

Похибка розрахунку характеристик гармонійного сигналу

Богдан Благітко¹, Ігор Заячук², Любомира Кіт³

¹ к. т. н., Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. генерала Тарнавського, 107, Львів, 79017, e-mail: blagitko@electronics.wups.lviv.ua

² к. т. н., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: igorzaj@litech.lviv.ua

³ Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005

Встановлено основні джерела похибок програм визначення коефіцієнта гармонік для звичайної та подвійної точності розрахунку. Аналізуються похибки заокруглення, пов'язані із знаходженням тригонометричних функцій стандартними програмами, похибки розрахунку коефіцієнта гармонік гармонійного сигналу, на який накладено постійний складник, похибки розрахунку коефіцієнта гармонік від кількості дискретних відліків на періоді сигналу, похибки квантування по рівню, величина яких залежить від розрядності аналогово-цифрового перетворювача (АЦП). Шляхом моделювання визначено величину порогу чутливості по коефіцієнту гармонік.

Ключові слова: коефіцієнт гармонік, аналогово-цифровий перетворювач, похибка заокруглення, дискретне перетворення Фур'є.

Вступ. Під час обчислення коефіцієнта гармонік необхідно враховувати обставини, які впливають на достовірність результатів розрахунку. Складність ситуації можна оцінити, якщо врахувати, що величина коефіцієнта гармонік досягає порядку десятих або сотих долей відсотка. Важливою характеристикою програм для розрахунку коефіцієнта гармонік є поріг чутливості, який визначається, в основному, похибками заокруглення. Для оцінки порогу чутливості необхідно визначити спектр і коефіцієнт гармонік для «чисто» синусоїдального сигналу. Наперед відомо, що всі вищі гармоніки та коефіцієнт гармонік в такому випадку дорівнюють нулю.

Також доцільно провести дослідження гармонійного сигналу, на який накладено постійний складник. Очевидно, що і в цьому випадку коефіцієнт гармонік також повинен дорівнювати нулеві. Але внаслідок похибок заокруглення коефіцієнт гармонік має значення, яке відмінне від нуля. Ця величина і визначає поріг чутливості. Подібні проблеми частково досліджувалися авторами робіт [1, 2].

1. Оцінка порогу чутливості програм розрахунку коефіцієнта гармонік

Характеристикою спотворення періодичного гармонійного сигналу є коефіцієнт гармонік, який визначається за формулою [3]

$$k_{\Gamma} = \sqrt{\sum_{i=2}^n y_i^2} / y_1. \quad (1)$$

Тут y_i — спектральні складники гармонійного сигналу.

На величину порогу чутливості по коефіцієнту гармонік впливають не тільки похибки заокруглення у разі застосування швидкого перетворення Фур'є [1, 4], але і заокруглення, пов'язані з знаходженням тригонометричних функцій $\sin x$, $\cos x$ стандартними програмами.

Основні фактори, які впливають на коефіцієнт гармонік, прослідковуються дуже чітко. За допомогою обчислювального експерименту можна отримати залежність порогу чутливості по коефіцієнту гармонік Δk_{Γ} від кількості дискретних відліків N на періоді (рис. 1) за звичайної та подвійної точності розрахунку.

У разі дослідження зі звичайною точністю коефіцієнт гармонік досягає значення $(0,4 \div 8) \cdot 10^{-4} \%$. Перехід до подвійної точності зменшує цю величину до $(2 \div 6) \cdot 10^{-5} \%$. При цьому менші значення коефіцієнта гармонік досягаються за меншої кількості точок на періоді. Точне значення коефіцієнта гармонік в усіх випадках дорівнює нулю.

Значення коефіцієнта гармонік змінюється майже у двадцять разів для звичайної точності зі збільшенням кількості дискретних відліків на періоді з 8 до 512. Вплив кількості точок на значення коефіцієнта гармонік (він змінюється майже втричі) у разі подвійної точності розрахунку значно менший.

Збільшення кількості відліків N зумовлює зростання порогу чутливості. Такий характер зміни залежності є цілком закономірний і його можна пояснити.

Згідно з теоремою Котельникова [5] отримане значення коефіцієнта гармонік для «чистої» синусоїди достовірне за мінімальної кількості відліків, яка рівна числу два. Насправді формування відліків синусоїдального сигналу здійснюється шляхом квантування за рівнем. Наслідком застосування дискретного перетворення Фур'є для обробки такого сигналу є поява в його спектрі гармонійних складників вищих порядків, що і підтверджується ростом порогу чутливості зі збільшенням кількості дискретних відліків.

Отриману в процесі обчислювального експерименту залежність можна подати такою емпіричною формулою

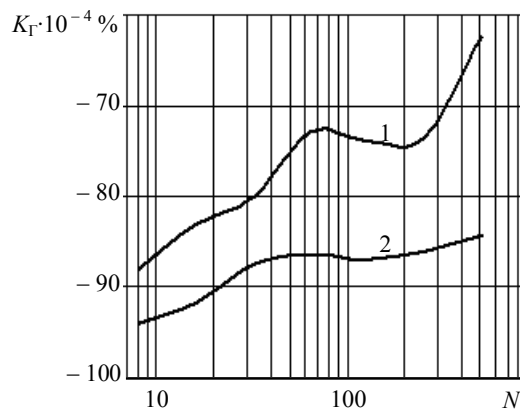


Рис 1. Залежність порогу чутливості по коефіцієнту гармонік від кількості дискретних відліків на періоді (1 — звичайна; 2 — подвійна точність розрахунку)

$$\Delta k_{\Gamma} = 2 \frac{N}{\log_2 N} \delta^*,$$

де δ^* — відносна одинична похибка заокруглення, Δk_{Γ} — похибка розрахунку коефіцієнта гармонік.

Досліджено також похибку, яка виникає внаслідок заокруглення під час визначення коефіцієнта гармонік для функції $y(x) = a + b \sin x$; де b — амплітудне значення, $a \geq b$. Результати обчислень свідчать, що зі збільшенням постійного складника a погіршуються умови для розрахунку коефіцієнта гармонік. Це є наслідком зростання похибки заокруглення. Закономірності зміни похибки, що впливає на величину коефіцієнта гармонік, для різних значень b/a подано на рис. 2.

Якщо проводити розрахунок зі звичайною точністю, то відчутний вплив похибки заокруглення на значення коефіцієнта гармонік спостерігається для $b/a > 10^{-2}$. Тобто похибка заокруглення не вносить значних змін у величину коефіцієнта гармонік у разі розрахунку зі звичайною точністю, якщо величина гармонійного складника не перевищує 1 % від значення постійного.

Якщо розрахунок проводити з подвійною точністю, то зі зміною відношення b/a в межах від 10^{-1} до 10^{-5} значення коефіцієнта гармонік постійні.

Можна стверджувати, що ті величини коефіцієнта гармонік, які можна виявити, мають порядок 0,01 %.

Перехід до розрахунку з подвійною точністю необхідний, якщо потрібно виявити відхилення від гармонійного закону, менші за 10^{-3} %, причому, в сигналі присутні гармоніки вищих порядків, або якщо корисний сигнал менший за постійний складник хоча б на три порядки.

Отримані за допомогою числового експерименту результати можна використати для оцінки порогу чутливості під час експериментального визначення коефіцієнта гармонік суть якого полягає в дискретизації сигналу за допомогою АЦП з наступною обробкою з допомогою швидкого перетворення Фур'є. Таким чином можна моделювати граничні можливості приладу для вимірювання коефіцієнта гармонік.

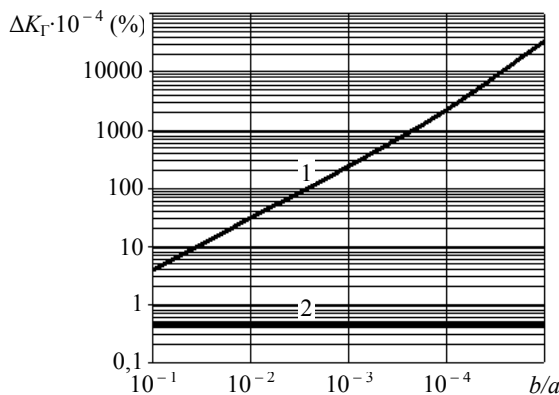


Рис. 2. Залежність порогу чутливості по коефіцієнту гармонік від відношення амплітуди до постійного складника (1 — звичайна; 2 — подвійна точність розрахунку)

Для вимірювання коефіцієнта гармонік використовують аналогово-цифрові перетворювачі, які відображають неперервні сигнали у вигляді чисел обмеженої розрядності. Така заміна відповідає квантуванню за рівнем. Це означає, що в отримані результати вимірювань вноситься похибка, величина якої залежить від розрядності АЦП.

Вимірювання коефіцієнта гармонік проводиться для одного періоду гармонійного сигналу. У результаті з'являється ще одне джерело похибок — кількість дискретних відліків на періоді.

Отже, поріг чутливості приладу по коефіцієнту гармонік залежить від кількості двійкових розрядів і від кількості дискретних відліків на періоді.

Дослідження дискретного перетворення Фур'є для різних відношень між змінними та постійними складниками сигналу дає можливість оцінити вплив кількості розрядів двійкових чисел, якими оперує обчислювальна система, на поріг чутливості в процесі оцінки коефіцієнта гармонік.

Справді, нехай $b/a = 1/2^s$. Тоді можна стверджувати, що тільки $l - s$ розрядів приймають участь у поданні змінного складника, де l — максимальне число двійкових розрядів.

Нехай коефіцієнт гармонік визначається за формулою (1), а одинична відносна похибка дискретизації для даної кількості двійкових розрядів $\delta_1 = 1/2^l$.

Відносна абсолютна похибка δ_{k_G} задається співвідношенням

$$\delta_{k_G} = \frac{\Delta k_G}{k_G}.$$

За незначних змін спектральних складників Δy_i від дійсних значень y_i можна записати

$$\Delta k_G = \sum_{i=1}^n \frac{\partial k_G}{\partial y_i} \Delta y_i.$$

Очевидно, що для $i = \overline{2, n}$

$$\frac{\partial k_G}{\partial y_i} \Delta y_i = \frac{1}{k_G} \left(\frac{y_i}{y_1} \right)^2 \delta y_i,$$

а якщо $i = 1$, то

$$\frac{\partial k_G}{\partial y_1} \Delta y_1 = -k_G \delta y_1,$$

де $\delta y_i = \Delta y_i / y_i$, $i = \overline{1, n}$. Тоді для знаходження відносної похибки маємо

$$\delta_{k_r} = \frac{\sum_{i=2}^n y_i^2 \delta y_i}{\sum_{i=2}^n y_i^2} - \delta y_i.$$

Нехай $\delta y_i = 1/2^l$, $i = \overline{1, n}$. Тоді абсолютну похибку розрахунку коефіцієнта гармонік $\delta = |\delta_{k_r}|$, яка виникає внаслідок неточності у визначенні значень спектральних складників, визначаємо зі співвідношення

$$\delta = \frac{2}{2^l}.$$

Для заданої кількості розрядів величина порогу чутливості по коефіцієнту гармонік суттєво перевищує отримане аналітичним шляхом значення абсолютної похибки. Це пояснюється тим, що в процесі обробки квантованого по рівню сигналу за допомогою дискретного перетворення Фур'є в спектрі з'являються гармонійні складники вищих порядків. Окрім того, під час розрахунку коефіцієнта гармонік за допомогою швидкого перетворення Фур'є відбувається накопичення похибки.

Висновки. Проведено числовий експеримент із дослідження залежності коефіцієнта гармонік від параметрів обчислювального процесу. Отримано залежності коефіцієнта гармонік від кількості дискретних відліків на періоді та відношення змінного до постійного складників гармонійного сигналу. Зроблено оцінку співмірності похибки розрахунку з порогом чутливості на коефіцієнт гармонік. Шляхом аналітичних досліджень і засобами числового експерименту показано, що мінімальне значення коефіцієнта гармонік, яке можна виявити, досягає величини 10^{-3} %. Окрім того змодельовані граничні можливості приладу для експериментального визначення коефіцієнта гармонік за допомогою АЦП.

Література

- [1] *Годлевский, В. С.* Методические погрешности дискретного преобразования Фурье и способы их компенсации / *В. С. Годлевский, А. М. Денисенко* // Электронное моделирование. — 2006. — Т. 28. № 3. — С. 83-98.
- [2] *Дьяконов, В. П.* Вейвлеты. От теории к практике / *В. П. Дьяконов*. — Москва: СОЛОН-Р, 2002. — 448 с.
- [3] *Заячук, И. М.* О расчете коэффициента нелинейных искажений электронных схем / *И. М. Заячук, Л. А. Синицкий* // Теоретическая электротехника. — 1982. — Вып. 33. — С. 129-134.
- [4] *Рабинер, Л.* Теория и применение цифровой обработки сигналов / *Л. Рабинер, Б. Гоулд*. — Москва: Мир, 1978. — 848 с.
- [5] *Чемоданов, Б. Х.* Математические основы теории автоматического регулирования / *Б. Х. Чемоданов*. — Москва: Высшая школа, 1971. — 808 с.

Error of calculation of harmonic signal descriptions

Bohdan Blagitko, Igor Zayachuk, Lyubomyra Kit

The basic sources of the errors of software for calculation of the harmonic factor for an ordinary and double accuracy of calculation are established. Errors in rounding, related to the calculation of trigonometric functions by standard programs, errors of calculation of the harmonic factor of a harmonic signal with an imposed permanent constituent, errors of calculation of the harmonic factor from the number of discrete counts on the signal period, errors of quantum by level the value which depends from the value ADC bits are analyzed. The threshold value of sensitivity by a harmonic factor was evaluated by modeling.

Погрешность расчета характеристик гармонического сигнала

Богдан Блажитко, Игорь Заячук, Любомыра Кит

Рассмотрены основные источники погрешностей программ расчета коэффициента гармоник с обычной и двойной точностью вычислений. Анализируются погрешности округления, связанные с вычислением тригонометрических функций стандартными программами, погрешности расчета коэффициента гармоник гармонического сигнала с постоянной составляющей, погрешности расчета коэффициента гармоник от количества дискретных отсчетов на периоде гармонического сигнала, погрешности квантования по уровню, величина которых зависит от разрядности аналого-цифрового преобразователя (АЦП). Путем моделирования определена величина порога чувствительности по коэффициенту гармоник.

Представлено доктором технічних наук Я. П'янилом

Отримано 07.05.10