

Апроксимація математичних макромоделей електронних пристроїв

Ярослав Матвійчук¹, Петро Малачівський²

¹ д. т. н., професор, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, e-mail: matv@ua.fm

² д. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, e-mail: psmal@cmm.lviv.ua

Розглянуто задачу математичного макромодельовання електронних пристроїв. Подані результати макромодельовання з використанням апроксимацій за методом найменших квадратів і чебишовського наближення для частотного детектора, мультівібратора й автогенератора. Обґрунтовано доцільність застосування методу найменших квадратів для відтворення вихідних сигналів макромоделей нелінійних електронних пристроїв.

Ключові слова: макромодельовання, метод найменших квадратів, чебишовське наближення.

Вступ. Макромоделями називаємо математичні моделі пристроїв і систем, які простіші за оригінал, але достатньо точно відтворюють суттєві зовнішні особливості поведінки модельованих об'єктів. У загальному випадку математична макромодель — це оператор (функціонал), що пов'язує вхідні, вихідні та внутрішні змінні

$$\Phi(\bar{u}(t), \bar{y}(t), \bar{x}(t); \bar{p}) = 0, \quad (1)$$

де $\bar{u} = (u_1, \dots, u_r)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_s)$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — вектори вхідних, вихідних і внутрішніх величин відповідно, а $\bar{p} = (p_1, \dots, p_N)$ — вектор параметрів оператора.

Ідентифікація математичної моделі системи полягає у визначенні за заданою структурою оператора (1) і відомими векторами $\bar{u}(t)$ і $\bar{y}(t)$ для $t \in [t_0, t_1]$ такого вектора \bar{p} , який забезпечує досягнення найменшого відхилення

$$\min_{\bar{p}} \|\bar{y}(t) - \tilde{y}(t; \bar{p})\| \quad \text{для } t \in [t_0, t_1], \quad (2)$$

де $\tilde{y}(t; \bar{p})$ — розв'язок рівняння (1) для заданого \bar{p} .

Вектори $\bar{u}(t)$ й $\bar{y}(t)$ здебільшого задають на дискретній множині значень $\{t_k\}$, $k = \overline{1, M}$. У цьому випадку задача ідентифікації (2) полягає в знаходженні вектора \bar{p} з умови

$$\min_{\bar{p}} \|\bar{y}(t_k) - \tilde{y}(t_k; \bar{p})\|, \quad k = \overline{1, M}. \quad (3)$$

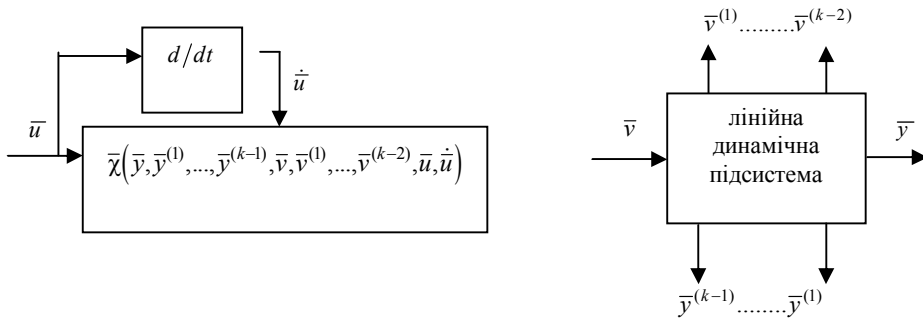


Рис. 1. Загальна структура макромоделей нелінійних динамічних систем

Розв’язок цієї оптимізаційної задачі можна визначити за методом найменших квадратів

$$\min_{\bar{p}} \sum_{k=1}^M (\bar{y}(t_k) - \tilde{y}(t_k; \bar{p}))^2 \quad (4)$$

або з використанням чебишовського наближення

$$\min_{\bar{p}} \max_{k=1, M} |\bar{y}(t_k) - \tilde{y}(t_k; \bar{p})|. \quad (5)$$

Отже, задача макромодельовання електронних пристроїв полягає у виборі структури оператора (1) та ідентифікації параметрів обраної структури за заданими множинами значень $\{\bar{u}(t_k)\}$ і $\{\bar{y}(t_k)\}$, $k = \overline{1, M}$. У роботі [1] показано, що загальну структуру макромоделей динамічних систем можна зобразити у вигляді схеми (див. рис. 1).

Ідентифікація лінійної динамічної підсистеми порівняно нескладна. В цьому випадку задача макромодельовання зводиться, здебільшого, до апроксимації нелінійної функції $\chi(\cdot)$ від декількох аргументів. Для такої апроксимації найчастіше використовують поліноми від багатьох змінних

$$v = \chi(\xi) \approx \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r \dots \sum_{k=0}^r c_{ij\dots k} \xi_1^i \xi_2^j \dots \xi_n^k, \quad i + j + \dots + k \leq r. \quad (6)$$

Таким чином, розв’язок задачі ідентифікації макромоделі полягає в побудові апроксимації (6) за експериментальними даними.

У роботі [1] подано результати макромодельовання з використанням методу найменших квадратів і чебишовського наближення для частотного детектора. У цій статті дано аналіз цих результатів і здійснено порівняльну ідентифікацію макромоделей ще двох електронних пристроїв.

1. Макромодельовання частотного детектора

Схему частотного детектора з деякими коментарями в системі MicroCap7 зображено на рис. 2.

Вхідний фазомодульований сигнал $v(1) = u$ — це джерело напруги між вузлами 1 і базовим. Вихідний сигнал частотного детектора — це напруга на ємності C2: $v(C2) = y_2$. Похідна вихідного сигналу пропорційна струму через ємність C2: $i(C2)/C2 = dy_2/dt$. Числові масиви відліків вхідного та вихідного сигналів детектора та їхніх похідних передаємо в програму-MATLAB, із допомогою якої визначаємо коефіцієнти апроксимації задачі (6).

Макромодель частотного детектора описує система рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= k_t y_3, & \frac{dy_3}{dt} &= k_t (A_1 u + A_2 y_1 + A_3 y_3), \\ \frac{du}{dt} &= k_t u, & \frac{dy_3}{dt} &= k_t f(u, y_1, y_2, y_3). \end{aligned} \quad (7)$$

Детальне пояснення макромоделі (7) дано в роботі [1]. Вкажемо лише, що відповідно до загальної структури на рис. 1 перші два рівняння описують лінійну підсистему другого порядку, а четверте — нелінійну поліноміальну функцію від чотирьох аргументів. Коефіцієнт $k_t = 0,159 \cdot 10^{-6}$ — це нормуючий множник, що спрощує числову ідентифікацію макромоделі. Визначені параметри лінійної підсистеми дорівнюють: $A_1 = -1,596 \cdot 10^{-4}$; $A_2 = -0,7233$; $A_3 = -0,235$.

Для апроксимації похідної вихідного сигналу макромоделі dy_2/dt використано поліноми другого та третього степеня від змінних u , y_1 , y_2 й y_3 . Коефіцієнти поліномів визначали за 1429 відліками сигналів схеми, зображеної на рис. 2, з використанням методу найменших квадратів і чебишовського наближення засобами MATLAB-6.5. Зокрема, для визначення чебишовського наближення використали функцію MATLAB — `fminimax`.

Отримані за методом найменших квадратів коефіцієнти полінома другого степеня мають такі значення: $-1,6950 \cdot 10^{-2}$; $7,2999 \cdot 10^{-3}$; $-1,6242 \cdot 10^{-2}$; $7,6565 \cdot 10^{-3}$; $1,3266$; $-3 \cdot 10^{-4}$; $1,52550$; $2,5433 \cdot 10^{-2}$; $-6,4179 \cdot 10^{-1}$; $9,8475 \cdot 10^4$; $7,56100$; $2,6270 \cdot 10^4$; $-5,7121 \cdot 10^{-2}$; $3,89460$; $7,2603 \cdot 10^4$. Значення цих коефіцієнтів подано за зростанням степенів аргументів u_1 , y_1 , y_2 та y_3 відповідно до порядку поліноміальних функцій у системі MicroCap.

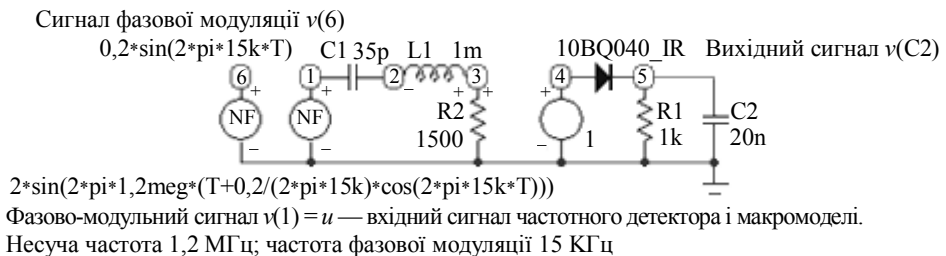


Рис. 2. Схема частотного детектора в MC7

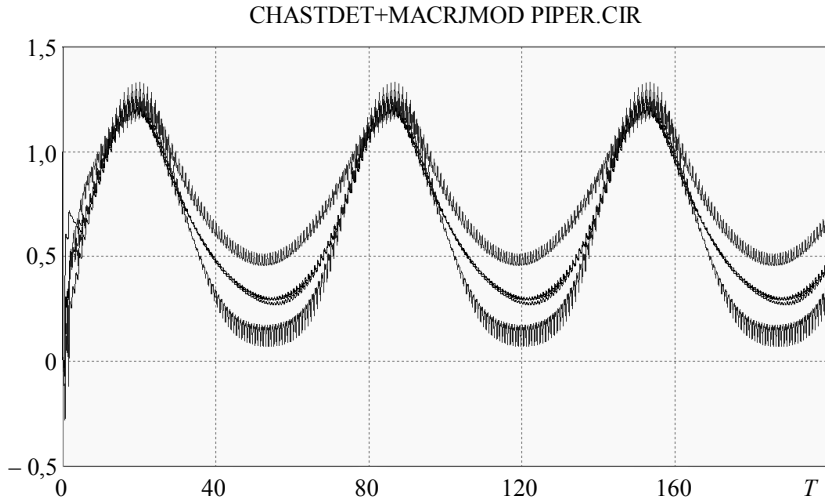


Рис. 3. Вихідний сигнал детектора та вихідні сигнали його макромоделей

Відповідні коефіцієнти полінома другого степеня, отримані з використанням чебишовського наближення, такі: $-1,5902 \cdot 10^{-3}$; $2,4518 \cdot 10^{-3}$; $-2,6485 \cdot 10^{-2}$; $-1,4398 \cdot 10^{-2}$; $1,2893 \cdot 10^{-2}$; $-4,9328 \cdot 10^{-3}$; $6,73860$; $5,4060 \cdot 10^{-2}$; $4,10160$; $1,1230 \cdot 10^{-5}$; $1,2689 \cdot 10^{-2}$; $3,7946 \cdot 10^{-4}$; $-5,5484 \cdot 10^{-2}$; $-2,77040$; $8,5809 \cdot 10^{-4}$.

Максимальні абсолютні похибки апроксимації похідної вихідного сигналу частотного детектора поліномами другого та третього степеня подані в табл. 1.

Графіки вихідного сигналу частотного детектора та його макромоделей, отриманих із використанням апроксимації нелінійної функції за методом найменших квадратів і чебишовського наближення поліномами другого та третього степеня від чотирьох аргументів, подані на рис. 3.

Вихідний сигнал макромоделі з використанням апроксимації за методом найменших квадратів поліномами другого та третього степеня практично співпадає з вихідним сигналом детектора (середні криві на рис. 3). Однак вихідні сигнали макромоделей із використанням чебишовського наближення поліномами другого та третього степенів помітно відрізняються від вихідного сигналу детектора (верхня та нижня криві на рис. 3), хоча похибка апроксимації сигналу dy_2/dt з використанням чебишовського наближення менша (табл. 1).

Таблиця 1

Максимальні абсолютні похибки апроксимації сигналу dy_2/dt

Степінь полінома	2	3
Метод найменших квадратів	0,1500	0,105
Чебишовське наближення	0,0815	0,062

Кращу якість відтворення вихідного сигналу макромоделлю з використанням апроксимації за методом найменших квадратів можна пояснити тим, що ця апроксимація забезпечує найменшу розбіжність означених інтегралів заданого й апроксимованого сигналів на відрізьку апроксимації [4]. Оскільки відповідно до рівнянь макромоделі (7) вихідний сигнал y_2 є результатом інтегрування апроксимованого сигналу dy_2/dt , то похибка його відтворення буде менша, порівняно з макромоделлю, яка використовує чебишовське наближення. Чебишовська апроксимація забезпечує досягнення найменшої можливої похибки відтворення сигналу dy_2/dt , а не інтеграла від нього [5]. Тому з метою подальшого відтворення вихідного сигналу частотного детектора застосування методу найменших квадратів для апроксимації сигналу dy_2/dt забезпечує кращі результати, порівняно з чебишовським наближенням.

2. Макромоделювання мультівібратора

Схему мультівібратора зображено на рис. 4. Вихідним сигналом схеми мультівібратора є напруга на ємності $C3$: $y = v(C3)$. Похідна вихідного сигналу пропорційна струму через цю ємність $\frac{dy}{dt} = \frac{i(C3)}{C3}$. Внутрішній сигнал макромоделі

$v = y + 0,135 \frac{dy}{dt}$. Для ідентифікації нелінійної функції макромоделі мультівібратора використані таблиці з 3 093 дискретних значень цих сигналів.

Математична макромодель мультівібратора

$$0,135 \frac{dy}{dt} + y = v, \quad 10^6 \frac{dv}{dt} - f(v) = y \quad (8)$$

складається з рівняння лінійної динамічної підсистеми першого порядку та рівняння неоднозначної нелінійної функції (друге рівняння макромоделі).

Математичну макромодель мультівібратора детально пояснено в роботі [1]. Зауважимо лише, що рівняння макромоделі є рівнянням другого порядку, тоді як рівняння схеми мультівібратора на рис. 4 — сьомого порядку [1].

Засобами MATLAB-6.5 знайдені апроксимації нелінійної функції $y = f(v)$ за методом найменших квадратів і чебишовським наближенням поліномом сьомого степеня від одного аргументу. У зв'язку з відсутністю стійких положень

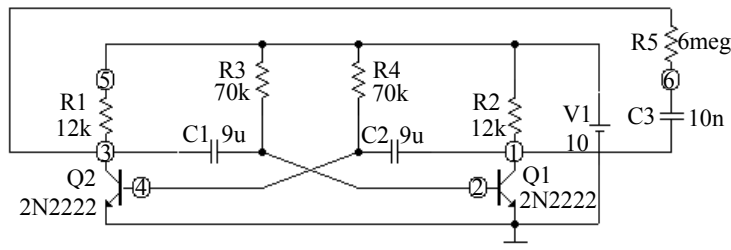


Рис. 4. Схема мультівібратора в MicroCap7

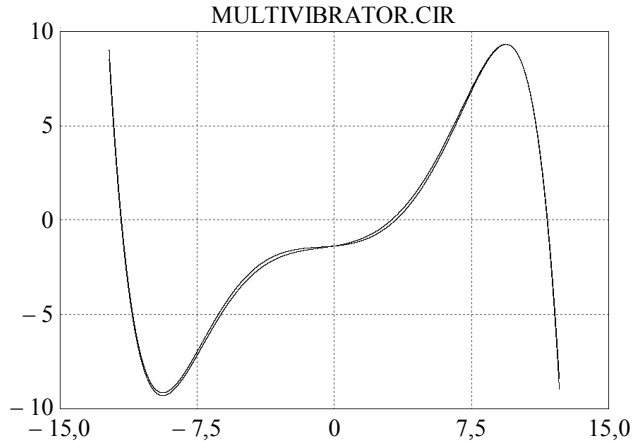


Рис. 5. Графіки нелінійної функції та її апроксимацій

рівноваги динамічної макромоделі пошук апроксимації проводили з додатковими умовами [1]. Коефіцієнти полінома, отриманого за методом найменших квадратів, мали такі значення: $-1,377$; $0,164230$; $0,040554$; $0,016600$; $-3,8658 \cdot 10^{-4}$; $9,5051 \cdot 10^{-6}$; $1,1853 \cdot 10^{-6}$; $-1,0345 \cdot 10^{-6}$, а за чебишовським наближенням — $-1,3793$; $0,091521$; $0,040016$; $0,01772$; $-3,5292 \cdot 10^{-4}$; $7,5137 \cdot 10^{-6}$; $0,983 \cdot 10^{-6}$; $-1,0619 \cdot 10^{-6}$.

Максимальна абсолютна похибка апроксимації за методом найменших квадратів дорівнює $2,0489$, а за чебишовським наближенням — $1,5312$.

Графіки нелінійної функції та її апроксимацій $y = f(v)$ подані на рис. 5. Графіки вихідних сигналів мультівібратора та його макромоделей, отриманих із використанням апроксимації за методом найменших квадратів і чебишовським наближенням, зображені на рис. 6.

Хоча відмінності в апроксимаціях на рис. 5 візуально майже непомітні,

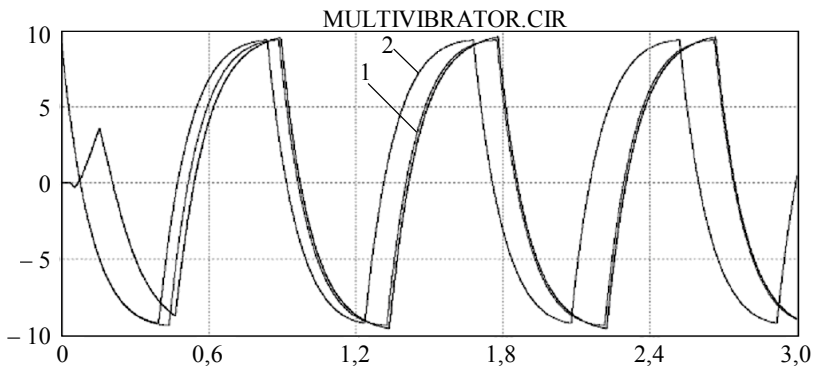


Рис. 6. Вихідні сигнали мультівібратора та його макромоделей
(крива 1 — за методом найменших квадратів,
крива 2 — за чебишовським наближенням)

проте вихідні сигнали макромоделей на рис. 6 доволі помітно відрізняються не на користь чебишовського наближення. Вихідні сигнали мультівібратора та макромоделі з використанням апроксимації за методом найменших квадратів майже співпадають, тоді як вихідний сигнал макромоделі, отриманої на основі чебишовського наближення, значно відрізняється.

Краще відтворення вихідного сигналу мультівібратора макромоделлю з використанням апроксимації сигналу v за методом найменших квадратів також пояснюється тим, що відповідно до першого рівняння системи (8) вихідний сигнал y визначаємо, інтегруючи v .

3. Макромодельовання автогенератора

Дещо складнішою є ідентифікація макромоделі одностранзисторного автогенератора, схему якого подано на рис. 7.

Вихідним сигналом у автогенератора є напруга у вузлі 5. Ця напруга двічі диференціюється RC-ланками. Кероване джерело напруги у вузлі 9 визначає змінну, значення якої потрібні для апроксимації внутрішнього сигналу макромоделі — v .

Макромодель автогенератора

$$\frac{dy}{dt} = dt, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\omega^2 y + \omega^2 v, \quad v = \sum_{i,j=0}^5 k_{i,j} y^i y_1^j, \quad i + j \leq 5, \quad (9)$$

складають рівняння лінійної консервативної підсистеми другого порядку та нелінійна поліноміальна функція п'ятого степеня від двох аргументів.

У праці [2] дано детальне пояснення рівнянь макромоделі (9). Єдиний параметр лінійної підсистеми $\omega = 2\pi/T$, де T — період коливань генератора (див. рис. 7). Зауважимо, що рівняння макромоделі другого порядку, тоді як рівняння схеми автогенератора, зображеного на рис. 7, — шостого [1].

Коефіцієнти полінома k_{ij} визначені за результатами апроксимації функції v з аргументами y та y_1 за методом найменших квадратів і за чебишовським наближенням. Отримати стійкі результати без регуляризації неможливо, тому застосовано регуляризацію за Тихоновим і метод редукції апроксимуючого полінома [3]. У результаті редукції від 21 коефіцієнта повного полінома залишено лише 8 суттєвих коефіцієнтів, значення яких подані за порядком поліноміальних функцій MicroCap7. За методом найменших квадратів отримано такі значення коефіцієнтів апрокси-

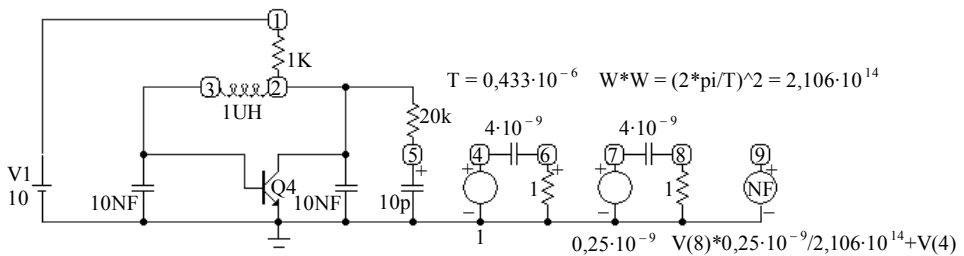


Рис. 7. Схема автогенератора з диференціальними ланками в MicroCap7

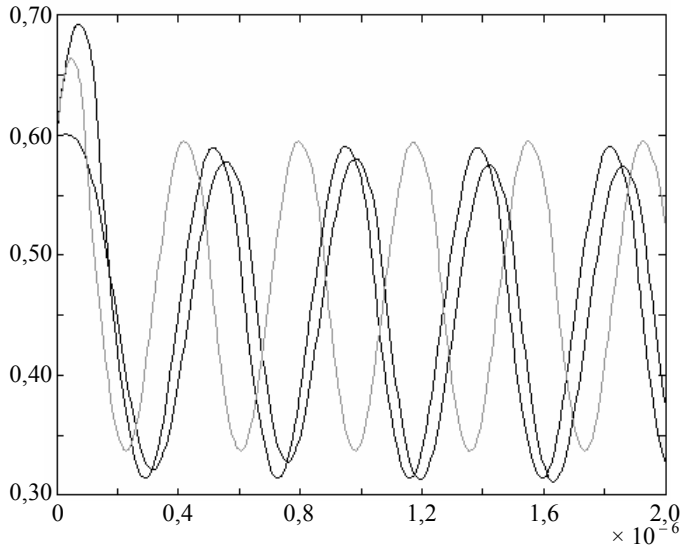


Рис. 8. Вихідні сигнали автогенератора та макромоделей

маційного поліному: $4,3760 \cdot 10^{-1}$; 0; $1,9482 \cdot 10^{-8}$; 0; 0; 0; 0; $-2,4713 \cdot 10^{-7}$; 0; 0; 0; 0; 0; $2,4255 \cdot 10^{-26}$; $6,4202 \cdot 10^{-1}$; 0; 0; $2,1535 \cdot 10^{-19}$; $-6,0623 \cdot 10^{-26}$; $-9,2094 \cdot 10^{-33}$; а за чебишовським наближенням: $4,9838 \cdot 10^{-1}$; 0; $3,3438 \cdot 10^{-8}$; 0; 0; 0; 0; $-4,1154 \cdot 10^{-7}$; 0; 0; 0; 0; 0; $2,4623 \cdot 10^{-26}$; $-5,8667 \cdot 10^{-1}$; 0; 0; $2,8045 \cdot 10^{-19}$; $-6,3896 \cdot 10^{-26}$; $-1,0859 \cdot 10^{-32}$. Максимальні модулі абсолютних похибок апроксимації такі: $8,25 \cdot 10^{-2}$ та $6,85 \cdot 10^{-2}$.

Вихідний сигнал автогенератора у та його математичних макромоделей із використанням апроксимації нелінійної функції за методом найменших квадратів і чебишовського наближення зображено на рис. 8. Світліша лінія відповідає вихідному сигналу макромоделі з чебишовською апроксимацією. Темніші лінії відповідають вихідним сигналам автогенератора та макромоделі з використанням апроксимації за методом найменших квадратів.

Як і в попередніх прикладах, вихідний сигнал макромоделі отримано з використанням апроксимації за методом найменших квадратів краще відповідає оригіналу. У цьому разі вихідний сигнал автогенератора у також визначається через інтегрування сигналу — v . Автори вважають, що саме ця обставина є причиною кращої якості макромоделі з використанням апроксимації за методом найменших квадратів.

Висновок. Під час ідентифікації макромоделей електронних пристроїв для проміжної апроксимації нелінійних сигналів доцільно використовувати метод найменших квадратів. Порівняно з чебишовським наближенням метод найменших квадратів для макромоделей частотного детектора, мультівібратора й автогенератора забезпечував точніше відтворення вихідного сигналу згаданих електронних пристроїв.

Література

- [1] *Матвійчук, Я. М.* Математичне макромодельовання динамічних систем: теорія та практика / *Я. М. Матвійчук*. — Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2000. — 215 с.
- [2] *Матвійчук, Я. М.* Елементи теорії систем та макромодельовання; навч. пос. для студ. радіотехн. та комп. напрямків підгот. / *Я. М. Матвійчук*. — Вид. ШПТ при НУ «ЛП», 2004. — 45 с.
- [3] *Матвійчук, Я.* Регуляризація задачі ідентифікації макромоделей нелінійних динамічних систем методом редукції апроксимаційного базису / *Я. Матвійчук, А. Курганевич* // Теоретична електротехніка. — 2000. — Вип. 55. — С. 31-36.
- [4] *Форсайт, Дж.* Машинные методы математических вычислений / *Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер*. — Москва: Мир, 1980. — 279 с.
- [5] *Попов, Б. А.* Приближение функций для технических приложений / *Б. А. Попов, Г. С. Теслер*. — Киев: Наук. думка, 1980. — 352 с.

Approximation of the mathematical macromodels of electronic devices

Jaroslav Matvijchuk, Petro Malachivskyy

The problem of mathematical macromodeling of electronic devices is considered. The results of macromodeling using the approximations by the method of least squares and Chebyshev approximation for the frequency detector, multivibrator and oscillator are presented. The expediency of the method of least squares use in order to reproduce the original signal of macromodels of non-linear electronic devices is substantiated.

Апроксимація математических макромоделей электронных устройств

Ярослав Матвийчук, Петро Малачивский

Рассмотрена задача математического макромоделирования электронных устройств. Поданы результаты макромоделирования с использованием аппроксимаций за методом наименьших квадратов и чебышевского приближения для частотного детектора, мультивибратора и автогенератора. Обоснованна целесообразность применения метода наименьших квадратов для воссоздания исходных сигналов макромоделей нелинейных электронных устройств.

Отримано 6.10.11