УДК 539.3

Теорема взаємності робіт локально градієнтної лінійної електромагнітотермопружності

Ольга Грицина

К. ф.-м. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: gryt@cmm.lviv.ua

Теорему взаємності робіт узагальнено на динамічні задачі локально градієнтної лінійної теорії взаємозв'язаної електромагнітотермомеханіки поляризовних неферомагнітних ізотропних тіл. Нелокальність згаданої теорії зумовлена врахуванням поряд із процесами деформування, теплопровідності та поляризації також процесу локального зміщення маси. Як частковий випадок наведено теорему взаємності робіт для стаціонарних процесів. Показано узгодженість отриманих результатів із відомими з літератури.

Ключові слова: теорема взаємності робіт, нелокальна теорія, взаємозв'язані електромагнітотермомеханічні процеси, локальне зміщення маси, поляризовні тіла.

Вступ. Теореми взаємності робіт для моделей пружних і термопружних п'єзоелектричних тіл встановлені Новацьким [1, 2]. Праці [2-6] містять формулювання теорем взаємності робіт для деяких узагальнених теорій взаємозв'язаної електромагнітотермомеханіки, у тому числі, для теорії п'єзоелектриків Тупіна та градієнтної теорії п'єзоелектриків Міндліна.

У роботах [7, 8] одержано повну систему співвідношень локально градієнтної теорії неферомагнітних поляризовних тіл, яка ґрунтується на врахуванні поряд із процесами деформування, теплопровідності та поляризації також процесу локального зміщення маси. Відповідну теорему взаємності робіт для стаціонарних процесів за ізотермічного наближення наведено у статті [9].

Метою цієї роботи є узагальнення теореми взаємності робіт для динамічних задач локально градієнтної електромагнітотермомеханіки діелектричних тіл.

1. Система співвідношень локально градієнтної теорії діелектриків

Розглядаємо ізотропне деформівне поляризовне неферомагнітне тіло, яке є ідеальним діелектриком, що займає область (V) евклідового простору й обмежене поверхнею (Σ). Тіло перебуває під впливом електромагнітного поля, зовнішньої механічної та температурної дії внаслідок чого у ньому протікають механічні, теплові, електромагнітні процеси та процес локального зміщення маси [7].

Лінійна система рівнянь моделі електромагнітотермомеханіки поляризовних неферомагнітних ідеальних діелектриків за врахування процесу локального зміщення маси включає [7, 8]: рівняння балансу імпульсу механічного поступального руху та ентропії, співвідношення, яке пов'язує питому густину наведеної маси з питомим вектором локального зміщення маси, рівняння Максвелла [10]

$$\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* + \rho_0 \mathbf{F}_* = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$\rho_0 T_0 \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q + \rho \Re, \tag{2}$$

$$\rho_m = -\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_m, \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \tag{4}$$

кінетичне рівняння

$$\mathbf{J}_q = -\lambda \nabla T, \tag{5}$$

а також лінійні рівняння стану, які для ізотропних матеріалів мають такий вигляд

$$s = s_0 + \frac{C_V}{T_0}\theta + \frac{1}{\rho_0} K \alpha_t e + \beta_{T\rho} \rho_m, \tag{6}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = 2G\hat{\boldsymbol{e}} + \left[\left(K - \frac{2}{3} G \right) e - K \left(\alpha_t \theta + \alpha_\rho \rho_m \right) \right] \hat{\mathbf{I}}, \tag{7}$$

$$\tilde{\mu}'_\pi = d_\rho \rho_m - \beta_{T\rho} \theta - \frac{1}{\rho_0} K \alpha_\rho e, \tag{8}$$

$$\mathbf{p} = \chi_E \mathbf{E} - \chi_{Em} \nabla \mu'_\pi, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\pi}_m = -\chi_m \nabla \mu'_\pi + \chi_{Em} \mathbf{E}. \tag{10}$$

Тут $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*$ — узагальнений тензор напружень [7, 8]; $\hat{\boldsymbol{e}}$ — тензор деформації, а e — його кульовий складник; $\mathbf{u}$ — вектор переміщення точок континуума центрів мас тіла; $\mathbf{F}_*$ — масова сила; s — питома ентропія; $\theta = T - T_0$, T — абсолютна температура; $\Re$ — розподілені джерела тепла; $\mathbf{E}$ та $\mathbf{H}$ — вектори напруженостей електричного та магнітного полів; $\mathbf{D}$ та $\mathbf{B}$ — вектори індукції електричного та магнітного полів; $\mathbf{P}$ — вектор поляризації; $\mathbf{p} = \mathbf{P}/\rho_0$; $\boldsymbol{\pi}_m$ — питомий вектор локального зміщення маси [7]; $\tilde{\mu}'_\pi = \mu'_\pi - \mu'_{\pi 0}$; $\mu'_\pi = \mu_\pi - \mu$; μ — хімічний потенціал, а μ_π — міра зміни внутрішньої енергії системи, зумовленої локальним зміщенням маси [7]; ρ_m — питома густина наведеної маси [8]; $\mathbf{J}_q$ — потік тепла; λ — коефіцієнт теплопровідності; K — модуль об'ємного стиску за сталих температури та питомої густини наведеної маси; G — модуль зсуву; α_t — температурний коефіцієнт об'ємного розширення за сталої питомої густини наведеної маси, а α_ρ — коефіцієнт об'ємного розширення, спричиненого локальним зміщенням маси за сталої температури; C_V — питома теплоємність за сталої деформації та питомої густини наведеної маси; $\beta_{T\rho}$ та d_ρ — ізотермо-ізохоричні коефіцієнти залежностей ентропії та потенціалу μ'_π від питомої густини наведеної маси; χ_E — діелектрична сприйнятливість; χ_m і χ_{Em} — коефіцієнти, які характеризують відповідно локальне зміщення маси та поляризовність тіла, зумовлені градієнтом потенціалу μ'_π; ε_0 — електрична стала; ρ_0 і $\mu'_{\pi 0}$ — значення густини маси та приведеного потенціалу μ'_π у вихідному стані, в якому також $\hat{\boldsymbol{e}} = 0$, $\rho_m = 0$, $\mathbf{E} = 0$, $T = T_0$, $\nabla\mu'_\pi = 0$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = 0$, $\mathbf{p} = 0$, $\boldsymbol{\pi}_m = 0$; «×», «·» — знаки векторного й скалярного добутків.

2. Теорема взаємності робіт

Розглянемо два різних напружено-деформованих стани діелектричного тіла, спричинені двома системами зовнішніх дій: масових сил $\mathbf{F}_*$ й $\mathbf{F}'_*$; джерел тепла $\Re$ і $\Re'$; поверхневих зусиль $\boldsymbol{\sigma}_*$ та $\boldsymbol{\sigma}'_*$ на поверхні (Σ_σ); переміщень $\mathbf{u}$ й $\mathbf{u}'$ на поверхні (Σ_u); поверхневих електричних зарядів $\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}$ і $\mathbf{P}'\cdot\mathbf{n}$ на поверхні (Σ_e); електричних потенціалів φ та φ' на поверхні (Σ_φ); збурення температури θ і θ' на поверхні (Σ_θ); потоків тепла $\mathbf{J}_q$ та $\mathbf{J}'_q$ на поверхні (Σ_J); векторів локального зміщення маси $\boldsymbol{\pi}_m$ і $\boldsymbol{\pi}'_m$ на (Σ_π) та збурень $\tilde{\mu}'_\pi$ і $(\tilde{\mu}'_\pi)'$ на (Σ_μ). Тут: $(\Sigma_\sigma)\cup(\Sigma_u)=(\Sigma)$, $(\Sigma_\sigma)\cap(\Sigma_u)=\varnothing$, $(\Sigma_\theta)\cup(\Sigma_J)=(\Sigma)$, $(\Sigma_\theta)\cap(\Sigma_J)=\varnothing$, $(\Sigma_\varphi)\cup(\Sigma_e)=$ $(\Sigma_\varphi)\cup(\Sigma_e)=(\Sigma)$, $(\Sigma_\varphi)\cap(\Sigma_e)=\varnothing$, $(\Sigma_\pi)\cup(\Sigma_\mu)=(\Sigma)$, $(\Sigma_\pi)\cap(\Sigma_\mu)=\varnothing$. Наслідком такої зовнішньої дії є два стани тіла, які будемо характеризувати відповідно тензорами напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*$ та $\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_*$, деформацій $\hat{\boldsymbol{e}}$ та $\hat{\boldsymbol{e}}'$, збуреннями температури θ і θ' та питомої ентропії s і s', питомими густинами наведеної маси ρ_m та ρ'_m, питомими векторами локального зміщення маси $\boldsymbol{\pi}_m$ і $\boldsymbol{\pi}'_m$, потенціалами $\tilde{\mu}'_\pi$ та $(\tilde{\mu}'_\pi)'$, напруженостями електричного поля $\mathbf{E}$ та $\mathbf{E}'$, питомими векторами поляризації $\mathbf{p}$ і $\mathbf{p}'$.

Застосуємо до системи рівнянь (1)-(10) одностороннє перетворення Лапласа [11], означене таким чином

$$\mathcal{L}\left[f(\mathbf{r},t)\right] = f^L(\mathbf{r},p) = \int_0^\infty f(\mathbf{r},t)e^{-pt}dt .$$

Тут $f(\mathbf{r},t) = \{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*, \hat{\boldsymbol{e}}, \mathbf{F}_*, \mathbf{u}, \mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\pi}_m, T, \mu'_\pi, \rho_m, \Re\}$, $\mathbf{r}$ — радіус-вектор, p — параметр перетворення Лапласа. Для спрощення викладу надалі приймемо, що всі початкові умови, які задані на збурення функцій, є нульові.

Тоді для двох систем зовнішніх дій рівняння руху (1) у перетвореннях Лапласа набуде вигляду

$$\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_*^L + \rho_0 \mathbf{F}_*^L = \rho_0 p^2 \mathbf{u}^L, \tag{11}$$

$$\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_*'^L + \rho_0 \mathbf{F}_*'^L = \rho_0 p^2 \mathbf{u}'^L. \tag{12}$$

Якщо рівняння (11) і (12) скалярно помножити, відповідно, на вектори переміщень $\mathbf{u}'^L$ та $\mathbf{u}^L$, отримані рівняння відняти та проінтегрувати по об'єму тіла, то у підсумку одержимо

$$\int\limits_{(V)} \left[\left(\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_*^L \right) \cdot \mathbf{u}'^L + \rho_0 \mathbf{F}_*^L \cdot \mathbf{u}'^L - \left(\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_*'^L \right) \cdot \mathbf{u}^L - \rho_0 \mathbf{F}_*'^L \cdot \mathbf{u}^L \right] dV = 0. \tag{13}$$

Врахуємо тепер співвідношення

$$\left(\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_*^L \right) \cdot \mathbf{u}'^L = \nabla \cdot \left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*^L \cdot \mathbf{u}'^L \right) - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_*^L : \nabla \mathbf{u}'^L,$$

$$\left(\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_*'^L \right) \cdot \mathbf{u}^L = \nabla \cdot \left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*'^L \cdot \mathbf{u}^L \right) - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_*'^L : \nabla \mathbf{u}^L,$$

формулу $\hat{\boldsymbol{e}} = \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\mathrm{T}} \right] / 2$ [2] та теорему Остроградського-Гауса [11]. Тоді інтегральному рівнянню (13) надамо вигляду

$$\int\limits_{(\Sigma)} \left(\boldsymbol{\sigma}_*^L \cdot \mathbf{u}'^L - \boldsymbol{\sigma}_*'^L \cdot \mathbf{u}^L \right) d\Sigma + \int\limits_{(V)} \rho_0 \left(\mathbf{F}_*^L \cdot \mathbf{u}'^L - \mathbf{F}_*'^L \cdot \mathbf{u}^L \right) dV =$$
$$= \int\limits_{(V)} \left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*^L : \hat{\boldsymbol{e}}'^L - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_*'^L : \hat{\boldsymbol{e}}^L \right) dV.$$

Тут $\boldsymbol{\sigma}_*^L = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_*^L \cdot \mathbf{n}$, $\boldsymbol{\sigma}_*'^L = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_*'^L \cdot \mathbf{n}$, де $\mathbf{n}$ — зовнішня нормаль до поверхні тіла (Σ), а індекс «Т» вказує на операцію транспонування тензора.

Підставивши у праву частину одержаного рівняння визначальне співвідношення (7), отримаємо

$$\int\limits_{(\Sigma)} \left(\boldsymbol{\sigma}_*^L \cdot \mathbf{u}'^L - \boldsymbol{\sigma}_*'^L \cdot \mathbf{u}^L \right) d\Sigma + \int\limits_{(V)} \rho_0 \left(\mathbf{F}_*^L \cdot \mathbf{u}'^L - \mathbf{F}_*'^L \cdot \mathbf{u}^L \right) dV =$$
$$= K\alpha_t \int\limits_{(V)} \left(\theta'^L e^L - \theta^L e'^L \right) dV - K\alpha_\rho \int\limits_{(V)} \left(\rho_m^L e'^L - \rho_m'^L e^L \right) dV. \tag{14}$$

За врахування визначальних співвідношень (5), (6) із рівняння балансу ентропії (2) отримаємо рівняння теплопровідності

$$\rho_0 C_V \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda \Delta \theta - T_0 K \alpha_t \frac{\partial e}{\partial t} - \rho_0 T_0 \beta_{T\rho} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \rho_0 \Re. \tag{15}$$

Для двох типів зовнішнього навантаження рівняння (15) у перетвореннях Лапласа набуде вигляду

$$\rho_0 C_V p\theta^L = \lambda\Delta\theta^L - T_0 K\alpha_t p e^L - \rho_0 T_0 \beta_{T\rho} p \rho_m^L + \rho_0 \Re^L , \tag{16}$$

$$\rho_0 C_V p\theta'^L = \lambda\Delta\theta'^L - T_0 K\alpha_t p e'^L - \rho_0 T_0 \beta_{T\rho} p \rho_m'^L + \rho_0 \Re'^L . \tag{17}$$

Якщо рівняння (16) і (17) скалярно домножити, відповідно, на функції θ'^L та θ^L, отримані рівняння відняти та проінтегрувати по об’єму тіла, то одержимо

$$\lambda \int\limits_{(V)} \left(\theta'^L \Delta\theta^L - \theta^L \Delta\theta'^L\right) dV - T_0 K\alpha_t p \int\limits_{(V)} \left(\theta'^L e^L - \theta^L e'^L\right) dV -$$
$$-\rho_0 T_0 \beta_{T\rho} p \int\limits_{(V)} \left(\theta'^L \rho_m^L - \theta^L \rho_m'^L\right) dV + \rho_0 \int\limits_{(V)} \left(\theta'^L \Re^L - \theta^L \Re'^L\right) dV = 0 .$$

У першому інтегралі цього рівняння врахуємо, що $\theta'^L \Delta\theta^L - \theta^L \Delta\theta'^L = = \nabla \cdot \left(\theta'^L \nabla\theta^L - \theta^L \nabla\theta'^L\right)$. Тоді, з огляду на теорему Остроградського-Гаусса, надамо цьому рівнянню вигляду

$$\frac{\lambda}{pT_0} \int\limits_{(\Sigma)} \left(\theta'^L \nabla\theta^L - \theta^L \nabla\theta'^L\right) \cdot \mathbf{n}\, d\Sigma - K\alpha_t \int\limits_{(V)} \left(\theta'^L e^L - \theta^L e'^L\right) dV -$$
$$-\rho_0 \beta_{T\rho} \int\limits_{(V)} \left(\theta'^L \rho_m^L - \theta^L \rho_m'^L\right) dV + \frac{\rho_0}{pT_0} \int\limits_{(V)} \left(\theta'^L \Re^L - \theta^L \Re'^L\right) dV = 0 . \tag{18}$$

В електродинаміці загальноприйняте подання вектора напруженості електричного поля через скалярний φ та векторний $\mathbf{A}$ потенціали: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ [10]. Тут ми обмежимося розглядом квазістатичного електричного поля, для якого $\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$ [2], а відтак приймемо, що $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Обґрунтування такого спрощення можна знайти, зокрема, у праці [12]. Враховуючи подання вектора напруженості електричного поля через скалярний потенціал і формулу $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ [2, 10], із другого рівняння системи (4) після застосування перетворення Лапласа отримаємо

$$-\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi^L + \nabla \cdot \mathbf{P}^L = 0 , \tag{19}$$

$$-\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi'^L + \nabla \cdot \mathbf{P}'^L = 0 . \tag{20}$$

За аналогічною схемою, домножимо останні два рівняння відповідно на φ'^L і φ^L, а результат віднімання отриманих співвідношень зінтегруємо по об’єму тіла. У підсумку одержимо

$$-\varepsilon_0 \int\limits_{(V)} \left[\nabla \cdot \left(\nabla\varphi^L\right)\varphi'^L - \nabla \cdot \left(\nabla\varphi'^L\right)\varphi^L\right] dV =$$
$$= \int\limits_{(V)} \left[\left(\nabla \cdot \mathbf{P}^L\right)\varphi'^L - \left(\nabla \cdot \mathbf{P}'^L\right)\varphi^L\right] dV . \tag{21}$$

Оскільки

$$\nabla\cdot\left(\nabla\varphi^{L}\right)\varphi'^{L}-\nabla\cdot\left(\nabla\varphi'^{L}\right)\varphi^{L}=\nabla\cdot\left[\left(\nabla\varphi^{L}\right)\varphi'^{L}\right]-\nabla\cdot\left[\left(\nabla\varphi'^{L}\right)\varphi^{L}\right],$$

$$\left(\nabla\cdot\mathbf{P}^{L}\right)\varphi'^{L}-\left(\nabla\cdot\mathbf{P}'^{L}\right)\varphi^{L}=\nabla\cdot\left(\mathbf{P}^{L}\varphi'^{L}\right)-\nabla\cdot\left(\mathbf{P}'^{L}\varphi^{L}\right)+\mathbf{P}'^{L}\cdot\left(\nabla\varphi^{L}\right)-\mathbf{P}^{L}\cdot\left(\nabla\varphi'^{L}\right),$$

то з використанням теореми Остроградського-Гауса, рівнянню (21) надамо вигляду

$$\varepsilon_0\int\limits_{(\Sigma)}\left(\varphi'^{L}\nabla\varphi^{L}-\varphi^{L}\nabla\varphi'^{L}\right)\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma+\int\limits_{(\Sigma)}\left(\varphi'^{L}\mathbf{P}^{L}-\varphi^{L}\mathbf{P}'^{L}\right)\cdot\mathbf{n}\,dV=$$

$$=\int\limits_{(V)}\left(\mathbf{P}^{L}\cdot\nabla\varphi'^{L}-\mathbf{P}'^{L}\cdot\nabla\varphi^{L}\right)dV \tag{22}$$

або

$$\int\limits_{(\Sigma)}\left(\varphi'^{L}\mathbf{D}^{L}-\varphi^{L}\mathbf{D}'^{L}\right)\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma=\int\limits_{(V)}\left(\mathbf{P}^{L}\cdot\nabla\varphi'^{L}-\mathbf{P}'^{L}\cdot\nabla\varphi^{L}\right)dV\,. \tag{23}$$

Шляхом додавання співвідношень (14), (18) і (23), звівши подібні доданки, отримаємо

$$\int\limits_{(\Sigma)}\left[\boldsymbol{\sigma}_*^{L}\cdot\mathbf{u}'^{L}-\boldsymbol{\sigma}'^{L}_*\cdot\mathbf{u}^{L}+\left(\varphi'^{L}\mathbf{D}^{L}-\varphi^{L}\mathbf{D}'^{L}\right)\cdot\mathbf{n}\right]d\Sigma-$$

$$-\frac{\lambda}{pT_0}\int\limits_{(\Sigma)}\left(\theta'^{L}\nabla\theta^{L}-\theta^{L}\nabla\theta'^{L}\right)\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma+\rho_0\int\limits_{(V)}\left(\mathbf{F}_*^{L}\cdot\mathbf{u}'^{L}-\mathbf{F}'^{L}_*\cdot\mathbf{u}^{L}\right)dV-$$

$$-\frac{\rho_0}{pT_0}\int\limits_{(V)}\left(\theta'^{L}\Re^{L}-\theta^{L}\Re'^{L}\right)dV=\int\limits_{(V)}\left[\mathbf{P}^{L}\cdot\nabla\varphi'^{L}-\mathbf{P}'^{L}\cdot\nabla\varphi^{L}\right]dV-$$

$$-\int\limits_{(V)}\left[K\alpha_\rho\left(\rho_m^{L}e'^{L}-\rho'^{L}_m e^{L}\right)+\rho_0\beta_{T\rho}\left(\theta'^{L}\rho_m^{L}-\theta^{L}\rho'^{L}_m\right)\right]dV\,. \tag{24}$$

Спростимо підінтегральні вирази у правій частині рівняння (24). Перетворимо, насамперед, підінтегральний вираз в останній стрічці цього рівняння. Врахуємо при цьому формули

$$K\alpha_\rho\,e^{L}=-\rho_0\tilde{\mu}'^{L}_\pi+\rho_0 d_\rho\rho_m^{L}-\rho_0\beta_{T\rho}\theta^{L},$$

$$K\alpha_\rho\,e'^{L}=-\rho_0\left(\tilde{\mu}'_\pi\right)'^{L}+\rho_0 d_\rho\rho'^{L}_m-\rho_0\beta_{T\rho}\theta'^{L}, \tag{25}$$

які є наслідком рівняння стану (8). Підставивши співвідношення (25) у підінтегральний вираз і звівши подібні члени, отримаємо

$$K\alpha_\rho\left(\rho_m^{L}e'^{L}-\rho'^{L}_m e^{L}\right)+\rho_0\beta_{T\rho}\left(\theta'^{L}\rho_m^{L}-\theta^{L}\rho'^{L}_m\right)=\rho_0\left[\rho'^{L}_m\tilde{\mu}'^{L}_\pi-\rho_m^{L}\left(\tilde{\mu}'_\pi\right)'^{L}\right]. \tag{26}$$

Із використанням рівнянь стану (9) і (10) можна показати, що для квазістатичного електричного поля справджується така рівність

$$\mathbf{P}^L \cdot \nabla \varphi'^L - \mathbf{P}'^L \cdot \nabla \varphi^L = \rho_0 \left[\left(\nabla \tilde{\mu}'_\pi \right)^L \cdot \boldsymbol{\pi}'^L_m - \left(\nabla \tilde{\mu}'_\pi \right)'^L \cdot \boldsymbol{\pi}_m \right]. \quad (27)$$

Якщо тепер врахувати співвідношення (26) і (27), а також формули $\rho^L_m = -\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^L_m$ та $\rho'^L_m = -\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}'^L_m$, то правій частині рівняння (24) можна надати вигляду

$$\int\limits_{(V)} \left[\mathbf{P}^L \cdot \nabla \varphi'^L - \mathbf{P}'^L \cdot \nabla \varphi^L \right] dV - \int\limits_{(V)} \left[K \alpha_\rho \left(\rho^L_m e'^L - \rho'^L_m e^L \right) + \right.$$
$$\left. + \rho_0 \beta_{T\rho} \left(\theta'^L \rho^L_m - \theta^L \rho'^L_m \right) \right] dV = -\rho_0 \int\limits_{(V)} \nabla \cdot \left[\boldsymbol{\pi}^L_m \left(\tilde{\mu}'_\pi \right)'^L - \boldsymbol{\pi}'^L_m \tilde{\mu}'^L_\pi \right] dV . \quad (28)$$

Тоді, підставляючи формулу (28) у (24) і враховуючи теорему Остроградського-Гауса, одержуємо узагальнення теореми взаємності робіт у зображеннях Лапласа

$$pT_0 \left\{ \int\limits_{(\Sigma)} \left[\boldsymbol{\sigma}^L_* \cdot \mathbf{u}'^L - \boldsymbol{\sigma}'^L_* \cdot \mathbf{u}^L + \left(\varphi'^L \mathbf{D}^L - \varphi^L \mathbf{D}'^L \right) \cdot \mathbf{n} + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \rho_0 \left(\boldsymbol{\pi}^L_m \left(\tilde{\mu}'_\pi \right)'^L - \boldsymbol{\pi}'^L_m \tilde{\mu}'^L_\pi \right) \cdot \mathbf{n} \right] d\Sigma + \rho_0 \int\limits_{(V)} \left(\mathbf{F}^L_* \cdot \mathbf{u}'^L - \mathbf{F}'^L_* \cdot \mathbf{u}^L \right) dV \right\} +$$
$$+ \lambda \int\limits_{(\Sigma)} \left(\theta^L \nabla \theta'^L - \theta'^L \nabla \theta^L \right) \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma + \rho_0 \int\limits_{(V)} \left(\theta^L \Re'^L - \theta'^L \Re^L \right) dV = 0 .$$

Звідси, взявши обернене перетворення Лапласа, отримаємо

$$T_0 \left\{ \int\limits_{(\Sigma)} \left[\boldsymbol{\sigma}_* \odot \mathbf{u}' - \boldsymbol{\sigma}'_* \odot \mathbf{u} + \varphi' \bigcirc \left(\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \right) - \varphi \bigcirc \left(\mathbf{D}' \cdot \mathbf{n} \right) + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \rho_0 \left(\boldsymbol{\pi}_m \cdot \mathbf{n} \right) \bigcirc \left(\tilde{\mu}'_\pi \right)' - \rho_0 \left(\boldsymbol{\pi}'_m \cdot \mathbf{n} \right) \bigcirc \tilde{\mu}'_\pi \right] d\Sigma + \rho_0 \int\limits_{(V)} \left(\mathbf{F}_* \odot \mathbf{u}' - \mathbf{F}'_* \odot \mathbf{u} \right) dV \right\} +$$
$$+ \lambda \int\limits_{(\Sigma)} \left[\theta * \left(\nabla \theta' \cdot \mathbf{n} \right) - \theta' * \left(\nabla \theta \cdot \mathbf{n} \right) \right] d\Sigma + \rho_0 \int\limits_{(V)} \left(\theta * \Re' - \theta' * \Re \right) dV = 0 . \quad (29)$$

Тут використано такі позначення для згорток

$$\mathbf{f} \odot \mathbf{g} = \int\limits_0^t \mathbf{f}\left(\mathbf{r}, t - \tau \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{g}\left(\mathbf{r}, \tau \right)}{\partial \tau} d\tau , \qquad f \bigcirc g = \int\limits_0^t f\left(\mathbf{r}, t - \tau \right) \frac{\partial g\left(\mathbf{r}, \tau \right)}{\partial \tau} d\tau ,$$

$$f * g = \int\limits_0^t f\left(\mathbf{r}, t - \tau \right) g\left(\mathbf{r}, \tau \right) d\tau .$$

Рівняння (29) відповідає теоремі взаємності робіт, узагальненій на динамічні задачі локально градієнтної теорії лінійної електромагнітотермопружності.

Зазначимо, що наявність згорток функцій $\rho_0(\boldsymbol{\pi}_m \cdot \mathbf{n}) \odot (\tilde{\mu}'_\pi)'$, $\rho_0(\boldsymbol{\pi}'_m \cdot \mathbf{n}) \odot \tilde{\mu}'_\pi$ у співвідношенні (29) зумовлено врахуванням у модельному описі процесу локального зміщення маси. У разі нехтування цим процесом співвідношення (29) співпадає з рівнянням, одержаним Новацьким для теорії термоп'єзоелектриків [1].

У випадку стаціонарних процесів рівняння (29) зводиться до такого

$$\int\limits_{(\Sigma)} \left\{ \boldsymbol{\sigma}_* \cdot \mathbf{u}' - \boldsymbol{\sigma}'_* \cdot \mathbf{u} + (\varphi' \mathbf{D} - \varphi \mathbf{D}') \cdot \mathbf{n} + \rho_0 \left[\left((\tilde{\mu}'_\pi)' \boldsymbol{\pi}_m - \tilde{\mu}'_\pi \boldsymbol{\pi}'_m \right] \cdot \mathbf{n} \right\} d\Sigma + \right.$$
$$+ \rho_0 \int\limits_{(V)} \left[\mathbf{F}_* \cdot \mathbf{u}' - \mathbf{F}'_* \cdot \mathbf{u} + \beta_{T\rho} (\rho'_m \theta - \rho_m \theta') + \frac{K\alpha_t}{\rho_0} (e'\theta - e\theta') \right] dV = 0 . \qquad (30)$$

Враховуючи, що $\beta_{T\rho}(\rho'_m \theta - \rho_m \theta') + K\alpha_t \rho_0^{-1} (e'\theta - e\theta') = s'\theta - s\theta'$, теорему взаємності робіт для стаціонарного випадку можна записати ще так

$$\int\limits_{(\Sigma)} \left\{ \boldsymbol{\sigma}_* \cdot \mathbf{u}' - \boldsymbol{\sigma}'_* \cdot \mathbf{u} + (\varphi' \mathbf{D} - \varphi \mathbf{D}') \cdot \mathbf{n} + \rho_0 \left[\left((\tilde{\mu}'_\pi)' \boldsymbol{\pi}_m - \tilde{\mu}'_\pi \boldsymbol{\pi}'_m \right] \cdot \mathbf{n} \right\} d\Sigma + \right.$$
$$+ \rho_0 \int\limits_{(V)} \left(\mathbf{F}_* \cdot \mathbf{u}' - \mathbf{F}'_* \cdot \mathbf{u} + s'\theta - s\theta' \right) dV = 0 . \qquad (31)$$

В ізотермічному наближенні рівняння (30), (31) узгоджуються з результатами, отриманими раніше у праці [9] для стаціонарних задач локально градієнтної теорії електромагнітомеханіки неферомагнітних діелектричних тіл.

Висновки. Теорему взаємності робіт узагальнено на випадок лінійних динамічних задач взаємозв'язаної електромагнітотермомеханіки, у якій поряд із деформаційними, тепловими й електромагнітними процесами враховано також локальне зміщення маси. Згадану теорему можна використати для розробки аналітичних методів розрахунку напружено-деформованого стану ізотропних неферомагнітних діелектричних тіл за врахування процесу локального зміщення маси.

Література

[1] *Nowacki, W.* A reciprocity theorem for coupled mechanical and thermoelectric fields in piezoelectric crystals / *W. Nowacki* // Proc. Vibr. Probl. — 1965. — Vol. 6, No 1. — P. 3-11.

[2] *Новацкий, В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах / *В. Новацкий.* — Москва: Мир, 1984. — 159 с.

[3] *Nowacki, J. P.* Some Dynamical Problems of Thermoelastic Dielectrics / *J. P. Nowacki, P. G. Glockner* // Int. J. Solid and Struct. — 1979. — Vol. 15, Issue 3. — P. 183-191.

[4] Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Введение в теорию термопьезоэлектричества / *Д. И. Бардзокас, А. И. Зобнин, Н. А. Сеник, М. Л. Фильштинский.* — 2005. — Т. 1. — 312 с.

[5] *Aouadi, M.* The generalized theory of thermo-magnetoelectroelasticity / *M. Aouadi* // Technische Mechanik. — 2007. — Vol. 27, No 2. — P. 133-146.

[6] *Montanaro, A.* Some general theorems of incremental thermoelectroelasticity / arXiv: 0808.1026 (August 2008) http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0808/0808.1026v2.pdf.
[7] *Бурак, Я. Й.* Приповерхневі механоелектромагнетні явища у термопружних поляризовних тілах за локального зміщення маси / *Я. Й. Бурак, В. Ф. Кондрат, О. Р. Грицина* // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2007. — № 4. — С. 5-17.
[8] *Кондрат, В.* Рівняння електромагнітотермомеханіки поляризовних неферомагнітних тіл за врахування локального зміщення маси / *В. Кондрат, О. Грицина* // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2008. — Вип. 8. — С. 69-83.
[9] *Грицина О.* Узагальнення теореми взаємності робіт для нелокальної електромагнітної механіки діелектриків / *О. Грицина* // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2009. — Вип. 10. — С. 50-55.
[10] *Ландау, Л. Д.* Электродинамика сплошных сред / *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* — Москва: Наука, 1982. — 620 с.
[11] *Корн, Г.* Справочник по математике / *Г. Корн, Т. Корн.* — Москва: Наука, 1974. — 831 с.
[12] *Tiersten, H. F.* The radiation and confinement of electromagnetic energy accompanying the oscillations of piezoelectric crystal plates / *H. F. Tiersten* // Rec. Advances in Engineering Science, Part 1, ed. *A. C. Eringen*. — New York: Gordon and Breach Science Publ., 1970.

The theorem of reciprocity of work for local gradient linear thermo-electro-magnetoelasticity

Olha Hrytsyna

The theorem of reciprocity of work is generalised for dynamical problems of local gradient linear theory of coupled electro-magneto-thermomechanics of polarized nonferromagnetic isotropic solids. The nonlocality of the mentioned theory is caused by the account of the process of local displacement of mass alongside with deformation, thermal and polarisation processes. As a particular case, the reciprocity theorem of work for stationary processes is obtained. It is shown that the obtained results agree well with those known in literature.

Теорема взаимности работ локально градиентной линейной электромагнитотермоупругости

Ольга Грицина

Теорема взаимности работ обобщена на динамические задачи локально градиентной теории взаимосвязанной электромагнитотермомеханики поляризованных неферромагнитных изотропных тел. Нелокальность упомянутой теории обусловлена учетом наряду с процессами деформирования, теплопроводности и поляризации также процесса локального смещения массы. Как частный случай приведена теорема взаимности работ для стационарных процессов. Показано согласование полученных результатов с известными в литературе.

Представлено член-кореспондентом НАН України Я. Бураком

Отримано 21.03.10