач ітераційний процес (33) збігався за три-чотири ітерації.

4. Інтерполювання сумою полінома та степеня

Умови існування інтерполяції функції $f(x)$ сумою полінома та степеня

$$S_n(a; x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + Ax^p, \quad x \ge 0, \quad A \ne 0, \quad p \ne k \ \left(k = \overline{0, n}\right), \ n = 0,1,2,\dots \tag{36}$$

встановлює *теорема 3*.

Теорема 3. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[\alpha, \beta]$, тоді необхідною та достатньою умовою існування інтерполяції функції $f(x)$ виразом (36) на множині точок $z_j \left(j = \overline{1, n+3}\right)$ з відрізка $[\alpha, \beta]$ є справдження нерівностей

$$\tilde{W}^{(n)} > 0, \qquad \tilde{W}^{(n)} \ne \tilde{\tilde{W}}_r^{(n)}, \quad r = \overline{0, n}, \tag{37}$$

де

$$\tilde{\tilde{W}}_r^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } z_1 = 0, \\ \tilde{D}_{n+1}(l_{n+1}; z_2, z_3, \dots, z_{n+3}) \big/ \tilde{D}_{n+1}(l_{n+1}; z_1, z_2, \dots, z_{n+2}), & \text{якщо } z_1 > 0, \end{cases} \tag{38}$$

$l_k(x) = x^k \ln(x)$, величина $\tilde{W}^{(n)}$ визначається за формулою (3), а значення виразів $\tilde{D}_k\left(U; z_j, z_{j+1}, \dots, z_{j+k}\right)$ — за формулами (4), (5).

Доведення. Доведення цієї теореми аналогічне доведенню *теореми 2*. Сума многочлена та степеня (36) для значень параметра p, відмінних від $0, 1, \dots, n$, задовольняє умови *теореми 1*.

Умові (37) існування інтерполяції виразом (36) на відрізку $[\alpha, \beta]$ задовольняють, зокрема, функції $f(x)$, неперервно диференційовні до n-го порядку, n-на похідна яких строго монотонна на [α, β], за винятком функцій вигляду $\sum_{i=0}^{n} b_i x^i + Bx^r \ln(x)$ для $x > 0$, де $b_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ і B — довільні дійсні числа.

Якщо функція $f(x)$ задовольняє умовам *теореми 3*, то параметри $a_i\left(i=\overline{0,n}\right)$ і A інтерполяції $f(x)$ виразом (36) на множині точок $z_j\left(j=\overline{1,n+3}\right)$ з відрізка [α, β] визначаються за формулами (23)-(25), у яких $\varphi(p; x) = x^p$, а значення параметра p знаходиться як розв'язок рівняння (19).

Розв'язування рівняння (19) для $\varphi(p; x) = x^p$ проводиться з врахуванням того, що у випадку виконання нерівностей

$$\tilde{\tilde{W}}_0^{(n)} < \tilde{W}^{(n)} < \tilde{\tilde{W}}_n^{(n)}, \tag{39}$$

його розв'язок знаходиться в одному з інтервалів $(k, k + 1)$, де $k=\overline{0,n-1}$. Тому спочатку необхідно перевірити чи не попадає корінь рівняння в один із цих інтервалів. Якщо значення параметра p належить одному із цих інтервалів, то його можна визначити за методом хорд або ділення навпіл.

Якщо значення величини $\tilde{W}^{(n)}$ не задовольняє нерівностям (39), то значення параметра p знаходиться в одному з інтервалів $(-\infty, 0)$ або (n, ∞). У цьому випадку визначення значення параметра p ґрунтується на таких міркуваннях. Із рівності (22) випливає, що ліва частина рівняння (19) для $\varphi(p; x) = x^p$ є степенева функція

$$K\left(\zeta_2/\zeta_1\right)^{p-n-1} = \tilde{W}^{(n)},$$

де K, ζ_1, ζ_2 і $\tilde{W}^{(n)}$ визначаються так само, як і у формулі (22). Враховуючи степеневий характер залежності лівої частини рівняння (19) від p, його розв'язок доцільно шукати як корінь рівняння (32) за ітераційним методом Ньютона (33), в якому

$$p_0 = \begin{cases} p^*, & \text{якщо} \quad \tilde{W}^{(n)} < \tilde{\tilde{W}}_0^{(n)}; \\ n+1+p^*, & \text{якщо} \quad \tilde{W}^{(n)} > \tilde{\tilde{W}}_n^{(n)}; \end{cases} \tag{40}$$

$$\overline{\varphi}(p;x) = x^p \ln(x);\ \varphi(p;x) = x^p;\ p^* = \left|\ln \tilde{W}^{(n)}\right| \Big/ \left[\ln\left(z_{n+3}+z_2\right) - \ln\left(z_{n+2}+z_1\right)\right].$$

Вибір початкового значення p_0 є достатньо близький до розв'язку рівняння та забезпечує співпадання їхніх знаків, що необхідно для дотримання стійкості ітераційного методу (33). Функція $g_n(p)$ для $\varphi(p; x) = x^p$ має розриви в точках $p=\overline{0,n}$ і перехід проміжних значень p_i через одну з цих точок може порушити збіжність методу (33). Попередня перевірка умови (39) і вибір початкового значення p_0 за формулою (40) забезпечують обминання згаданих точок розриву лівої частини рівняння (19) під час знаходження його розв'язку за ітераційною схемою (33). Запропонована комбінація застосування ітераційних методів для розв'язування рівняння (19) забезпечує достатньо швидку їхню збіжність.

Висновок. Необхідною та достатньою умовою існування інтерполяції сумою полінома та нелінійного виразу (1) є справдження нерівностей (2). У разі виконання цих умов параметри такої інтерполяції визначаються за формулами (23)-(25). Значення параметра, що входить у вираз нелінійно, знаходиться як розв'язок трансцендентного рівняння (19). У випадку інтерполяції сумою полінома й експоненти (26) для визначення значення показника експоненти можна застосувати метод Ньютона (33), а для визначення показника степеня в разі інтерполювання сумою полінома та степеня (36) — комбінацію ітераційних методів.

Література

[1] *Попов, Б. А.* Наилучшие чебышевские приближения суммой многочлена и нелинейных функций / *Б. А. Попов, П. С. Малачивский*. — Львов, 1984. — 79 с. — (Препр. / АН УССР, Физ.-мех. ин-т им. В. Г. Карпенко, № 85).

[2] *Попов, Б. А.* Приближение функций для технических приложений / *Б. А. Попов, Г. С. Теслер*. — Киев: Наук. думка, 1980. — 352 с.

[3] *Meglinu, R. J.* Approximation by Exponential Sums on Discrete and Continous Domains / *R. J. Meglinu* // J. Approximation Theory. — 1979. — V. 25, No 1. — P. 65-88.

[4] *Kobayashi, Y.* Fractional power approximations of elliptic integrals and Bessel functions / *Y. Kobayashi, M. Ohkita, M. Inoue* // Math. Comput. Simulation. — 1978. — V. 20, No 4. — P. 285-290.

[5] *Попов, Б. А.* Равномерное приближение сплайнами / *Б. А. Попов*. — Киев: Наук. думка, 1989. — 272 с.

[6] *Корн, Г.* Справочник по математике для научных работников / *Г. Корн, Т. Корн*. — Москва: Мир, 1977. — 831 с.

[7] *Малачівський, П.* Чебишовське наближення сумою многочлена і функції з одним нелінійним параметром // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. — 2005. — Вип. 1. — С. 134-145.

Interpolation by sum of polynomial and nonlinear expression

Vasyl Andrunyk, Petro Malachivskyj

The necessary and sufficient conditions of existence of interpolation by the sum of polynomial and nonlinear expression are set. Functions which satisfy these conditions are indicated. The calculation scheme for calculation of the value of interpolation parameters by the sum of polynomial and exponential and also polynomial and power function are proposed and grounded.

Интерполирование суммой многочлена и нелинейного выражения

Васыль Андрунык, Петро Малачивский

Установлены необходимые и достаточные условия существования интерполяции суммой многочлена и нелинейного выражения. Указаны функции, которые удовлетворяют этим условиям. Предложена и обоснована схема вычисления значения параметров интерполяции суммой многочлена и экспоненты, а также многочлена и степени.

Представлено кандидатом фізико-математичних наук М. Дзюбачиком

Отримано 21.10.09