

Визначення оптимальних перехідних режимів поздовжнього силового навантаження рухомої одновимірної пружної системи

Богдан Гера

Д. т. н., професор, Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дундаса, 15, Львів, Україна, 79005, Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, Львівська філія, вул. І. Блажкевич, 12а, Львів, Україна, e-mail: gera@cmm.lviv.ua

Запропоновано формулювання задачі про визначення оптимального режиму поздовжнього силового навантаження одновимірної рухомої механічної системи, що забезпечує відсутність небажаних форм пружних коливань, викликаних силами тяги чи гальмування. Задачу зводимо до проблеми моментів стосовно функцій, які залежать від часу та визначають режим шуканого навантаження системи. Із застосуванням методу множників Лагранжа та варіаційного числення отримано умови оптимальності функцій керування. За розрахунковими формулами, які в явному вигляді задають режими навантаження, виконані обчислення та проведено їх аналіз.

Ключові слова: рухома динамічна система, поздовжні коливання, оптимальні режими навантаження.

Вступ. Прикладання сил тяги чи гальмування для переміщення пружних тіл приводить до виникнення в них коливань і динамічних напружень. Якщо розгін чи зупинку рухомого тіла здійснювати за найменший можливий час, то навантаження повинно змінюватися до своїх граничних значень дуже швидко (наскільки це можливо технологічно). У моделі переходу абсолютно твердого тіла з одного стану до іншого за найменший час сила, яка це забезпечує, може змінюватися стрибкоподібно в деякі моменти часу в процесі руху. Якщо процесом деформування не можна нехтувати, то застосування подібних режимів призведе до виникнення динамічних переміщень і напружень у тілі, які часто виявляються небажаними. Тоді виникає потреба скоректувати зовнішнє навантаження в перехідних інтервалах і забезпечити демпфування коливань. Таким чином приходимо до формулювання задач на визначення перехідних режимів навантаження та знаходження параметрів демпфуючих пристроїв.

Інтенсивні навантаження тонкостінних конструктивних елементів розглядалися в роботах [1, 2]. Запропонована в цих роботах методика стосувалася, в основному, випадків поперечного навантаження та поперечних коливань елементів конструкцій. Показано, що за рахунок вибору режиму навантаження можна отримати бажану динамічну поведінку системи в перехідному процесі та по його завершенні, а також забезпечити оптимальний рівень напружень і деформацій.

Проте для керування поздовжніми коливаннями пружного тіла отриману раніше методику слід дещо модифікувати, як з огляду на умови, які визначають динамічні ефекти, так і формулювання критерію оптимальності процесу.

У цій роботі розглядається один із можливих підходів до побудови програмного керування внутрішніми коливаннями одновимірної деформівної системи з метою усунення пружних коливань на деяких (заданих) її власних частотах.

1. Формулювання задачі

Розглянемо рух пружної одновимірної системи, яку можна моделювати стрижнем завдовжки L . Система перебуває під дією змінної в часі сили $F(t)$ (сила тяги чи гальмівна сила), прикладеної до одного з країв стрижня $x = L$ у напрямку осі. Інший край $x = 0$ не навантажений. Сила $F(t)$ забезпечує потрібні переміщення та швидкість руху механічної системи як твердого тіла. Ця сила вважається заданою. Її можна визначати з умов керування рухом твердого тіла. За такої зовнішньої дії в системі виникають динамічні пружні коливання, які можуть виявитися небажаними. Для керування ними додатково прикладаємо розподілене вздовж стрижня навантаження $q(x, t)$ у напрямку осі Ox , яке можна записати у вигляді

$$q(x, t) = \sum_{i=1}^K b_i(x) u_i(t). \text{ Тут } b_i(x) \text{ — задані функції координати } x, \text{ які визначають}$$

розподіл навантаження вздовж стрижня ($0 < x < L$). Режими навантаження $u_i(x)$, $i = \overline{1; K}$, приймаємо за шукані функції керування. Навантаження $q(x, t)$ задовольняє низці умов, які будемо записувати й уточнювати під час деталізації формулювання задачі керування.

Рівняння динаміки стрижня запишемо у вигляді

$$\rho(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(E(x) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right) = \sum_{i=1}^K b_i(x) u_i(t) \quad (0 < x < L, t > 0), \quad (1)$$

де $w(x, t)$ — функція поздовжніх переміщень точок стрижня з координатами x у момент часу t , $\rho(x) > 0$ — лінійна густина стрижня у перерізі x , $E(x) > 0$ — модуль пружності.

Рівняння (1) розглядаємо з граничними умовами, що відповідають відсутності зовнішньої дії на краю $x = 0$ і заданню зусиль на границі $x = L$, а саме,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \text{ якщо } x = 0, \text{ та } E \frac{\partial w}{\partial x} = F(t), \text{ якщо } x = L. \quad (2)$$

Початкові умови запишемо у вигляді

$$w(x, 0) = f_0(x), \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = f_1(x). \quad (3)$$

Функції керування $u_i(x)$ будемо визначати так, щоб у момент часу $t = T$ були відсутні пружні коливання в механічній системі на деяких власних частотах, а також функціонал

$$\Omega(u) = \int_0^T \sum_{i=1}^K u_i^2(t) dt \quad (4)$$

набував мінімального значення.

Мінімізація $\Omega(u)$ забезпечує оптимально низькі рівні шуканих поздовжніх сил керування. Отже керування зводиться до визначення скінченної кількості функцій однієї змінної $u_i(t)$, $t \in (0, T)$ і за такого формулювання задачі не належить до розподіленого.

Отримаємо умови, яким повинні задовольняти $u_i(t)$, щоб у заданий момент часу пружні власні коливання стрижня на заданих частотах були відсутні. Для встановлення цих умов запишемо рівняння задачі у вигляді

$$\rho(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(E(x) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right) = \delta(x - L) F(t) + \sum_{i=1}^K b_i(x) u_i(t), \quad (5)$$

яке розглядаємо з однорідними граничними умовами

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{для } x = 0 \quad \text{та } x = L \quad (6)$$

і початковими умовами (3).

Розв'язок рівняння (5) шукатимемо у вигляді розвинення

$$w(x, t) = w_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) X_n(x). \quad (7)$$

Функція $w_0(t)$ у виразі (7) визначає переміщення стрижня як абсолютно твердого тіла під дією сил $F(t)$ та $q(x, t)$.

Власні функції $X_n(x)$ задовольняють рівняння

$$\frac{d}{dx} \left(E(x) \frac{dX_n(x)}{dx} \right) = -\lambda_n^2 \rho(x) X_n(x) \quad (8)$$

та умови

$$\frac{dX_n(x)}{dx} = 0 \quad \text{для } x = 0 \quad \text{та } x = L, \quad (9)$$

де λ_n — власні значення задачі (8), (9).

Вважаємо, що функції $X_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ортонормовані на інтервалі $(0, L)$ із ваговим множником $\rho(x)$, тобто задовольняють умови

$$\int_0^L \rho(x) X_n(x) X_m(x) dx = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \quad (10)$$

Помножимо рівняння (8) на dx і проінтегруємо його в межах від 0 до L . Отримаємо, що власні функції задовольняють також умови $\int_0^L \rho(x)X_n(x)dx = 0$. Таким чином функція $X_0(x) = const$ є ортогональна до кожної з функцій $X_n(x)$, які визначаються з розв'язку задачі (8), (9). Нехай $X_0(x) = 1/\sqrt{M}$, щоб відповідно до (10) її норма дорівнювала одиниці. Тут M — маса стрижня, $M = \int_0^L \rho(x)dx$.

Одержимо умови, для визначення функцій $w_n(t)$, які входять у подання (7) для функції переміщення. Для цього підставимо вираз (7) у рівняння (5) та умови (3), (6); помножимо почергово рівняння на $X_n(x)dx$, початкові умови на $X_n(x)\rho(x)dx$ ($n = 0, 1, \dots$), а результат проінтегруємо у межах від 0 до L . Отримаємо рівняння руху й умови для визначення переміщення стрижня $w_0(t)$

$$\ddot{w}_0(t) = \sum_{i=1}^K \frac{b_{i0}}{\sqrt{M}} u_i(t) + \frac{F(t)}{M}, \quad (11)$$

$$w_0(0) = \frac{f_{00}}{\sqrt{M}}, \quad \dot{w}_0(0) = \frac{f_{10}}{\sqrt{M}}, \quad (12)$$

диференціальні рівняння другого порядку по часу для функцій $w_n(t)$

$$\ddot{w}_n(t) + \lambda_n^2 w_n(t) = \sum_{i=1}^K b_{in} u_i(t) + X_n(L)F(t) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (13)$$

а також початкові умови для них

$$w_n(0) = f_{0n}, \quad \dot{w}_n(0) = f_{1n} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (14)$$

Тут

$$b_{in} = \int_0^L b_i(x)X_n(x)dx, \quad f_{0n} = \int_0^L f_0(x)\rho(x)X_n(x)dx,$$

$$f_{1n} = \int_0^L f_1(x)\rho(x)X_n(x)dx \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Розв'язок задач (11), (12) і (13), (14) має вигляд

$$w_0(t) = \frac{1}{\sqrt{M}} \left[\int_0^t (t - \tau) \left(\sum_{i=1}^K b_{i0} u_i(\tau) + \frac{F(\tau)}{\sqrt{M}} \right) d\tau + f_{00} + f_{10}t \right], \quad (15)$$

$$w_n(t) = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t - \tau) \left(\sum_{i=1}^K b_{in} u_i(\tau) + X_n(L)F(\tau) \right) d\tau + f_{0n} \cos(\lambda_n t) + \frac{f_{1n}}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t). \quad (16)$$

У деякий момент часу $t = T$ переміщення стрижня $w_0(T)$ та його швидкість $\dot{w}_0(T)$ вважаємо заданими. Позначимо їх відповідно w_* та \dot{w}_* . Тоді переміщення стрижня та його швидкість, викликані додатковими силами $u_i(t)$ у момент $t = T$, визначаємо як різниці заданих значень та відповідних переміщень і швидкості, зумовлених дією сили $F(t)$ та врахування початкових умов.

Звідси отримуємо дві інтегральні умови, яким задовольняють невідомі функції керування $u_i(t)$

$$\sum_{i=1}^K b_{i0} \int_0^T (T - \tau) u_i(\tau) d\tau = \Phi_0, \quad \sum_{i=1}^K b_{i0} \int_0^T u_i(\tau) d\tau = \Phi_1, \quad (17)$$

$$\Phi_0 = \sqrt{M} w_* - \frac{1}{\sqrt{M}} \int_0^T (T - \tau) F(\tau) d\tau + f_{00} + f_{10} T,$$

$$\Phi_1 = \sqrt{M} \dot{w}_* - \frac{1}{\sqrt{M}} \int_0^T F(\tau) d\tau + f_{10}. \quad (18)$$

Відсутність пружних переміщень і швидкостей за дії $u_i(t)$ у момент $t = T$, які відповідають деяким власним значенням $\lambda_{n_s} (s = \overline{1; S})$, означає, що

$$w_{n_s}(T) = 0 \quad \text{і(або)} \quad \dot{w}_{n_s}(T) = 0.$$

Використовуючи формулу (16), із цих умов отримуємо ще ряд інтегральних рівнянь вигляду

$$\sum_{i=1}^K b_{in_s} \int_0^T \sin[\lambda_{n_s}(T - \tau)] u_i(\tau) d\tau = - \int_0^T \sin[\lambda_{n_s}(T - \tau)] X_{n_s}(L) F(\tau) d\tau - \lambda_{n_s} f_{0n_s} \cos(\lambda_{n_s} T) - f_{1n_s} \sin(\lambda_{n_s} T), \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^K b_{in_s} \int_0^T \cos[\lambda_{n_s}(T - \tau)] u_i(\tau) d\tau = - \int_0^T \cos[\lambda_{n_s}(T - \tau)] X_{n_s}(L) F(\tau) d\tau + \lambda_{n_s} f_{0n_s} \sin(\lambda_{n_s} T) - f_{1n_s} \cos(\lambda_{n_s} T). \quad (20)$$

Позначимо підінтегральні функції, які формують умови (17)-(20), через $\psi_n(t) (n = \overline{0, N})$. Тобто для кожної з $N + 1$ умов, що повинні виконуватися у момент $t = T$, матимемо свою функцію, наприклад

$$\psi_0(t) = (T - t), \quad \psi_1(t) = 1, \quad \psi_2(t) = \sin[\lambda_{n_1}(T - t)], \quad \psi_3(t) = \cos[\lambda_{n_1}(T - t)], \dots, \\ \psi_{N-1}(t) = \sin[\lambda_{n_s}(T - t)], \quad \psi_N(t) = \cos[\lambda_{n_s}(T - t)].$$

Задані значення інтегралів у рівняннях (19), (20) позначимо $\Phi_n (n = \overline{0, N})$. Їх вигляд, починаючи з $n = 2$, визначається однією з формул

$$\Phi_s = -\int_0^T \sin[\lambda_{n_s}(T-\tau)] X_{n_s}(L) F(\tau) d\tau - \lambda_{n_s} f_{0n_s} \cos(\lambda_{n_s} T) - f_{1n_s} \sin(\lambda_{n_s} T), \quad (21)$$

$$\Phi_r = -\int_0^T \cos[\lambda_{n_r}(T-\tau)] X_{n_r}(L) F(\tau) d\tau + \lambda_{n_r} f_{0n_r} \sin(\lambda_{n_r} T) - f_{1n_r} \cos(\lambda_{n_r} T), \quad (22)$$

залежно для яких власних значень λ_n задаються складники швидкості та переміщення. Для Φ_0, Φ_1 маємо формули (18).

Після перепозначень запишемо співвідношення (17), (19), (20) у вигляді

$$\sum_{i=1}^K B_{in} \int_0^T \psi_n(\tau) u_i(\tau) d\tau = \Phi_n, \quad n = \overline{0; N}, \quad (23)$$

де $B_{in} = b_{in/2}$, якщо n парне та $B_{in} = b_{i(n-1)/2}$, якщо n непарне.

Якщо функції $u_i(t)$ задовольняють рівняння (23), то для умовної мінімізації функціонала (4) застосуємо методи множників Лагранжа та варіаційного числення. Введемо $N+1$ множників Лагранжа $-\mu_n$, і задачу умовної мінімізації функціонала $\Omega(u)$ (4) замінимо на задачу безумовної мінімізації функціонала

$$\Omega^*(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^K u_i^2(\tau) d\tau - \sum_{n=0}^N \mu_n \sum_{i=1}^K B_{in} \int_0^T \psi_n(\tau) u_i(\tau) d\tau. \quad (24)$$

Необхідна умова екстремуму (мінімуму) $\Omega^*(u)$ — рівність нулю його першої варіації

$$\delta\Omega^*(u) = \frac{\partial}{\partial\alpha} \Omega^*(u + \alpha\delta u) \Big|_{\alpha=0},$$

де $\delta u = (\delta u_1(t), \dots, \delta u_K(t))$ — варіація функції керування. Ця умова має вигляд

$$\delta\Omega^*(u) \equiv \int_0^T \sum_{i=1}^K \left[u_i(\tau) - \sum_{n=0}^N \mu_n B_{in} \psi_n(\tau) \right] \delta u_i(\tau) d\tau = 0.$$

Оскільки $\delta u_i(t)$ — незалежні варіації функцій $u_i(t)$ ($i = \overline{1, I}$), прирівнюємо вирази біля кожної з них до нуля та знайдемо функції $u_i(t)$

$$u_i(t) = \sum_{n=0}^N \mu_n B_{in} \psi_n(t). \quad (25)$$

Невідомі коефіцієнти μ_n ($n = \overline{0; N}$) вибираємо так, щоб виконувалися умови (23). Підставимо $u_i(t)$ у формули (23) й отримаємо систему $N+1$ лінійних рівнянь для визначення μ_n

$$\sum_{n=0}^N \mu_n \sum_{i=1}^K b_{im} b_{in} \int_0^T \psi_m(\tau) \psi_n(\tau) d\tau = \Phi_m. \quad (26)$$

Очевидно, що $a_{mn} = a_{nm} = \sum_{i=1}^K b_{im} b_{in} \int_0^T \psi_m(\tau) \psi_n(\tau) d\tau$, тобто матриця системи

лінійних рівнянь $A = (a_{mn})$ — симетрична.

Розв'язуючи систему лінійних рівнянь $A\mu = \Phi$, отримуємо множники Лагранжа μ_n і тоді формулу (25) для визначення шуканих функцій $u_i(t)$ повністю забезпечено даними.

2. Обчислення та дослідження функцій оптимальних режимів навантаження

Для прикладу розглянемо задачу про переміщення стрижневої системи під дією сили тяги (гальмування) $F(t)$ на краю $x = L$ і додатково прикладеної сили $u(t)$ на цьому ж краю, яку визначаємо таким чином, щоб після переміщення та зупинки у системі були відсутні поздовжні коливання на нижніх частотах. Обчислення проводимо за отриманими формулами, приймаючи, що $K = 1$ (одна компонента), $u(t) = u_1(t)$ і $q(x, t) = \delta(x - L)u(t)$. При цьому вважаємо, що стрижень однорідний, тобто $\rho(x) = \rho, E(x) = E$ є постійні. Початково система знаходиться у стані рівноваги. Силу $F(t)$ вибираємо так, щоб за найменший час перемістити стрижень на задану відстань і зупинити. За обмежень $|F(t)| \leq F_*$ її приймаємо у вигляді

$$F(t) = \begin{cases} F_*, & 0 < t < T/2, \\ -F_*, & T/2 < t < T, \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

Прикладання сили $F(t)$, яка в окремі моменти часу стрибкоподібно змінює своє значення на краю пружного стрижня, викличе у ньому хвильові процеси. Одночасно із зупинкою стрижня в момент часу $t = T$ потрібно забезпечити умови $w_n(T) = 0, \dot{w}_n(T) = 0$ для деяких заданих значень n . Це можна здійснити, приклавши додатково силу $u(t)$ у довільній точці стрижня, зокрема, на краю $x = L$, де діє сила $F(t)$. Обчислення $u(t)$ проводимо за формулою (25) із такими вхідними даними: $L = 50$ м, $T = 3,5$ с, $\rho = 400$ кг/м³, $E = 10^6$ Па.

На рис. 1а показано отримані режими навантаження $u(t)$, які не приводять до переміщення стрижня як твердого тіла. Одночасна дія $u(t)$ та $F(t)$ забезпечує

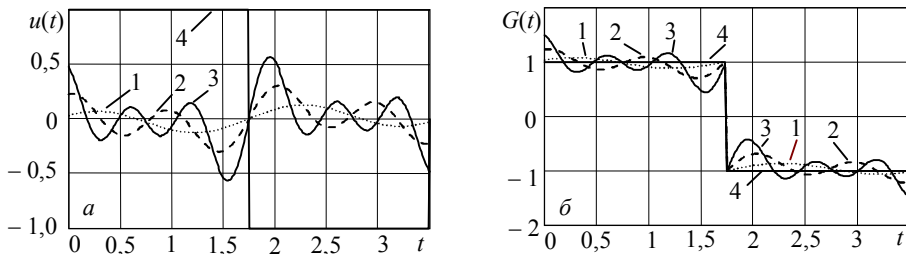


Рис. 1. Зміна в часі навантаження системи, отриманого для різної кількості умов

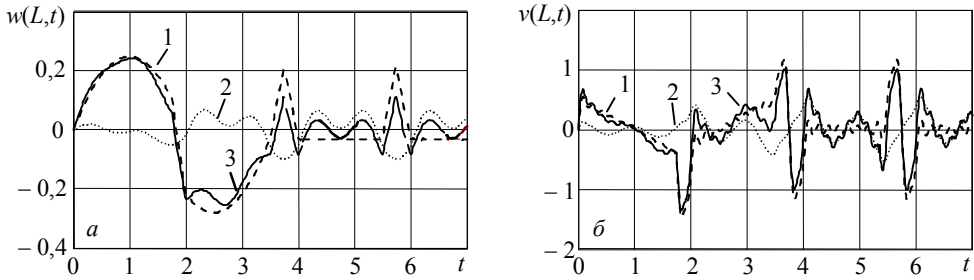


Рис. 2. Складники пружних переміщень (а) та швидкості (б) для $x = L$

відсутність коливань на заданих нижніх власних частотах. Криві 1-3 побудовані для $u(t)$, отриманих із різною кількістю N інтегральних умов (23), а саме, крива 1 відповідає $N = 4$, крива 2 — $N = 6$, крива 3 — $N = 8$. На рис. 1б показано зміну з часом відповідних їм функцій сумарної сили $G(t) = F(t) + u(t)$, яка прикладається на краю стрижня $x = L$.

Бачимо, що на деяких інтервалах часу ця сумарна сила перевищує граничні значення F_* для сили тяги. Окрім того, чим більше форм коливань усуваємо, тим більше зростає рівень функції керування. Режим сили керування, а отже і сумарної сили, має коливний характер, що може викликати труднощі реалізації такого програмного керування. За необхідності отримати загальне навантаження, яке забезпечує оптимальні динамічні ефекти не лише в момент завершення переміщення, а й у перехідному режимі, можна скористатися критеріями оптимальності, розробленими у працях [1, 2].

На рис. 2а показані пружні переміщення за дії сил $F(t)$ й $u(t)$, а на рис. 2б швидкість на краю стрижня $x = L$, як у процесі навантаження для $0 < t < T$, так і в подальшому режимі вільних коливань $T < t$. На рисунках криві 1 відповідають переміщенням і швидкості за дії лише сили $F(t)$, криві 2 — сили $u(t)$ та 3 — сумарної сили $G(t) = F(t) + u(t)$. За дії $G(t)$ забезпечуються умови $w_0(T) = w^*$, $\dot{w}_0(T) = 0$, $w_n(T) = 0$, $\dot{w}_n(T) = 0$, $n = 1, 2$. Розрахунки показали, що усунення коливань шляхом додаткового навантаження на одних частотах може привести до збільшення їх амплітуд на інших. Цей ефект міг би бути менш значимим, якщо б математична модель передбачала врахування розсіювання енергії пружних коливань.

Розглянемо також варіант керування пружними коливаннями стрижня додатковими силами $u_i(t)$, $i = \overline{1, K}$, які діють у перерізах $x = \xi_i$, та проаналізуємо як змінюються їх рівні зі збільшенням K . Силу $F(t)$ на краю стрижня, а також значення параметрів L , T , ρ , E приймаємо такими ж, як і в попередньому прикладі. У момент часу $t = T$ керування забезпечує виконання інтегральних умов (23), які відповідають вимогам $w_n(T) = 0$, $\dot{w}_n(T) = 0$, $n = \overline{1, 3}$. Обчислення проводимо для трьох варіантів кількості та розташування точок прикладання сил. На рис. 3 крива 1 відповідає керуванню однією силою $u_1(t)$, що діє в точці з координатою $\xi_1 = 0,7L$, криві 2 та 3 відображають варіант керування двома силами $u_1(t)$ та $u_2(t)$, що діють

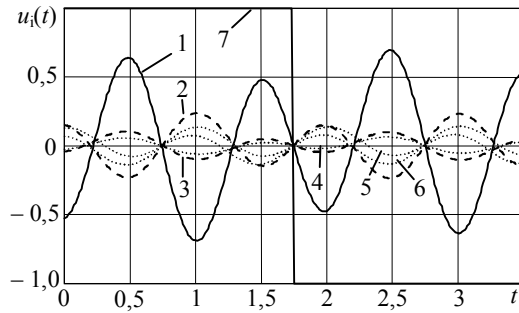


Рис. 3. Функції керування $u_i(t)$ для трьох варіантів розподілу сил:

- одна функція керування, $\xi_1 = 0,7L$;
- - - дві функції керування, $\xi_1 = 0,7L$ і $\xi_2 = 0,1L$;
- три функції керування, $\xi_1 = 0,7L$, $\xi_2 = 0,1L$, $\xi_3 = 0,9L$

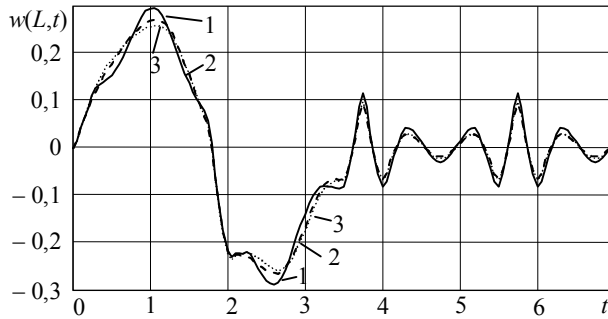


Рис. 4. Пружні переміщення для трьох варіантів розподілу навантаження

у точках $\xi_1 = 0,7L$ і $\xi_2 = 0,1L$, криві 4-6 подають варіант керування трьома силами $u_i(t)$ у точках із координатами $\xi_1 = 0,7L$, $\xi_2 = 0,1L$, $\xi_3 = 0,9L$. Збільшення кількості прикладених сил дозволяє досягнути мету керування за допомогою режимів меншого рівня. За обмеженої потужності засобів керування для досягнення мети та виконання умов керування сили доведеться розподіляти вздовж пружної системи у більшій кількості.

На рис. 4 показані пружні переміщення на краю $x = L$ для трьох розглянутих варіантів навантажень у поєднанні з силою $F(t)$. Криві 1-3 показують зміну в часі переміщень під час керування одним, двома та трьома складниками відповідно. При цьому для усіх трьох варіантів не спостерігаємо значних відхилень між кривими, хоча у процесі навантаження трьома силами максимальне переміщення дещо менше, ніж те, яке отримуємо, досягаючи мети керування однією силою, прикладеною всередині пружної системи.

Висновки. Отримано розв'язок задачі визначення режимів силового навантаження пружної системи, за яких внутрішні коливання на вказаних частотах будуть відсутні. Записані в явному вигляді формули дозволяють програмувати режими навантаження для різних варіантів розташування керуючих сил, а також із передбачуваною поведінкою системи після завершення процесу навантаження. Проведені

дослідження показали, що режими навантаження мають коливний характер. У перехідному режимі на пружні переміщення обмеження не накладаються, тому у випадку перевищення їх допустимих рівнів для оптимізації поведінки системи в перехідному процесі доцільно застосувати підходи, запропоновані у роботах [1, 2]. Зі збільшенням кількості функцій керування рівень режимів навантаження зменшується. Проте для проведених досліджень із фіксованою силою, яка забезпечує переміщення пружної системи як твердого тіла, на переміщення це суттєво не вплинуло.

Література

- [1] Бурак, Я. Й. Вибрані праці / Я. Й. Бурак. — Львів: НУЦММ ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, в-во «Ахіл», 2001. — 352 с.
- [2] Бурак, Я. Й. Оптимізація переходних режимов в термоупругих оболочках / Я. Й. Бурак, Ю. Д. Зозуляк, Б. В. Гера. — Київ: Наукова думка, 1984. — 160 с.

Determining of the optimal transient conditions of longitudinal loading for moving one-dimensional elastic system

Bohdan Gera

Formulation of the problem on determination of the optimal regime of longitudinal loading of one-dimensional moving mechanic system that provides the absence of undesired elastic vibrations caused by traction or braking forces is proposed. The problem is reduced to the problem of moments with respect to functions of time which determine the conditions of searched loading of the system. By using the Langrangian multipliers method and variation calculus the optimal conditions of control functions are obtained. The calculations performed by formulas for loading conditions and their end-point analysis were carried out.

Определение оптимальных переходных режимов продольного силового нагружения движущейся одномерной упругой системы

Богдан Гера

Предложена постановка задачи об определении оптимального режима продольного силового нагружения одномерной подвижной механической системы, обеспечивающего отсутствие нежелательных форм упругих продольных колебаний, вызванных силами тяги или торможения. Задача сводится к проблеме моментов относительно зависящих от времени функций, которые формируют режим искомого нагружения системы. С применением метода множителей Лагранжа и вариационного исчисления получены условия оптимальности функций управления. По формулам, которые в явном виде задают режимы нагружения, выполнены вычисления и проведен их анализ.

Отримано 06.12.10