УДК 539.3

Динамічні співвідношення локально градієнтної електромагнітотермомеханіки діелектриків

Ольга Грицина

К. ф.-м. н., с. н. с., ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: gryt@cmm.lviv.ua

Отримано повну систему співвідношень локально градієнтного теорії, що описує взаємозв'язані електромагнітотермомеханічні процеси в ізотропних неферомагнітних діелектричних тілах з урахуванням інерції та необоротності процесів поляризації і локального зміщення маси. Показано, що наслідком врахування необоротності й інерційності процесів є реологічні визначальні співвідношення для векторів поляризації та локального зміщення маси. Залежність вектора поляризації від градієнта температури та потенціалу μ'_π, *який враховує вплив локального зміщення маси на внутрішню енергію, дозволить описати приповерхневу поляризацію та термополяризаційний ефект.*

Ключові слова: нелокальна теорія, електромагнітотермомеханічні процеси, локальне зміщення маси, поляризовні тіла, необоротність та інерційність процесів.

Вступ. Неспроможність класичних теорій пружності, термопружності, електромагнітотермопружності пояснити низку експериментально встановлених ефектів (для прикладу, високочастотну дисперсію пружних хвиль, аномальну залежність ємності тонких діелектричних плівок від їх товщини тощо) спонукала дослідників до побудови нових теорій. Перелічені явища вдалося ефективно обґрунтувати з використанням співвідношень нелокальних теорій, для яких характерне врахування залежності локального стану фіксованої точки тіла від стану сусідніх точок. У теорії пружності такі теорії будували шляхом закладання інтегрального зв'язку між тензорами напружень і деформації [1], або ж шляхом розширення простору параметрів стану градієнтами тензора деформації (чи поворотів) першого та вищих порядків [2-4]. Пізніше такі теорії природним чином були поширені на інші середовища, у тому числі, діелектричні. До такого роду досліджень слід віднести роботи [5-7], у яких для обґрунтування флексоелектричного ефекту враховано залежність вектора поляризації від градієнта тензора деформації, а також роботи [8, 9], для яких властиве задання функціональних матеріальних співвідношень просторового типу. Подальша розбудова нелокальних теорій п'єзоелектриків завдячує працям Міндліна [10, 11], який узагальнив класичну теорію п'єзоелектриків, ввівши у простір параметрів стану градієнт вектора поляризації, Кефадара [12], який врахував залежність локального термодинамічного стану від вищих електричних мультипольних моментів, Можена [13, 14], який постулював залежність локального стану від градієнтів вектора напруженості електричного поля та багатьох інших дослідників.

Наприкінці 80-их років професором Бураком опубліковано працю [15], яка започаткувала новий напрямок у розбудові нелокальних теорій пружності, термопружності й електромагнітотермопружності. Цей напрямок ґрунтувався на врахуванні поряд із процесами деформування та теплопровідності процесу локального зміщення маси. Таке зміщення центрів мас фізично малих елементів характерне для приповерхневих областей новоутворених поверхонь і є наслідком порушення силової рівноваги між атомами, молекулами чи кристалами в околі поверхні. Результатом такого зміщення є зміна структури приповерхневого шару.

Наслідком врахування процесу локального зміщення маси стала модифікація потоку маси згідно формули

$$\mathbf{J}_m^* = -\frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t} + \mathbf{J}_m ,$$

де $\mathbf{J}_m$ — вектор потоку маси дифузійної природи, а складник $\frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t}$ має неконвективну й недифузійну природу. Цей складник професор Бурак пов'язав із процесом локального зміщення маси, а вектор $\mathbf{\Pi}_m$ назвав вектором такого зміщення.

Прийнявши додатково, що локальне зміщення маси спричиняє потік енергії $\mu \frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t}$ (μ — хімічний потенціал речовини), було побудовано низку нелокальних теорій фізико-механічних процесів у твердих пружних і термопружних одно- та багатокомпонентних тілах. Ці теорії отримали назву локально градієнтних [16, 17]. Для них характерне розширення фазового простору параметрів стану однією парою спряжених параметрів: градієнтом хімічного потенціалу та вектором локального зміщення маси [16]. Одержану за такого підходу систему рівнянь було застосовано для дослідження закономірностей розподілу напружень у приповерхневих областях тіл простої геометрії та використано для вивчення розмірного ефекту межі міцності. У праці [18] враховано інерційність локального зміщення маси. Докладний огляд досліджень цього напрямку містить праця [17].

У роботах [19-21] підхід до побудови локально градієнтних моделей механіки суцільного середовища, який ґрунтувався на врахуванні процесу локального зміщення маси, набув подальшого розвитку. У згаданих працях було введено поняття наведеної маси $\rho_{m\pi} = -\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_m$ і потенціалу μ_π як міри впливу процесу локального зміщення маси на внутрішню енергію системи. Також було показано, що наслідком врахування процесу локального зміщення маси стало розширення простору параметрів стану двома парами спряжених параметрів, однією з яких є питома густина наведеної маси $\rho_m = \rho_{m\pi}/\rho$ та зведений потенціал $\mu'_\pi = \mu_\pi - \mu$. Другою парою додаткових параметрів стану є питомий вектор локального зміщення маси $\boldsymbol{\pi}_m = \mathbf{\Pi}_m/\rho$ та просторовий градієнт величини μ'_π.

За такого підходу у працях [20, 21] було одержано повну систему співвідношень нелокальної теорії градієнтного типу для поляризовних матеріалів, що враховувала процес локального зміщення маси за припущення його оборотності та безінерційності. Наслідком такого наближення стали стаціонарні рівняння для визначення величин, пов'язаних з процесом локального зміщення маси. Було показано, що такі рівняння дозволяють описати приповерхневу неоднорідність напружено-деформованого стану, розмірні ефекти, у тому числі, аномалію Міда [21, 22]. Разом із тим така система рівнянь не дозволяла вивчати перехідні режими становлення приповерхневої неоднорідності полів. Такого наближення також недостатньо для дослідження збурень електромагнітотермомеханічних процесів ударними навантаженнями, вивчення акустичної й електромагнітної емісій, зумовлених формуванням поверхонь, тощо. Для опису згаданих ефектів у праці [23] було одержано відповідну систему рівнянь локально градієнтної моделі діелектриків із врахуванням необоротності процесів поляризації й локального зміщення маси. У дослідженнях [24, 25] було враховано інерцію процесу поляризації. Метою цієї роботи є узагальнення отриманих результатів і побудова повної системи рівнянь локально градієнтної теорії діелектриків за врахування необоротності й інерційності процесів локального зміщення маси та поляризації.

1. Рівняння балансу енергії за врахування інерції поляризації та локального зміщення маси

Розглядаємо деформівне поляризовне неферомагнітне тіло, яке займає область (V) евклідового простору й обмежене гладкою поверхнею (Σ). Тіло перебуває під впливом електромагнітного поля, а також зовнішньої механічної та температурної дії, внаслідок чого у ньому протікають механічні, теплові й електромагнітні процеси, які можуть супроводжуватися локальним зміщенням маси (змінами структури тіла) у рамках його фізично-малого елемента.

Формування відповідної системи рівнянь будемо проводити, ґрунтуючись на рівняннях Максвелла, а також рівняннях балансу повної енергії системи «тіло-електромагнітне поле», енергії електромагнітного поля, маси, наведеної маси й ентропії. Під час формулювання рівняння балансу повної енергії врахуємо, що процесам локального зміщення маси та поляризації властива інерційність і пов'яжемо цю інерційність із деякими скалярними величинами d_m та d_E. Кінетичну енергію процесу локального зміщення маси та пов'язану з нею величину d_m означимо аналогічно до кінетичної енергії поляризації та величини d_E, введених Моженом для врахування інерційності процесу поляризації [26, 27]. Відтак, повну енергію $\mathscr{E}$ системи «тіло–електромагнітне поле» у довільний момент часу означуємо як суму внутрішньої енергії ρu, енергії електромагнітного поля $U_e = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2\right)$, кінетичної енергії центра мас $\frac{1}{2}\rho \mathbf{v}^2$, а також кінетичних енергій поляризації $\frac{1}{2}\rho d_E\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)^2$ [27] й процесу локального зміщення маси $\frac{1}{2}\rho d_m\left(\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}\right)^2$:

$$\mathscr{E}=\rho u+U_e+\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2+\frac{1}{2}\rho d_E\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\rho d_m\left(\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}\right)^2. \tag{1}$$

Тут ρ — густина маси; $\mathbf{v}$ — вектор швидкості континуума центрів мас; $\mathbf{E}$ та $\mathbf{H}$ — вектори напруженостей електричного та магнітного полів; $\mathbf{p}=\mathbf{P}/\rho$, $\boldsymbol{\pi}_m=\boldsymbol{\Pi}_m/\rho$, $\mathbf{P}$ й $\boldsymbol{\Pi}_m$ — вектори поляризації й локального зміщення маси; ε_0,μ_0 — електрична й магнітна сталі; $\frac{d(\ldots)}{dt}=\frac{\partial(\ldots)}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla(\ldots)$ — повна похідна за часом; ∇ — оператор Гамільтона.

Повна енергія $\mathscr{E}$ системи змінюється внаслідок: конвективного перенесення енергії через поверхню; роботи внутрішніх сил $\hat{\sigma}\cdot\mathbf{v}$; потоків тепла $\mathbf{J}_q$ та енергії електромагнітного поля $\mathbf{S}_e$; роботи $\mu\mathbf{J}_m$, виконаної для перенесення маси; роботи $\mu_\pi\partial\boldsymbol{\Pi}_m/\partial t$, виконаної внаслідок локального зміщення маси, а також дії масових сил $\mathbf{F}$ й розподілених теплових джерел $\mathfrak{R}$, тобто

$$\frac{d}{dt}\int_{(V)}\mathscr{E}dV=-\oint_{(\Sigma)}\left[\rho\left(u+\frac{1}{2}\mathbf{v}^2+\frac{d_E}{2}\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)^2+\frac{d_m}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}\right)^2\right)\mathbf{v}-\hat{\sigma}\cdot\mathbf{v}+\right.$$
$$\left.+\mathbf{S}_e+\mathbf{J}_q+\mu\mathbf{J}_m+\mu_\pi\frac{\partial(\rho\boldsymbol{\pi}_m)}{\partial t}\right]\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma+\int_{(V)}(\rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}+\rho\mathfrak{R})dV.$$

Тут $\hat{\sigma}$ — тензор напружень Коші; $\mathbf{S}_e=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$; $\mathbf{J}_m=\rho(\mathbf{v}_*-\mathbf{v})$; $\mathbf{v}_*$ — швидкість конвективного перенесення фізично-малого елемента тіла; μ — хімічний потенціал; μ_π — міра зміни внутрішньої енергії системи, зумовленої локальним зміщенням маси [19-21]; $\mathbf{n}$ — вектор зовнішньої нормалі до поверхні тіла (Σ); «$\times$», «$\cdot$» — знаки векторного та скалярного добутків.

З використанням теореми Остроградського-Гаусса [28] отримаємо локальну форму цього рівняння

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}=-\nabla\cdot\left[\rho\left(u+\frac{1}{2}\mathbf{v}^2+\frac{d_E}{2}\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)^2+\frac{d_m}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}\right)^2\right)\mathbf{v}-\hat{\sigma}\cdot\mathbf{v}+\right.$$
$$\left.+\mathbf{S}_e+\mathbf{J}_q+\mu\mathbf{J}_m+\mu_\pi\frac{\partial(\rho\boldsymbol{\pi}_m)}{\partial t}\right]+\rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}+\rho\mathfrak{R}. \tag{2}$$

Якщо у співвідношенні (2) врахувати подання (1) для повної енергії, рівняння балансу енергії електромагнітного поля [20, 21]

$$\frac{\partial U_e}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{S}_e+\mathbf{J}_{e*}\cdot\mathbf{E}_*+\left[\rho_e\mathbf{E}_*+\left(\mathbf{J}_{e*}+\frac{\partial(\rho\mathbf{p})}{\partial t}\right)\times\mathbf{B}+\right.$$

$$\left.+\rho\left(\nabla\mathbf{E}_*\right)\cdot\mathbf{p}\right]\cdot\mathbf{v}+\rho\mathbf{E}_*\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}-\nabla\cdot\left[\rho\left(\mathbf{E}_*\cdot\mathbf{p}\right)\hat{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{v}\right]=0\,,$$

балансу маси й ентропії [20]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=0\,, \qquad (3)$$

$$\rho T\frac{ds}{dt}=-\nabla\cdot\mathbf{J}_q+\frac{1}{T}\mathbf{J}_q\cdot\nabla T+T\sigma_s+\rho\Re\,, \qquad (4)$$

а також формулу $\mathbf{J}_m=-\dfrac{\partial\mathbf{\Pi}_m}{\partial t}$ [20], то у підсумку прийдемо до такого рівняння балансу внутрішньої енергії

$$\rho\frac{du}{dt}=\left[\hat{\boldsymbol{\sigma}}-\rho\left(\mathbf{E}_*\cdot\mathbf{p}\right)\hat{\mathbf{I}}\right]:\left(\nabla\otimes\mathbf{v}\right)+\rho T\frac{ds}{dt}+\rho\mathbf{E}_*\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}-$$

$$-\mu'_\pi\frac{\partial\left[\nabla\cdot\left(\rho\pi_m\right)\right]}{\partial t}-\nabla\mu'_\pi\cdot\frac{\partial\left(\rho\boldsymbol{\pi}_m\right)}{\partial t}-\rho d_E\frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}-$$

$$-\rho d_m\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{\pi}_m}{dt^2}+\mathbf{J}_{e*}\cdot\mathbf{E}_*-\mathbf{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T}-T\sigma_s+$$

$$+\mathbf{v}\cdot\left\{-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\nabla\cdot\left[\hat{\boldsymbol{\sigma}}-\rho\left(\mathbf{E}_*\cdot\mathbf{p}\right)\hat{\mathbf{I}}\right]+\rho\mathbf{F}+\mathbf{F}_e\right\}. \qquad (5)$$

Тут T, s — абсолютна температура та питома ентропія; σ_s — виробництво ентропії; $\mathbf{E}_*=\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ та $\mathbf{J}_{e*}=\mathbf{J}_e-\rho_e\mathbf{v}$ — вектори напруженості електричного поля й густини електричного струму в системі відліку центрів мас, яка рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$ відносно лабораторної системи координат; $\mathbf{J}_e$ та $\mathbf{B}$ — вектори густини електричного струму та індукції магнітного поля у лабораторній системі координат; ρ_e — густина вільного електричного заряду; $\rho_m=\rho_{m\pi}/\rho$, де $\rho_{m\pi}$ — густина наведеної маси, яка пов’язана з вектором локального зміщення маси $\mathbf{\Pi}_m$ співвідношенням [20, 21]

$$\rho_{m\pi}=-\nabla\cdot\mathbf{\Pi}_m\,, \qquad (6)$$

$\hat{\mathbf{I}}$ — одиничний тензор; «$\otimes$» — знак діадного добутку. Зазначимо, що для неферомагнітних середовищ, розглядом яких обмежуємося тут,

$$\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}\,. \qquad (7)$$

Переходячи у перших двох доданках другої стрічки формули (5) до повних похідних по часу і враховуючи співвідношення (6) та рівняння балансу маси (3), одержимо

$$\rho\frac{du}{dt}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*:\left(\nabla\otimes\mathbf{v}\right)+\rho T\frac{ds}{dt}+\rho\mathbf{E}_*\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}+\rho\mu'_\pi\frac{d\rho_m}{dt}-\rho\nabla\mu'_\pi\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}-$$
$$-\rho d_E\frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}-\rho d_m\frac{d^2\boldsymbol{\pi}_m}{dt^2}\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}+\mathbf{J}_{e*}\cdot\mathbf{E}_*-\mathbf{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T}-T\sigma_s+$$
$$+\mathbf{v}\cdot\left[-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*+\rho\mathbf{F}_*+\mathbf{F}_e\right]. \qquad (8)$$

Тут

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*=\hat{\boldsymbol{\sigma}}-\rho\left(\mathbf{E}_*\cdot\mathbf{p}-\rho_m\mu'_\pi-\boldsymbol{\pi}_m\cdot\nabla\mu'_\pi\right)\hat{\mathbf{I}},$$
$$\mathbf{F}_*=\mathbf{F}+\underbrace{\rho_m\nabla\mu'_\pi}-\underbrace{\boldsymbol{\pi}_m\cdot\left(\nabla\otimes\nabla\mu'_\pi\right)},$$
$$\mathbf{F}_e=\overbrace{\rho_e\mathbf{E}_*}+\left[\mathbf{J}_{e*}+\frac{\partial(\rho\mathbf{p})}{\partial t}\right]\times\mathbf{B}+\overbrace{\rho\left(\nabla\otimes\mathbf{E}_*\right)\cdot\mathbf{p}}.$$

Впадає в вічі, що додаткова масова $\mathbf{F}_*$ та пондеромоторна $\mathbf{F}_e$ сили мають схожі структури (за відповідності $\mathbf{E}\leftrightarrow\nabla\mu'_\pi$, $\rho_e\leftrightarrow\rho\rho_m$, $\mathbf{p}\leftrightarrow\boldsymbol{\pi}_m$).

2. Необоротність процесів поляризації та локального зміщення маси

Згідно методики, запропонованої у праці [23], для врахування необоротності процесів поляризації та локального зміщення маси подамо вектори $\mathbf{E}_*$ і $\nabla\mu'_\pi$ сумами їх оборотних $\mathbf{E}_*^r$, $\left(\nabla\mu'_\pi\right)^r$ та необоротних $\mathbf{E}_*^i$, $\left(\nabla\mu'_\pi\right)^i$ складників, тобто

$$\mathbf{E}_*=\mathbf{E}_*^r+\mathbf{E}_*^i, \qquad \nabla\mu'_\pi=\left(\nabla\mu'_\pi\right)^r+\left(\nabla\mu'_\pi\right)^i. \qquad (9)$$

З огляду на подання (9) рівняння балансу внутрішньої енергії (8) набуде вигляду

$$\rho\frac{du}{dt}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*:\left(\nabla\otimes\mathbf{v}\right)+\rho T\frac{ds}{dt}+\rho\mathbf{E}_*^r\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}+\rho\mu'_\pi\frac{d\rho_m}{dt}-\rho\left(\nabla\mu'_\pi\right)^r\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}-$$
$$-T\sigma_s-\mathbf{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T}+\mathbf{J}_{e*}\cdot\mathbf{E}_*+\rho\left(\mathbf{E}_*^i-d_E\frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2}\right)\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}-$$
$$-\rho\left[\left(\nabla\mu'_\pi\right)^i+d_m\frac{d^2\boldsymbol{\pi}_m}{dt^2}\right]\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}+\mathbf{v}\cdot\left[-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*+\rho\mathbf{F}_*+\mathbf{F}_e\right]. \qquad (10)$$

З використанням перетворення Лежандра $f = u - Ts - \mathbf{E}_*^r \cdot \mathbf{p} + \left(\nabla \mu'_\pi\right)^r \cdot \boldsymbol{\pi}_m$ перейдемо у цьому рівнянні до узагальненої вільної енергії Гельмгольца f. Одержимо

$$\begin{aligned}
&\rho \frac{df}{dt} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \left(\nabla \otimes \mathbf{v}\right) - \rho s \frac{dT}{dt} - \rho \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{E}_*^r}{dt} + \rho \mu'_\pi \frac{d\rho_m}{dt} + \rho \boldsymbol{\pi}_m \cdot \frac{d\left(\nabla \mu'_\pi\right)^r}{dt} - \\
&- T\sigma_s - \mathbf{J}_q \cdot \frac{\nabla T}{T} + \mathbf{J}_{e*} \cdot \mathbf{E}_* + \rho \left(\mathbf{E}_*^i - d_E \frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} \right) \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \rho \left[\left(\nabla \mu'_\pi\right)^i + d_m \frac{d^2 \boldsymbol{\pi}_m}{dt^2} \right] \cdot \frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt} + \\
&+ \mathbf{v} \cdot \left[-\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* + \rho \mathbf{F}_* + \mathbf{F}_e \right].
\end{aligned}$$

Наслідком інваріантності цього рівняння відносно просторових трансляцій та поворотів є рівняння балансу імпульсу [20]

$$\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* + \rho \mathbf{F}_* + \mathbf{F}_e = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \tag{11}$$

симетрія узагальненого тензора напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*$ й рівняння балансу вільної енергії

$$\begin{aligned}
&\rho \frac{df}{dt} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \frac{d\hat{e}}{dt} - \rho s \frac{dT}{dt} - \rho \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{E}_*^r}{dt} + \rho \mu'_\pi \frac{d\rho_m}{dt} + \rho \boldsymbol{\pi}_m \cdot \frac{d\left(\nabla \mu'_\pi\right)^r}{dt} - \\
&- T\sigma_s - \mathbf{J}_q \cdot \frac{\nabla T}{T} + \mathbf{J}_{e*} \cdot \mathbf{E}_* + \rho \left(\mathbf{E}_*^i - d_E \frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} \right) \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \\
&- \rho \left[\left(\nabla \mu'_\pi\right)^i + d_m \frac{d^2 \boldsymbol{\pi}_m}{dt^2} \right] \cdot \frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt} \; .
\end{aligned} \tag{12}$$

Тут враховано такі геометричні співвідношення

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad \hat{e} = \frac{1}{2}\left[\nabla \otimes \mathbf{u} + \left(\nabla \otimes \mathbf{u}\right)^{\mathrm{T}} \right]. \tag{13}$$

З огляду на те, що доданки, записані в останніх двох стрічках формули (12), не залежать від швидкостей $\frac{d\hat{e}}{dt}$, $\frac{dT}{dt}$, $\frac{d\mathbf{E}_*^r}{dt}$, $\frac{d\rho_m}{dt}$ та $\frac{d\left(\nabla \mu'_\pi\right)^r}{dt}$, із (12) одержимо узагальнене рівняння Ґіббса

$$df = \frac{1}{\rho} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : d\hat{e} - s dT - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{E}_*^r + \mu'_\pi d\rho_m + \boldsymbol{\pi}_m \cdot d\left(\nabla \mu'_\pi\right)^r \tag{14}$$

та вираз для виробництва ентропії

$$\sigma_s = -\mathbf{J}_q \cdot \frac{\nabla T}{T^2} + \mathbf{J}_{e*} \cdot \frac{\mathbf{E}_*}{T} + \rho \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{1}{T}\left(\mathbf{E}_*^i - d_E \frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2} \right) -$$

$$-\rho \frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt} \cdot \frac{1}{T}\left[\left(\nabla \mu'_\pi\right)^i + d_m \frac{d^2\boldsymbol{\pi}_m}{dt^2} \right]. \qquad (15)$$

Рівняння Гіббса (14) та вираз для виробництва ентропії (15) — основа для формулювання визначальних співвідношень локально градієнтної теорії електромагнітотермомеханіки діелектриків за врахування необоротності та інерційності процесів поляризації та локального зміщення маси.

3. Визначальні співвідношення

Оскільки параметри T, ρ_m, $\mathbf{E}_*^r$, $\left(\nabla \mu'_\pi\right)^r$ та $\hat{e}$ — незалежні, то із співвідношення Ґіббса (14) маємо такі рівняння стану

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = \rho \left.\frac{\partial f}{\partial \hat{e}}\right|_{T,\, \rho_m, \mathbf{E}_*^r, (\nabla \mu'_\pi)^r}, \quad s = -\left.\frac{\partial f}{\partial T}\right|_{\rho_m, \mathbf{E}_*^r, (\nabla \mu'_\pi)^r, \hat{e}}, \quad \mu'_\pi = \left.\frac{\partial f}{\partial \rho_m}\right|_{T, \mathbf{E}_*^r, (\nabla \mu'_\pi)^r, \hat{e}},$$

$$\mathbf{p} = -\left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{E}_*^r}\right|_{T, \rho_m, (\nabla \mu'_\pi)^r, \hat{e}}, \quad \boldsymbol{\pi}_m = \left.\frac{\partial f}{\partial (\nabla \mu'_\pi)^r}\right|_{T, \rho_m, \hat{e}, \mathbf{E}_*^r}. \qquad (16)$$

Запишемо лінійні рівняння стану для ізотропних матеріалів в явному вигляді. З цією метою розвинемо вільну енергію f у ряд Тейлора відносно малих збурень параметрів стану щодо природного стану ізотропного однорідного середовища, в якому $\hat{e} = 0$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = 0$, $\mathbf{E}_*^r = 0$, $\left(\nabla \mu'_\pi\right)^r = 0$, $\mathbf{p} = 0$, $\boldsymbol{\pi}_m = 0$, $T = T_0$, $s = s_0$, $\rho = \rho_0$, $\rho_m = 0$, $\mu'_\pi = \mu'_{\pi 0}$. Обмежимось у цьому розвиненні доданками не вище квадратичних, що дасть змогу отримати лінійні рівняння стану. Отож маємо

$$f = f_0 - s_0\,\theta + \mu'_{\pi 0}\rho_m - \frac{C_V}{2T_0}\left(T - T_0\right)^2 + \frac{1}{2\rho_0}\left(K - \frac{2}{3}G \right) I_1^2 +$$

$$+\frac{G}{\rho_0} I_2 + \frac{d_\rho}{2}\rho_m^2 - \frac{K\alpha_T}{\rho_0} I_1\left(T - T_0\right) - \frac{K\alpha_\rho}{\rho_0} I_1\,\rho_m - \beta_{T\rho}\,\rho_m\left(T - T_0\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\chi_m \left(\nabla \mu'_\pi\right)^r \cdot \left(\nabla \mu'_\pi\right)^r - \frac{1}{2}\chi_E \mathbf{E}_*^r \cdot \mathbf{E}_*^r + \chi_{Em}\mathbf{E}_*^r \cdot \left(\nabla \mu'_\pi\right)^r. \qquad (17)$$

Тут I_1 та I_2 — перший та другий інваріанти тензора деформації; K — модуль об’ємного стиску за сталих температури та питомої густини наведеної маси; G — модуль зсуву; α_T — температурний коефіцієнт об’ємного розширення за сталої питомої густини наведеної маси, а α_ρ — коефіцієнт об’ємного розширення, спричиненого локальним зміщенням маси за незмінної температури; C_V — питома теплоємність за сталої деформації та питомої густини наведеної маси; $\beta_{T\rho}$ та d_ρ — ізотермо-ізохоричні коефіцієнти залежностей ентропії та потенціалу μ'_π від питомої густини наведеної маси; χ_E — діелектрична сприйнятливість; χ_m і χ_{Em} — коефіцієнти, які характеризують відповідно локальне зміщення маси та поляризовність тіла, зумовлені градієнтом потенціалу μ'_π.

Тоді на основі формул (16) і (17) одержуємо такі лінійні рівняння стану

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = 2G\hat{\boldsymbol{e}} + \left\{\left(K - \frac{2}{3}G\right)e - K\left[\alpha_T\left(T - T_0\right) + \alpha_\rho\rho_m\right]\right\}\hat{\mathbf{I}}, \tag{18}$$

$$s = s_0 + \frac{C_V}{T_0}\left(T - T_0\right) + \frac{1}{\rho_0}K\alpha_T\, e + \beta_{T\rho}\,\rho_m, \tag{19}$$

$$\mu'_\pi = \mu'_{\pi 0} + d_\rho\rho_m - \beta_{T\rho}\left(T - T_0\right) - \frac{1}{\rho_0}K\alpha_\rho\, e, \tag{20}$$

$$\mathbf{p} = \chi_E\mathbf{E}_*^r - \chi_{Em}\left(\nabla\mu'_\pi\right)^r, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{\pi}_m = -\chi_m\left(\nabla\mu'_\pi\right)^r + \chi_{Em}\mathbf{E}_*^r. \tag{22}$$

Кінетичні рівняння запишемо, ґрунтуючись на рівнянні (15) для виробництва ентропії. Приймемо, що термодинамічні потоки

$$\mathbf{j}_1 = \mathbf{J}_q, \quad \mathbf{j}_2 = \mathbf{J}_{e*}, \quad \mathbf{j}_3 = \rho\frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \text{та} \quad \mathbf{j}_4 = \rho\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}$$

є лінійні функції термодинамічних сил

$$\mathbf{X}_1 = -\frac{\nabla T}{T^2}, \; \mathbf{X}_2 = \frac{\mathbf{E}_*}{T}, \; \mathbf{X}_3 = \frac{1}{T}\left(\mathbf{E}_*^i - d_E\frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2}\right), \; \mathbf{X}_4 = -\frac{1}{T}\left[\left(\nabla\mu'_\pi\right)^i + d_m\frac{d^2\boldsymbol{\pi}_m}{dt^2}\right],$$

тобто

$$\mathbf{j}_i = \sum_{j=1}^{4} L_{ij}\mathbf{X}_j, \left(i = \overline{1,4}\right). \tag{23}$$

Тут L_{ij} $\left(i, j = \overline{1,4}\right)$ — кінетичні коефіцієнти, які можуть бути функціями параметрів стану. Співвідношення (23) загалом є нелінійні. Результатом їхньої лінеаризації є

$$\mathbf{J}_q = -\frac{\mathcal{L}_{11}}{T_0}\nabla T + \mathcal{L}_{12}\mathbf{E} + \mathcal{L}_{13}\left(\mathbf{E}^i - d_E\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial t^2}\right) - \mathcal{L}_{14}\left[\left(\nabla\mu'_\pi\right)^i + d_m\frac{\partial^2\boldsymbol{\pi}_m}{\partial t^2}\right],$$

$$\mathbf{J}_e = -\frac{\mathcal{L}_{21}}{T_0}\nabla T + \mathcal{L}_{22}\mathbf{E} + \mathcal{L}_{23}\left(\mathbf{E}^i - d_E\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial t^2}\right) - \mathcal{L}_{24}\left[\left(\nabla\mu'_\pi\right)^i + d_m\frac{\partial^2\boldsymbol{\pi}_m}{\partial t^2}\right],$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -\frac{\mathcal{L}_{31}}{T_0}\nabla T + \mathcal{L}_{32}\mathbf{E} + \mathcal{L}_{33}\left(\mathbf{E}^i - d_E \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2}\right) - \mathcal{L}_{34}\left[\left(\nabla \mu'_\pi\right)^i + d_m \frac{\partial^2 \boldsymbol{\pi}_m}{\partial t^2}\right],$$

$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{\pi}_m}{\partial t} = -\frac{\mathcal{L}_{41}}{T_0}\nabla T + \mathcal{L}_{42}\mathbf{E} + \mathcal{L}_{43}\left(\mathbf{E}^i - d_E \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2}\right) - \mathcal{L}_{44}\left[\left(\nabla \mu'_\pi\right)^i + d_m \frac{\partial^2 \boldsymbol{\pi}_m}{\partial t^2}\right]. \quad (24)$$

Тут враховано, що у лінійному наближенні $\mathbf{E}_* = \mathbf{E}$, $\frac{d\ldots}{dt} = \frac{\partial\ldots}{\partial t}$, а коефіцієнти $\mathcal{L}_{ij} = \mathcal{L}_{ji} = L_{ij}/T_0$ $\left(i,j = \overline{1,4}\right)$ — сталі величини.

Якщо тепер із рівнянь стану (21), (22) й кінетичних рівнянь (24) за врахування подання (9) виключити з розгляду необоротні $\mathbf{E}^i$, $\left(\nabla \mu'_\pi\right)^i$ та оборотні $\mathbf{E}^r$, $\left(\nabla \mu'_\pi\right)^r$ складники векторів $\mathbf{E}$, $\nabla \mu'_\pi$, то у підсумку одержимо реологічні визначальні співвідношення

$$\mathbf{J}_q = -\mathfrak{L}_1^T \nabla T + \mathfrak{L}_1^E \mathbf{E} + \mathfrak{L}_1^\mu \nabla \mu'_\pi + \mathfrak{L}_1^p \mathbf{p} - d_E \mathfrak{L}_1^d \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} + \mathfrak{L}_1^\pi \boldsymbol{\pi}_m + d_m \mathfrak{L}_1^\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{\pi}_m}{\partial t^2}, \quad (25)$$

$$\mathbf{J}_e = -\mathfrak{L}_2^T \nabla T + \mathfrak{L}_2^E \mathbf{E} + \mathfrak{L}_2^\mu \nabla \mu'_\pi + \mathfrak{L}_2^p \mathbf{p} - d_E \mathfrak{L}_2^d \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} + \mathfrak{L}_2^\pi \boldsymbol{\pi}_m + d_m \mathfrak{L}_2^\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{\pi}_m}{\partial t^2}, \quad (26)$$

$$d_E \mathfrak{L}_3^d \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} - \mathfrak{L}_3^p \mathbf{p} = -\mathfrak{L}_3^T \nabla T + \mathfrak{L}_3^E \mathbf{E} + \mathfrak{L}_3^\mu \nabla \mu'_\pi + \mathfrak{L}_3^\pi \boldsymbol{\pi}_m + d_m \mathfrak{L}_3^\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{\pi}_m}{\partial t^2}, \quad (27)$$

$$-d_m \mathfrak{L}_4^\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{\pi}_m}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{\pi}_m}{\partial t} - \mathfrak{L}_4^\pi \boldsymbol{\pi}_m = -\mathfrak{L}_4^T \nabla T + \mathfrak{L}_4^E \mathbf{E} + \mathfrak{L}_4^\mu \nabla \mu'_\pi + \mathfrak{L}_4^p \mathbf{p} - d_E \mathfrak{L}_4^d \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2}. \quad (28)$$

Тут $\mathfrak{L}_i^T = \frac{\mathcal{L}_{i1}}{T_0}$, $\mathfrak{L}_i^E = \mathcal{L}_{i2} + \mathcal{L}_{i3}$, $\mathfrak{L}_i^\mu = -\mathcal{L}_{i4}$, $\mathfrak{L}_i^d = \mathcal{L}_{i3}$, $\mathfrak{L}_i^p = \frac{\mathcal{L}_{i4}\chi_{Em} - \mathcal{L}_{i3}\chi_m}{\chi_E \chi_m - \chi_{Em}^2}$, $\mathfrak{L}_i^\pi = \frac{\mathcal{L}_{i3}\chi_{Em} - \mathcal{L}_{i4}\chi_E}{\chi_E \chi_m - \chi_{Em}^2}$, $i = \overline{1,4}$.

Якщо у розгляд ввести такі оператори

$$\mathsf{L}_{i\mathsf{p}} = \mathfrak{L}_i^p - d_E \mathfrak{L}_i^d \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \mathsf{L}_{i\pi} = \mathfrak{L}_i^\pi + d_m \mathfrak{L}_i^\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad i = \overline{1,\, 4},$$

$$\mathsf{L} = \left(\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} - \mathsf{L}_{4\pi}\right)\left(\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} - \mathsf{L}_{3\mathsf{p}}\right) - \mathsf{L}_{4\mathsf{p}}\mathsf{L}_{3\pi},$$

$$\underline{\mathsf{L}}_{j\alpha} = \mathfrak{L}_j^\alpha \mathsf{L} + \mathsf{L}_{j\mathsf{p}}\underline{\mathsf{L}}_{3\alpha} + \mathsf{L}_{j\pi}\underline{\mathsf{L}}_{4\alpha}, \quad j = 1,\, 2,$$

$$\underline{\mathsf{L}}_{3\alpha} = \mathcal{L}_4^\alpha \mathsf{L}_{3\pi} + \mathcal{L}_3^\alpha \left(\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} - \mathsf{L}_{4\pi}\right), \ \underline{\mathsf{L}}_{4\alpha} = \mathcal{L}_3^\alpha \mathsf{L}_{4\mathsf{p}} + \mathcal{L}_4^\alpha \left(\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} - \mathsf{L}_{3\mathsf{p}}\right), \ \alpha = \left\{\mathsf{T}, \mathsf{E}, \mu\right\},$$

то співвідношенням (25)-(28) можна надати вигляду

$$\mathsf{L}\left(\mathbf{J}_q\right) = -\underline{\underline{\mathsf{L}}}_{1\mathsf{T}}\left(\nabla T\right) + \underline{\underline{\mathsf{L}}}_{1\mathsf{E}}\left(\mathbf{E}\right) + \underline{\underline{\mathsf{L}}}_{1\mu}\left(\nabla\mu'_\pi\right), \tag{29}$$

$$\mathsf{L}\left(\mathbf{J}_e\right) = -\underline{\underline{\mathsf{L}}}_{2\mathsf{T}}\left(\nabla T\right) + \underline{\underline{\mathsf{L}}}_{2\mathsf{E}}\left(\mathbf{E}\right) + \underline{\underline{\mathsf{L}}}_{2\mu}\left(\nabla\mu'_\pi\right), \tag{30}$$

$$\mathsf{L}\left(\mathbf{p}\right) = -\underline{\underline{\mathsf{L}}}_{3\mathsf{T}}\left(\nabla T\right) + \underline{\underline{\mathsf{L}}}_{3\mathsf{E}}\left(\mathbf{E}\right) + \underline{\underline{\mathsf{L}}}_{3\mu}\left(\nabla\mu'_\pi\right), \tag{31}$$

$$\mathsf{L}\left(\boldsymbol{\pi}_m\right) = -\underline{\underline{\mathsf{L}}}_{4\mathsf{T}}\left(\nabla T\right) + \underline{\underline{\mathsf{L}}}_{4\mathsf{E}}\left(\mathbf{E}\right) + \underline{\underline{\mathsf{L}}}_{4\mu}\left(\nabla\mu'_\pi\right). \tag{32}$$

Раніше [20, 21] під час формування системи співвідношень локально градієнтної електромагнітотермомеханіки, у якій процеси локального зміщення маси та поляризації вважали оборотними та нехтували їх інерцією, для векторів поляризації, локального зміщення маси, потоку тепла та густини електричного струму були отримані такі формули

$$\mathbf{p} = \chi_E\mathbf{E} - \chi_{Em}\nabla\mu'_\pi\,, \quad \boldsymbol{\pi}_m = -\chi_m\nabla\mu'_\pi + \chi_{Em}\mathbf{E}\,, \tag{33}$$

$$\mathbf{J}_q = -\lambda\nabla T + \pi_t\mathbf{J}_e\,, \qquad \mathbf{J}_e = \sigma_e\mathbf{E} + \sigma_e\eta\nabla T\,. \tag{34}$$

Порівнюючи співвідношення (29), (30) та (34), бачимо, що наслідком врахування необоротності та інерції процесів стала залежність векторів потоку тепла $\mathbf{J}_q$ та струму $\mathbf{J}_e$ від градієнта потенціалу μ'_π та історій зміни величин ∇T, $\mathbf{E}$ та $\nabla\mu'_\pi$. Відзначимо, що поява у рівняннях (25)-(28) доданків, пропорційних другій похідній по часу від векторів поляризації та локального зміщення маси, — наслідок врахування інерції процесів поляризації й локального зміщення маси. Співставляючи формули (33) та визначальні співвідношення (31), (32), бачимо також, що врахування необоротності процесів привело до реологічних визначальних співвідношень для питомих векторів поляризації та локального зміщення маси, які до того ж додатково містять не лише похідні по часу від цих векторів, а й градієнт температури ∇T. Співвідношення (31) дозволяє стверджувати, що тепер причиною поляризації тіла буде не лише напруженість електричного поля й градієнт величини μ'_π, як в (33_1) , а й градієнт температури та зміна згаданих величин (∇T, $\mathbf{E}$ та $\nabla\mu'_\pi$) з часом. Тому слід очікувати, що реологічне співвідношення (31) буде описувати як приповерхневу поляризацію, (градієнт величини μ'_π може бути значним у приповерхневих областях [21]), так і термополяризаційний ефект.

Повна система співвідношень нелокальної моделі градієнтного типу для опису взаємозв'язаних електромагнітотермомеханічних процесів в ізотропних неферомагнітних діелектричних тілах з урахуванням інерційності та необоротності процесів поляризації та локального зміщення маси включатиме: рівняння балансу механічного імпульсу (11), маси (3) й ентропії (4), співвідношення (6), рівняння Максвелла [27, 29]

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0\,, \quad \nabla\cdot\left(\varepsilon_0\mathbf{E} + \rho_0\mathbf{p}\right) = \rho_e\,, \quad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\,, \quad \nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}_e + \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial t}\,,$$

визначальні рівняння (7), (18)-(20), (29)-(32) та геометричні співвідношення (13).

4. Врахування локального поля

Класична теорія діелектриків Фойхта оперує з поняттям макроскопічної (середньої) напруженості електричного поля [30, 31]. Однак, у діелектричних тілах на молекулу (кристал) окрім середнього макроскопічного поля діють також поля сусідніх молекул (кристалів). Наслідком цього є відмінність між макроскопічним та локальним полем у діелектричних середовищах. Таку відмінність враховує нелінійна теорія діелектриків Тупіна [31, 32].

Врахуємо відмінність між локальними та макроскопічними полями у рамках запропонованого тут опису. Для отримання відповідних співвідношень моделі повернемося до рівняння балансу внутрішньої енергії (10).

Приймемо тепер, що локальний термодинамічний стан тіла визначають не середні рівноважні поля $\mathbf{E}_*^r$ та $\left(\nabla\mu'_\pi\right)^r$, а їх локальні значення $\mathbf{E}^L$ та $\left(\nabla\mu'_\pi\right)^L$, які загалом відрізняються від середніх значень. Відтак, рівняння балансу внутрішньої енергії (10) запишемо так

$$\begin{aligned}\rho\frac{du}{dt}=&\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*:\left(\nabla\otimes\mathbf{v}\right)+\rho T\frac{ds}{dt}+\rho\mathbf{E}^L\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}+\rho\mu'_\pi\frac{d\rho_m}{dt}-\rho\left(\nabla\mu'_\pi\right)^L\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}+\\&+\rho\left(\mathbf{E}_*^r-\mathbf{E}^L-d_E\frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2}\right)\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}+\rho\left(\left(\nabla\mu'_\pi\right)^L-\left(\nabla\mu'_\pi\right)^r-d_m\frac{d^2\boldsymbol{\pi}_m}{dt^2}\right)\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}+\\&+\mathbf{J}_{e*}\cdot\mathbf{E}_*-\mathbf{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T}+\rho\mathbf{E}_*^i\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}-\rho\left(\nabla\mu'_\pi\right)^i\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}-T\sigma_s+\\&+\mathbf{v}\cdot\left[-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*+\rho\mathbf{F}_*+\mathbf{F}_e\right].\end{aligned}\qquad(35)$$

Тепер узагальнену вільну енергію Гельмгольца означимо співвідношенням $f=u-Ts-\mathbf{E}^L\cdot\mathbf{p}+\left(\nabla\mu'_\pi\right)^L\cdot\boldsymbol{\pi}_m$. Для таким чином означеної вільної енергії f на основі (35) отримаємо

$$\begin{aligned}\rho\frac{df}{dt}=&\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*:\left(\nabla\otimes\mathbf{v}\right)-\rho s\frac{dT}{dt}-\rho\mathbf{p}\cdot\frac{d\mathbf{E}^L}{dt}+\rho\mu'_\pi\frac{d\rho_m}{dt}+\rho\boldsymbol{\pi}_m\cdot\frac{d\left(\nabla\mu'_\pi\right)^L}{dt}+\\&+\rho\left(\mathbf{E}_*^r-\mathbf{E}^L-d_E\frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2}\right)\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}+\rho\left(\left(\nabla\mu'_\pi\right)^L-\left(\nabla\mu'_\pi\right)^r-d_m\frac{d^2\boldsymbol{\pi}_m}{dt^2}\right)\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}+\\&+\mathbf{J}_{e*}\cdot\mathbf{E}_*-\mathbf{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T}+\rho\mathbf{E}_*^i\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}-\rho\left(\nabla\mu'_\pi\right)^i\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}-T\sigma_s+\\&+\mathbf{v}\cdot\left[-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*+\rho\mathbf{F}_*+\mathbf{F}_e\right].\end{aligned}\qquad(36)$$

Далі, діючи за стандартною схемою, з умови інваріантності рівняння (36) відносно просторових трансляцій та поворотів знову ж таки отримуємо рівняння балансу імпульсу (11), симетрію узагальненого тензора напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*$ й рівняння балансу вільної енергії

$$\rho\frac{df}{dt}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*:\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}}{dt}-\rho s\frac{dT}{dt}-\rho\mathbf{p}\cdot\frac{d\mathbf{E}^L}{dt}+\rho\mu'_\pi\frac{d\rho_m}{dt}+\rho\boldsymbol{\pi}_m\cdot\frac{d\left(\nabla\mu'_\pi\right)^L}{dt}+$$
$$+\rho\left(\mathbf{E}_*^r-\mathbf{E}^L-d_E\frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2}\right)\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}+\rho\left(\left(\nabla\mu'_\pi\right)^L-\left(\nabla\mu'_\pi\right)^r-d_m\frac{d^2\boldsymbol{\pi}_m}{dt^2}\right)\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}+$$
$$+\mathbf{J}_{e*}\cdot\mathbf{E}_*-\mathbf{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T}+\rho\mathbf{E}_*^i\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}-\rho\left(\nabla\mu'_\pi\right)^i\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}-T\sigma_s\,. \qquad (37)$$

З огляду на те, що доданки, записані в останніх двох стрічках формули (37), не залежать від швидкостей $\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}}{dt}$, $\frac{dT}{dt}$, $\frac{d\mathbf{E}^L}{dt}$, $\frac{d\rho_m}{dt}$ та $\frac{d\left(\nabla\mu'_\pi\right)^L}{dt}$, одержуємо узагальнене рівняння Гіббса

$$df=\frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*:d\hat{\boldsymbol{e}}-sdT-\mathbf{p}\cdot d\mathbf{E}^L+\mu'_\pi d\rho_m+\boldsymbol{\pi}_m\cdot d\left(\nabla\mu'_\pi\right)^L, \qquad (38)$$

вираз для виробництва ентропії

$$\sigma_s=-\mathbf{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T^2}+\mathbf{J}_{e*}\cdot\frac{\mathbf{E}_*}{T}+\rho\frac{d\mathbf{p}}{dt}\cdot\frac{\mathbf{E}_*^i}{T}-\rho\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}\cdot\frac{\left(\nabla\mu'_\pi\right)^i}{T} \qquad (39)$$

та диференціальні співвідношення

$$\mathbf{E}_*^r-\mathbf{E}^L=d_E\frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2},\quad \left(\nabla\mu'_\pi\right)^L-\left(\nabla\mu'_\pi\right)^r=d_m\frac{d^2\boldsymbol{\pi}_m}{dt^2}, \qquad (40)$$

які пов’язують питомий вектор поляризації $\mathbf{p}$ з векторами напруженості локального електричного поля $\mathbf{E}^L$ та оборотним складником $\mathbf{E}_*^r$ напруженості макроскопічного електричного поля $\mathbf{E}_*$, а також питомий вектор локального зміщення маси $\boldsymbol{\pi}_m$ з локальним значенням просторового градієнта $\left(\nabla\mu'_\pi\right)^L$ та оборотним $\left(\nabla\mu'_\pi\right)^r$ складником величини $\nabla\mu'_\pi$.

Зауважимо, що під час отримання формул (40) враховано, що доданки $\rho\left(\mathbf{E}_*^r-\mathbf{E}^L-d_E\frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2}\right)\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ та $\rho\left[\left(\nabla\mu'_\pi\right)^L-\left(\nabla\mu'_\pi\right)^r-d_m\frac{d^2\boldsymbol{\pi}_m}{dt^2}\right]\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}$, які містять рівноважні значення величин $\mathbf{E}_*^r$, $\mathbf{E}^L$, $\left(\nabla\mu'_\pi\right)^r$, $\left(\nabla\mu'_\pi\right)^L$, не можуть входити у вираз для виробництва ентропії.

Зазначимо також, що перше співвідношення із системи (40) співпадає з, так званим, «рівнянням балансу міжмолекулярних сил» («*equation of intramolecular force balance*»), отриманим Моженом за врахування інерції процесу поляризації [27].

Тепер основою для формулювання визначальних співвідношень моделі є рівняння Гіббса (38), співвідношення (40) та вираз для виробництва ентропії (39). За врахування локального поля у рівняння Гіббса входить не оборотний складник напруженості макроскопічного електричного поля (як в (14)), а вектор напруженості локального поля. Це привнесе відповідні зміни під час запису рівнянь стану. Із виразу для виробництва ентропії (39) також бачимо, що тепер термодинамічні потоки $\mathbf{j}_1 = \mathbf{J}_q$, $\mathbf{j}_2 = \mathbf{J}_{e*}$, $\mathbf{j}_3 = \rho \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ та $\mathbf{j}_4 = \rho \frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}$ спричиняються такими термодинамічними силами $\mathbf{X}_1 = -\frac{\nabla T}{T^2}$, $\mathbf{X}_2 = \frac{\mathbf{E}_*}{T}$, $\mathbf{X}_3 = \frac{\mathbf{E}_*^i}{T}$ та $\mathbf{X}_4 = -\frac{\left(\nabla \mu'_\pi\right)^i}{T}$. Наслідком цього будуть видозмінені кінетичні співвідношення. Однак, незважаючи на такі відмінності під час формулювання рівнянь стану та кінетичних співвідношень, з урахуванням диференціальних рівнянь (40) та (41) можна показати, що у підсумку ми прийдемо до таких же ж визначальних співвідношень (18)-(20), (29)-(32). Це дозволяє стверджувати, що незалежно від вибору параметру стану — чи то оборотного складника вектора напруженості макроскопічного електричного поля, чи вектора напруженості локального поля, у підсумку прийдемо до ідентичних визначальних рівнянь, а відтак — до ідентичних ключових систем.

Висновки. Отримано повну систему співвідношень нелокальної моделі градієтного типу для опису взаємозв'язаних електромагнітотермомеханічних процесів в ізотропних неферомагнітних діелектричних тілах з урахуванням інерції та необоротності процесів поляризації та локального зміщення маси.

Показано, що врахування необоротності та інерційності процесів привело до реологічних визначальних співвідношень для питомих векторів поляризації та локального зміщення маси, які окрім похідних по часу від цих векторів додатково містять градієнт температури. Тому слід очікувати, що одержані тут реологічні визначальні співвідношення будуть описувати і приповерхневу поляризацію, і термополяризаційний ефект.

Література

[1] *Eringen, A. C.* On nonlocal elasticity / A. C. Eringen, D. G. B. Edelen // Int. J. Engng. Sci. — 1972. — Vol. 10, Issue 3. — P. 233-248.

[2] *Аэро, Е. Л.* Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц / *Е. Л. Аэро, Е. В. Кувшинский* // Физика твердого тела. — 1960. — Т. 2, вып. 7. — С. 1399-1409.

[3] *Grioli, G.* Elasticita assimmetrica / *G. Grioli* // Ann. di Mat. pura ed appl. Ser. IV. — 1960. — Vol. 50. — P. 1399-1409.

[4] *Mindlin, R. D.* Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity / *R. D. Mindlin* // Int. J. Solids and Struct. — 1965. — Vol. 1. — P. 417-438.

[5] *Машкевич, В. С.* Электрические, оптические и упругие свойства кристаллов типа алмаза. I / *В. С. Машкевич, К. Б. Толпыго* // Журнал эксперим. и техн. физики. — 1957. — Т. 32, вып. 3. — С. 520-525.

[6] *Коган, Ш. М.* Пьезоэлектрический эффект при неоднородной деформации и акустическое рассеяние носителей тока в кристаллах / *Ш. М. Коган* // Физика твердого тела. — 1963. — Т. 5, № 10. — С. 2829-2831.

[7] *Tagancev, A. K.* Piezoelectricity and flexoelectricity in crystalline dielectrics / *A. K. Tagancev* // Phys. Rev. B. — 1986. — Vol. 34. — P. 5883-5889.

[8] *Eringen, A. C.* Theory of nonlocal piezoelectricity / *A. C. Eringen* // J. Math. Phys. — 1984. — Vol. 25, No 3. — P. 717-727.

[9] *Eringen, A. C.* Electrodynamics of continua. Vol. 1. Foundations and solid media / *A. C. Eringen, G. A. Maugin*. — New York: Springer-Verlag, 1990. — 453 p.

[10] *Mindlin, R. D.* Polarization gradient in elastic dielectrics / *R. D. Mindlin* // Int. J. Solids and Struct. — 1968. — Vol. 4. — P. 637-642.

[11] *Mindlin, R. D.* Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics / *R. D. Mindlin* // J. Elast. — 1972. — Vol. 2, No 4. — P. 217-282.

[12] *Kafadar, C. B.* Theory of multipoles in classical electromagnetism / *C. B. Kafadar* // Int. J. Engng. Sci. — 1971. — Vol. 9. — P. 831-853.

[13] *Maugin, G. A.* Nonlocal theories or gradient-type theories: A matter of convenience? */ G. A. Maugin* // Arch. Mech. — 1979. — Vol. 31. — P. 15-26.

[14] *Maugin, G. A.* The principle of virtual power: application to coupled fields / *G. A. Maugin* // Acta Mech. — 1980. — Vol. 35. — P. 1-80.

[15] *Бурак, Я. Й.* Визначальні співвідношення локально-градієнтної термомеханіки / *Я. Й. Бурак* // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1987. — № 12. — С. 19-23.

[16] *Бурак, Я. Й.* Теоретичні основи розрахунку локально-градієнтних термомеханічних систем з врахуванням поверхневих явищ / *Я. Й. Бурак, Т. С. Нагірний* // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 1993, № 4. — С. 24-30.

[17] *Грицина, О.* Локально градієнтний підхід у термомеханіці / *О. Грицина, Т. Нагірний, К. Червінка* // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. — 2006. — Вип. 3. — С. 72-83.

[18] *Бурак, Я. Й.* Термодинамічне моделювання локально-градієнтних термопружних систем з врахуванням інерційності пружних зміщень / *Я. Й. Бурак, Ю. І. Говда, Т. С. Нагірний* // Доп. НАН України. — 1996. — № 2. — С. 39-43.

[19] *Бурак, Я. Й.* Математичне моделювання механотермодифузійних процесів у твердих розчинах при врахуванні локального зміщення маси / *Я. Й. Бурак, В. Ф. Кондрат, О. Р. Грицина* // Доп. НАН України. — 2007. — № 3. — С. 59-64.

[20] *Кондрат, В.* Рівняння електромагнітотермомеханіки поляризовних неферомагнітних тіл за врахування локального зміщення маси / *В. Кондрат, О. Грицина* // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. — 2008. — Вип. 8. — С. 69-83.

[21] *Burak, Ya.* An introduction of the local displacements of mass and electric charge phenomena into the model of the mechanics of polarized electromagnetic solids / *Ya. Burak, V. Kondrat, O. Hrytsyna* // J. Mech. Mat. and Struct. — 2008. — Vol. 3, No 6. — P. 1037-1046.

[22] On electromechanical phenomena in thin dielectric films / *Ye. Chapla, S. Kondrat, O. Hrytsyna, V. Kondrat* // Task Quarterly. — 2009. — Vol. 13, No 1. — P. 1001-1010.

[23] *Кондрат, В.* Моделювання електромагнетотермомеханічних процесів у в'язкій електропровідній поляризовній рідині з урахуванням необоротності локальних зміщень маси та електричного заряду / *В. Кондрат*, *О. Грицина* // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. — 2007.— Вип. 5. — С. 42-54.

[24] *Kondrat, V.* Mechanical and electromagnetic wave interaction in linear isotropic dielectrics with local mass displacement and polarization inertia / *V. Kondrat, O. Hrytsyna* // Vibrations in Physical Systems. Vol. XXIV. Ed. by *C. Cempel, M. W. Dobry*. — Poznan 2010. — P. 227-232.

[25] *Кондрат В.* Дисперсія механоелектромагнітних хвиль у локально градієнтному діелектрику за врахування інерції поляризації / *В. Кондрат*, *О. Грицина* // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. — 2010. — Вип. 11. — С. 81-90.

[26] *Maugin, G. A.* Deformable dielectrics II. Voigt's intramolecular force balance in elastic dielectrics / *G. A. Maugin* // Arch. Mech. — 1977. — Vol. 29. — P. 143-151.

[27] *Можен, Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред / *Ж. Можен*. — Москва: Мир, 1991. — 560 с.

[28] *Корн, Г.* Справочник по математике / *Г. Корн, Т. Корн.* — Москва: Наука, 1974. — 831 с.
[29] *Бредов, М. М.* Классическая электродинамика / *М. М. Бредов, В. В. Румянцев, И. Н. Топтыгин.* — Москва: Наука, 1985. — 400 с.
[30] *Voigt, W.* Lehrbuch der Kristall-Physik / *W. Voigt.* — Leipzig: Teubner, 1910. — 739 S.
[31] *Новацкий, В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах / *В. Новацкий.* — Москва: Мир, 1984. — 159 с.
[32] *Toupin, R. A.* The elastic dielectric / *R. A. Toupin* // Arch. Ration. Mech. Analysis. — 1956. — Vol. 5. — P. 849-915.

Dynamic equations of local gradient electro-magneto-thermomechanics of dielectrics

Olha Hrytsyna

A complete system of equations of the local gradient theory which describes the coupled electro-magneto-thermomechanical processes in isotropic nonferromagnetic dielectrics is obtained with account of polarization inertia and irreversibility of the processes of local mass displacement and polarization. It is shown that the rheological constitutive relations for specific vectors of the local mass displacement and polarization are the result of processes irreversibility and inertia accounting. The influence of the temperature gradient and the potential μ'_π *gradient on polarization vector allows us to describe the near-surface polarization and thermopolarization effect. Here potential* μ'_π *is the energy measure of the effect of mass displacement on the internal energy.*

Динамические соотношения локально градиентной электромагнитотермомеханики диэлектриков

Ольга Грицина

Получена полная система соотношений локально градиентной теории, описывающей взаимосвязанные электромагнитотермомеханические процессы в изотропных неферромагнитных диэлектрических телах с учетом инерции и необратимости процессов поляризации и локального смещения массы. Показано, что следствием учета необратимости и инерции процессов являются реологические определяющие соотношения для векторов поляризации и локального смещения массы. Зависимость вектора поляризации от градиента температуры и потенциала μ'_π*, учитывающего влияние локального смещения массы на внутреннюю энергию, позволит описать приповерхностную поляризацию и термополяризационный эффект.*

Отримано 11.01.11