

Термопружний стан термочутливого шару за конвективного теплообміну з середовищем змінної з часом температури

Василь Попович¹, Віталій Янішевський²

¹ д. т. н., професор, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: dept19@iapmm.lviv.ua

² Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: yanvitalik@gmail.com

Розглянуто задачу термопружності для безмежного термочутливого шару з конвективним теплообміном на поверхнях із середовищем змінної з часом температури. Під час розв'язування цієї задачі застосовано метод «лінеаризувальних параметрів». Отримано розподіл температури в шарі та вивчено зумовлений ним напружено-деформований стан.

Ключові слова: термочутливе тіло, конвективний теплообмін, термопружний стан.

Вступ. Під час експлуатації елементів конструкцій в умовах складного (конвективного, променевого чи конвективно-променевого) теплообміну з середовищами, температура яких істотно змінюється з часом, важливим етапом є прогнозування їх міцності. Це призводить до потреби побудови адекватних математичних моделей і розробки ефективних методів для якомога точнішого визначення розподілу температури та спричиненого ним напружено-деформованого стану.

Однією з математичних моделей, що відтворює процес нагрівання, є нелінійна крайова задача математичної фізики [1-3]. За складного теплообміну використання перетворення Кірхгофа [2-6], навіть за умов, так званої, простої теплової нелінійності матеріалу, не повністю лінеаризує граничні умови [8-10]. Простою тепловою нелінійністю володіє матеріал, коефіцієнт теплопровідності (КТ) λ_t й об'ємна теплоємність c_v , якого залежать від температури, а їхнє відношення — коефіцієнт температуропровідності $a = \lambda_t / c_v$ — неістотно, а тому цей коефіцієнт вважають сталою величиною [3, 4, 6, 7]. У цьому випадку застосували метод лінеаризації граничних умов шляхом введення параметра [8-12]. Цей параметр, після знаходження виразу змінної Кірхгофа, чисельно визначили з рівняння, що є рівністю нелінійної та лінеаризованої граничних умов.

У цій праці на прикладі задачі термопружності для шару (пластини), на поверхнях якого відбувається конвективний теплообмін із середовищем змінної температури, апробується метод «лінеаризувальних параметрів» для визначення температурного поля та спричинених ним напружень. Проаналізовано вплив нехтування температурною залежністю механічних характеристик матеріалу на напружено-деформований стан шару.

1. Формулювання задачі

Розглянемо безмежну пластину (шар) товщиною $2l$, яка через поверхні $x = \pm l$ (м) шляхом конвективного теплообміну нагрівається середовищем змінної температури. Пластина має рівномірний початковий розподіл температури t_p ($^{\circ}\text{K}$). Матеріал пластини термочутливий і володіє простою тепловою нелінійністю, тобто коефіцієнт температуропровідності вважають сталою величиною a_0 . На температурну залежність механічних характеристик пластини жодних обмежень не накладаємо. Необхідно визначити квазістатичний термопружний стан термочутливого шару, вільного від зовнішніх силових навантажень.

2. Математична модель задачі теплопровідності

Неусталене температурне поле такої пластини визначаємо з нелінійного рівняння теплопровідності [3]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial x} \right) = c_v(t) \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (1)$$

за таких граничних і початкових умов

$$\left[\lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial x} \pm \alpha (t - t_c(\tau)) \right]_{x=\pm l} = 0, \quad (2)$$

$$t|_{\tau=0} = t_p, \quad (3)$$

де α — коефіцієнт теплообміну через поверхні $x = \pm l$, $t_c(\tau)$ ($^{\circ}\text{K}$) — змінна з часом температура зовнішнього середовища, $\lambda_t(t), c_v(t)$ — залежні від температури КТ й об'ємна теплоємність.

Оскільки задача теплопровідності симетрична відносно площини $x = 0$, то братимемо до уваги лише половину шару. У зв'язку з цим розглядатимемо її за граничних умов

$$\left[\lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial x} + \alpha (t - t_c(\tau)) \right]_{x=l} = 0, \quad \left[\lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial x} \right]_{x=0} = 0 \quad (4)$$

замість умов (2).

3. Побудова розв'язку задачі теплопровідності

Для побудови розв'язку нелінійної задачі теплопровідності (1), (3), (4) скористаємося методом лінеаризувальних параметрів [8, 9]. Він передбачає наступне.

1. Перехід до безрозмірних величин. Для цього вводимо відлікову температуру t_0 і характерний розмір $l_0 = l$. Нехай $\lambda_t(t) = \lambda_{t_0} \lambda_t^*(T)$, $c_v(t) = c_{v_0} c_v^*(T)$, де λ_{t_0}, c_{v_0} — опорні значення, а $\lambda_t^*(T), c_v^*(T)$ — функції, що описують залежність відповідної характеристики від безрозмірної температури $T = t/t_0$.

У підсумку отримуємо таку крайову задачу

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\lambda_t^*(T) \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} \right) = c_v^*(T) \frac{\partial T}{\partial Fo}, \quad (5)$$

$$\left[\lambda_t^*(T) \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} + Bi(T - T_c(Fo)) \right]_{\bar{x}=1} = 0, \quad \left[\lambda_t^*(T) \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} \right]_{\bar{x}=0} = 0, \quad (6)$$

$$T|_{Fo=0} = T_p, \quad (7)$$

де $T_p = t_p/t_0$, $T_c(\tau) = t_c(\tau)/t_0$ — безрозмірні температури, $\bar{x} = x/l$ — безрозмірна координата, $Bi = \alpha l/\lambda_{t0}$ — критерій Біо, $Fo = a_0\tau/l^2$ — число Фур'є, $a_0 = \lambda_{t0}/c_{v0}$.

2. Ввівши змінну Кірхгофа $\theta = \int_{T_p}^T \lambda_t^*(T') dT'$ і взявши до уваги, що $c_v^*(T)/\lambda_t^*(T) \approx 1$, із (5)-(7) отримуємо таку задачу на змінну Кірхгофа

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial \theta}{\partial Fo}, \quad (8)$$

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} + Bi(T(\theta) - T_c(Fo)) \right]_{\bar{x}=1} = 0, \quad \left[\frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} \right]_{\bar{x}=0} = 0, \quad (9)$$

$$\theta|_{Fo=0} = 0. \quad (10)$$

Задача (8)-(10) теж є нелінійна через нелінійний вираз $T(\theta)$ у першій умові (9), яку отримано з умови конвективного теплообміну.

3. Лінеаризацію задачі (8)-(10) здійснюємо шляхом введення лінеаризувального параметра [8, 9,], який передбачає апроксимацію нелінійної залежності температури $T(\theta)$ на поверхні шару $\bar{x} = 1$ від змінної Кірхгофа виразом

$$T(\theta)|_{\bar{x}=1} = (1 + \kappa)\theta|_{\bar{x}=1} + T_p, \quad (11)$$

де κ — деяка невідома величина (лінеаризувальний параметр).

Таким чином, змінну Кірхгофа θ будемо визначати з крайової задачі (8)-(10) із граничною умовою

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} + Bi^* (\theta - T_c^*(Fo)) \right]_{\bar{x}=1} = 0 \quad (12)$$

замість нелінійної першої умови (9), де $Bi^* = Bi(1 + \kappa)$, $T_c^*(Fo) = (T_c(Fo) - T_p)(1 + \kappa)^{-1}$.

Значення невідомого «лінеаризувального параметра» будемо знаходити, задовольняючи із заданою точністю нелінійну граничну умову (9). Так, якщо $\lambda_t^*(T) = 1 + k(T - T_p)$, то $T(\theta) = k^{-1}(\sqrt{1 + 2k\theta} - 1) + T_p$ і для κ маємо рівність $k^{-1}(\sqrt{1 + 2k\theta} - 1)|_{\bar{x}=1} = (1 + \kappa)\theta|_{\bar{x}=1}$, з якої отримуємо нелінійне алгебричне рівняння

$$k(1 + \kappa)^2 \theta|_{\bar{x}=1} + 2\kappa = 0. \quad (13)$$

Для його розв'язання за конкретного значення Fo використовуємо метод Ньютона. За перше наближення вибираємо $\kappa = 0$.

Нехай залежність температури зовнішнього середовища від безрозмірного часу Fo кусково-лінійна

$$T_c(Fo) = \begin{cases} T_p + PdFo, & Fo \in (0; Fo_1); \\ T_p + PdFo_1, & Fo \in (Fo_1; Fo_2); \\ T_p - PdFo_1(Fo - Fo_3)(Fo_3 - Fo_2)^{-1}, & Fo \in (Fo_2; Fo_3); \\ T_p, & Fo > Fo_3, \end{cases}$$

де $Pd = bl^2/a_0t_0$, $Fo_i = a_0\tau_i/l^2$ ($i = \overline{1,3}$) і τ_1, τ_2, τ_3 ($\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$), b — деякі відомі додатні сталі.

Для побудови розв'язку задачі (8)-(10) із граничною умовою (12) замість нелінійної першої умови (9) використаємо перетворення Лапласа за часовою координатою Fo . У результаті змінна Кірхгофа для $Fo \in [0; Fo_1]$ матиме вигляд

$$\hat{\theta} = \frac{PdBi^* \operatorname{ch}(\bar{x}\sqrt{s})}{(1+\kappa)s^2(\sqrt{s} \operatorname{sh}\sqrt{s} + Bi^* \operatorname{ch}\sqrt{s})}.$$

Використавши таблиці перетворень Лапласа [13, 14], отримаємо оригінал змінної Кірхгофа

$$\theta = Pd \left[Fo + \frac{\bar{x}^2}{2} - \frac{2 + Bi^*}{2Bi^*} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mu_n^{-2} \cos(\mu_n \bar{x}) e^{-\mu_n^2 Fo} \right] (1+\kappa)^{-1},$$

де $A_n = 2 \sin \mu_n / (\cos \mu_n \sin \mu_n + \mu_n)$, а μ_n знаходимо з характеристичного рівняння $\operatorname{ctg} \mu_n = \mu_n / Bi^*$.

На проміжку $Fo \in [Fo_1; Fo_2]$ за початковий розподіл температури в шарі беремо вже відоме $\theta|_{Fo=Fo_1}$ і для змінної Кірхгофа матимемо таке зображення Лапласа

$$\hat{\theta} = N_1 \left[\frac{N_2}{s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{x}^2}{s} + \frac{2}{s^2} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{\cos(\bar{x}\mu_n)}{s + \mu_n^2} \right] + \frac{N_1 \operatorname{ch}(\bar{x}\sqrt{s})}{\sqrt{s} \operatorname{sh}\sqrt{s} + Bi^* \operatorname{ch}\sqrt{s}} \times \\ \times \left\{ -\frac{1}{s} + \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{\mu_n \sin \mu_n}{s + \mu_n^2} - Bi^* \left[\frac{N_2}{s} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{\cos \mu_n}{s + \mu_n^2} \right] + \frac{BiPd_1 Fo_1}{sN_1} \right\}.$$

Використовуючи таблиці оригіналів [14], отримаємо, що

$$\theta = G_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(G_2 - \sum_{m=1}^{\infty} G_3 \right) A_m \cos(\mu_m \bar{x}) e^{-\mu_m^2 (Fo - Fo_1)},$$

де $G_1 = PdFo_1(1 + \kappa)^{-1}$, $G_2 = N_1 \left[(Bi^* + 2)(2Bi^*)^{-1} - \mu_m^{-2} + N_2 - PdFo_1 N_1^{-1}(1 + \kappa)^{-1} \right]$,
 $G_3 = N_1 E_1 \mu_m^2 (Bi^* \cos \mu_n - \mu_n \sin \mu_n) \left[Bi^* (\mu_n^2 - \mu_m^2) \right]^{-1} e^{-\mu_n^2 Fo_1}$, $N_1 = Pd(1 + \kappa_1)^{-1}$, $N_2 = Fo -$
 $- [Bi(1 + \kappa_1) + 2] / [2Bi(1 + \kappa_1)]$, $E_1 = [A_n / \mu_n^2]_{Fo= Fo_1}$, $\kappa_1 = \kappa |_{Fo= Fo_1}$.

Аналогічним чином знаходимо зображення Лапласа й оригінал змінної Кірхгофа на проміжку $Fo \in [Fo_2; Fo_3]$

$$\hat{\theta} = G_1^* \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} G_2^* \frac{\cos(\mu_n \bar{x})}{s + \mu_n^2} e^{-\mu_n^2 Fo_2} + \sum_{m=1}^{\infty} G_3^* \frac{\cos(\mu_m \bar{x})}{s + \mu_m^2} e^{-\mu_m^2 (Fo_2 - Fo_1)} +$$

$$+ \frac{\text{ch}(\bar{x} \sqrt{s})}{\sqrt{s} \text{sh} \sqrt{s} + Bi^* \text{ch} \sqrt{s}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} G_2^* \frac{\mu_n \sin \mu_n - Bi^* \cos \mu_n}{s + \mu_n^2} e^{-\mu_n^2 Fo_2} - \frac{Bi^* G_1^*}{s} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} G_3^* \frac{\mu_m \sin \mu_m - Bi^* \cos \mu_m}{s + \mu_m^2} e^{-\mu_m^2 (Fo_2 - Fo_1)} + \frac{Bi^* PdFo_1}{s^2 (Fo_3 - Fo_2)} + \frac{Bi PdFo_1}{s} \right);$$

$$\theta = H_1 (Fo - Fo_2 + \bar{x}^2 / 2) + H_2 + \sum_{l=1}^{\infty} H_3 A_l \cos(\mu_l \bar{x}) e^{-\mu_l^2 (Fo - Fo_2)},$$

де $H_1 = \frac{1}{(Fo_3 - Fo_2)(1 + \kappa)}$, $H_2 = -\frac{(2 + Bi^*)}{2Bi^* (Fo_3 - Fo_2)(1 + \kappa)} - \frac{PdFo_1}{1 + \kappa}$, $H_3 = \frac{\mu_l^2}{Bi^*} \times$
 $\times \left(\sum_{n=1}^{\infty} G_2^* e^{-\mu_n^2 Fo_1} \frac{\mu_n \sin \mu_n - Bi^* \cos \mu_n}{\mu_n^2 - \mu_l^2} + \sum_{m=1}^{\infty} G_3^* e^{-\mu_m^2 (Fo_2 - Fo_1)} \frac{\mu_m \sin \mu_m - Bi^* \cos \mu_m}{\mu_m^2 - \mu_l^2} \right) +$
 $+ G_1^* + \frac{1}{(Fo_3 - Fo_2)(1 + \kappa) \mu_l^2} + \frac{PdFo_1}{1 + \kappa}$, $G_i^* = [G_i]_{Fo= Fo_2}$ ($i = 1, 3$).

Для $Fo \geq Fo_3$ зображення й оригінал змінної Кірхгофа обчислюємо за формулами

$$\hat{\theta} = H_1^* \left[\frac{Fo_3 - Fo_2}{s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{x}^2}{s} + \frac{2}{s^2} \right) \right] + H_2^* + \sum_{l=1}^{\infty} H_3^* \frac{\cos(\mu_l \bar{x})}{s + \mu_l^2} e^{-\mu_l^2 (Fo_3 - Fo_2)} +$$

$$+ \frac{\text{ch}(\bar{x} \sqrt{s})}{\sqrt{s} \text{sh} \sqrt{s} + Bi^* \text{ch} \sqrt{s}} \left\langle -\frac{1}{s} \left\{ H_1^* \left[1 + Bi^* (Fo_3 - Fo_2) + \frac{Bi^*}{2} \right] + Bi^* H_2^* \right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{Bi^* H_1^*}{s^2} + \sum_{l=1}^{\infty} H_3^* \frac{\mu_l \sin \mu_l - Bi^* \cos \mu_l}{s + \mu_l^2} e^{-\mu_l^2 (Fo_3 - Fo_2)} \right\rangle,$$

$$\theta = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(2 + Bi^* \right) \frac{H_1^*}{2Bi^*} + H_1^* (Fo_3 - Fo_2) + H_2^* - H_1^* \mu_j^{-2} + \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^{\infty} H_3^* e^{-\mu_j^2 (Fo_3 - Fo_2)} \frac{\mu_j^2}{Bi^*} \frac{\mu_l \sin \mu_l - Bi^* \cos \mu_l}{\mu_l^2 - \mu_j^2} \right] A_j \cos(\mu_j \bar{x}) e^{-\mu_j^2 (Fo - Fo_3)},$$

де $H_i^* = [H_i]_{Fo= Fo_3}$ ($i = \overline{1,3}$).

4. Визначення температурних напружень

Знайдений розподіл температури спричинить у пластині певний напружений стан, який визначається двома ненульовими компонентами тензора напруження σ_{yy}, σ_{zz} .

У випадку симетричного відносно площини $\bar{x} = 0$ розподілу температури дві ненульові компоненти тензора напружень $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma(t)$ обчислюємо за формулою

$$\sigma(t) = E(t) \frac{N_t / B - \Phi v}{1 - \nu v},$$

де $N_t = \int_{-l}^l E(t) \Phi(t) / (1 - \nu(t)) dx$, $B = \int_{-l}^l E(t) / (1 - \nu(t)) dx$, $\Phi(t) = \int_{t_p}^t \alpha_t(t') dt'$, а

$E(t)$, $\nu(t)$, $\alpha_t(t)$ — залежні від температури модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона та температурний коефіцієнт лінійного розширення.

Подамо механічні характеристики у вигляді $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T)$, де χ_0 — стала, $\chi^*(T)$ описує залежність характеристики від безрозмірної температури, а саме

$$E(t) = E_0 E^*(T) = E_0 \left[1 + k_{E1} (T - T_p) + k_{E2} (T - T_p)^2 + k_{E3} (T - T_p)^3 \right], \\ \nu(t) = \nu_0 \nu^*(T) = \nu_0 \left[1 + k_{\nu 1} (T - T_p) + k_{\nu 2} (T - T_p)^2 + k_{\nu 3} (T - T_p)^3 \right], \\ \alpha_t(t) = \alpha_{t0} \alpha_t^*(T) = \alpha_{t0} \left[1 + k_{\alpha 1} (T - T_p) + k_{\alpha 2} (T - T_p)^2 \right], \\ \Phi(t) = \alpha_{t0} t_0 \Phi^*(T) = \alpha_{t0} t_0 \left[(T - T_p) + k_{\alpha 1} \frac{(T - T_p)^2}{2} + k_{\alpha 2} \frac{(T - T_p)^3}{3} \right]. \quad (14)$$

Тоді

$$\bar{\sigma} = \frac{E^*(T)}{1 - \nu_0 \nu^*(T)} \left\{ \frac{N_t^*}{B^*} - \left[(T - T_p) + \frac{k_{\alpha 1}}{2} (T - T_p)^2 + \frac{k_{\alpha 2}}{3} (T - T_p)^3 \right] \right\},$$

де $N_t^* = \int_{-1}^1 E^*(T) \Phi^*(T) / (1 - \nu_0 \nu^*(T)) d\bar{x}$, $B^* = \int_{-1}^1 E^*(T) / (1 - \nu_0 \nu^*(T)) d\bar{x}$, $\bar{\sigma} = \sigma(t) / (E_0 \alpha_{t0} t_0)$ — безрозмірне напруження.

5. Числові дослідження

Проведені числові дослідження температурного поля та спричинених ним напружень у пластині зі сталі У12, товщиною $2l = 0,02$ м, для $t_{\max} = 673$ °К і $t_p = 273$ °К. Відлікове значення температури t_0 прийняли рівним t_{\max} . На основі експериментальних даних [19] КТ сталі апроксимували лінійною залежністю, а механічні характеристики — залежностями (14).

Коефіцієнти $k, k_{\alpha 1}, k_{\alpha 2}, k_{E1}, k_{E2}, k_{E3}, k_{\nu 1}, k_{\nu 2}, k_{\nu 3}$ знаходимо методом найменших квадратів. Отже отримуємо такі вирази характеристик матеріалу:

$$\begin{aligned} \lambda_t(t) &= 47,8(1 - 0,366\bar{T}) \text{ [Вт/(м·К)]}, \\ E(t) &= 209,83 \cdot 10^9 (1 - 0,14\bar{T} - 0,039\bar{T}^2 - 0,098\bar{T}^3) \text{ [Па]}, \\ \nu(t) &= 0,273(1 + 0,197\bar{T} - 0,238\bar{T}^2 + 0,048\bar{T}^3), \\ \alpha_t(t) &= 10,31 \cdot 10^{-6} (1 + 0,92\bar{T} - 0,53\bar{T}^2) \text{ [К}^{-1}\text{]}, \\ \Phi(t) &= t_0 \cdot 10,31 \cdot 10^{-6} (\bar{T} + 0,92\bar{T}^2/2 - 0,52\bar{T}^3/3). \end{aligned}$$

Максимальні відносні похибки під час апроксимації методом найменших квадратів такі: $\lambda_t(t)$ — 0,012 %, $E(t)$ — 0,0012 %, $\nu(t)$ — 0,0064 %, $\alpha_t(t)$ — 0,019 %.

На рис. 1 наведено графік розподілу температурного поля T залежно від часу Fo . На рис. 2-3 подані розподіли спричинених температурним полем напружень, які з огляду на симетрію задачі є самозрівноважені. На рис. 2а, б зображено розподіли напружень уздовж координати у точках їх максимуму по часу на поверхнях шару. На цих рисунках, а також на рис. 3а, б, крива 1 відповідає напруженням у тілі, механічні характеристики якого залежать від температури; 2 — у разі нехтування температурною залежністю модуля Юнга, а 3, 4 — за нехтування температурною залежністю коефіцієнтів лінійного розширення та Пуассона відповідно.

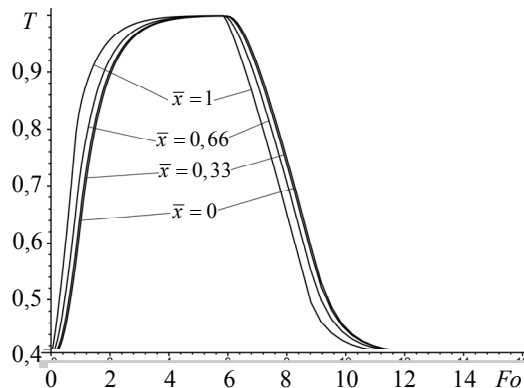


Рис. 1. Розподіл температури в шарі залежно від часу

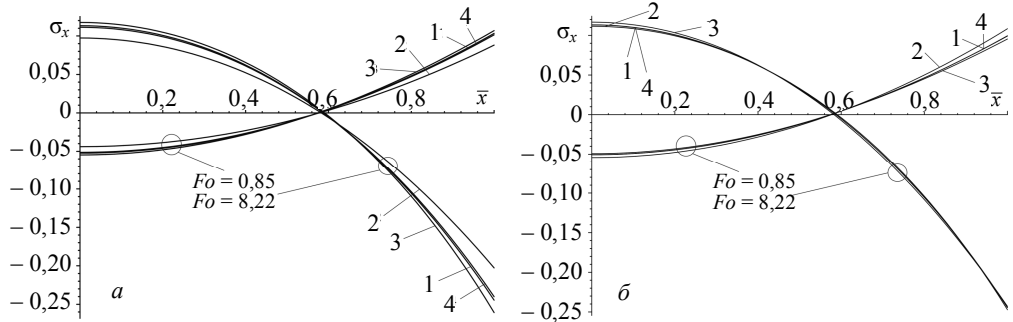


Рис. 2. Розподіл напружень за координатою

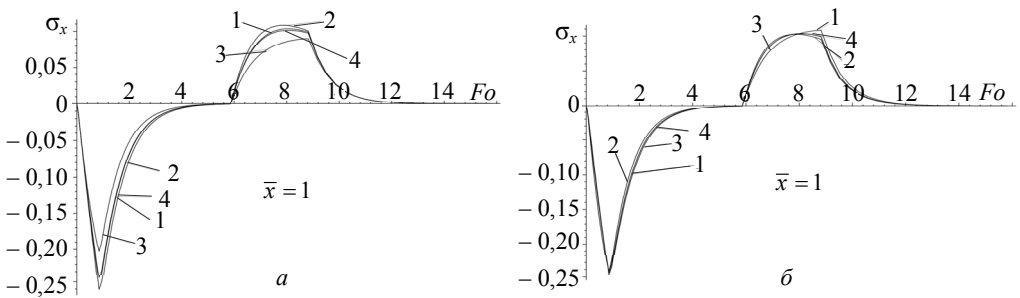


Рис. 3. Розподіл напружень у часі

Тут на рис. 2а, 3а відповідні характеристики замінювали на їхнє опорне значення, а на рис. 2б, 3б — на середньо-інтегральне на проміжку температур від T_p до 1.

Як видно з рис. 2, 3, напруження є стискальні під час нагрівання пластини та розтягувальні у разі її охолодження. З рис. 3а бачимо, що нехтування температурною залежністю модуля Юнга (заміною його на опорне значення) призводить до завищення величини напружень, а нехтування температурною залежністю коефіцієнтів лінійного розширення та Пуассона — до її зниження. У разі використання середніх значень модуля Юнга та температурного коефіцієнта лінійного розширення (рис. 3б) спостерігається протилежний ефект. На рис. 3а максимальна відносна похибка кривих 2-4 відносно кривої 1 складає +14%, -24%, -2% відповідно, а на рис. 3б кривих 2-4 відносно кривої 1 — -8%, +20%, -2% відповідно. У випадку заміни усіх механічних характеристик на їхнє опорне або середньо-інтегральне значення відносна похибка становитиме -20% і +15%, що показано на рис. 4.

У разі використання квадратичної залежності КТ виявлено, що відносна похибка цієї температури, порівняно з температурою, обчисленою за лінійної залежності КТ, менша 0,1%. Як видно з рис. 5 похибка напружень здебільшого не перевищує 1% і лише з їх зменшенням зростає до 3,5%. Тут усі механічні характеристики матеріалу вважали залежними від температури.

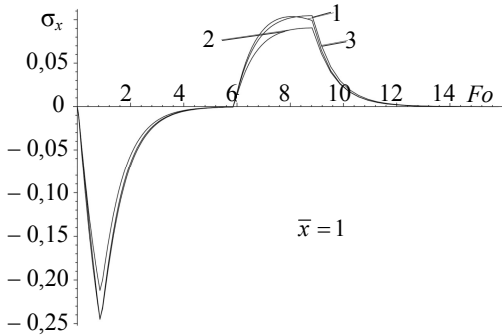


Рис. 4. Розподіл напружень у часі:
1 — термочутлива модель,
2 — механічні характеристики опорні,
3 — механічні характеристики середні

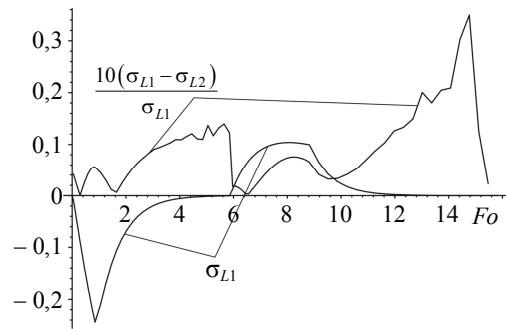


Рис. 5. Розподіл у часі напружень $\bar{\sigma}_{L1}$ та $\bar{\sigma}_{L2}$, обчислених відповідно за лінійною та квадратичною залежностями КТ

Висновки. Застосовано метод «лінеаризувальних параметрів» до задачі теплопровідності для безмежного термочутливого шару, який конвективно нагрівається через поверхні середовищем змінної з часом температури. Знайдені температурне поле в шарі та спричинений ним напружено-деформований стан.

З'ясовано, що нехтування температурною залежністю модуля Юнга чи температурного коефіцієнта лінійного розширення (заміна їх на опорне значення чи середньо-інтегральне) дає більшу похибку в обчисленні напружень, ніж нехтування температурними залежностями усіх механічних характеристик. Показано, що заміна усіх механічних характеристик на їхнє опорне значення дає більшу похибку в обчисленні напружень, ніж заміна на значення середньо-інтегральної величини на цьому проміжку температур.

Література

- [1] Коляно, Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. — Киев: Наук. думка, 1992. — 280 с.
- [2] Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. — Москва: Высшая школа, 1967. — 600 с.
- [3] Carslaw, H. S. Conduction of heat in solids Clarendon / H. S. Carslaw, J. C. Jaeger. — Oxford, 1959. — 430 p.
- [4] Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл; під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. Т. 3. Термопружність термочутливих тіл / Р. М. Кушнір, В. С. Попович. — Львів: Сполом, 2009. — 412 с.
- [5] Попович, В. С. Моделирование тепловых полей в тонких термочувствительных пластинах / В. С. Попович // Моделирование и оптимизация сложных механических систем. — Киев: Сб. науч. трудов Ин-та кибернетики, 1991. — С. 70-75.
- [6] Noda, N. Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties Thermal Stresses I / N. Noda. — North-Holland, Amsterdam: 1986. — P. 391-483.
- [7] Подстригач, Я. С. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно. — Киев: Наук. думка, 1972. — 308 с.

- [8] Попович, В. С. О решении задач теплопроводности термочувствительных тел, нагреваемых путем конвективного теплообмена / В. С. Попович // Мат. методы и физ.-мех. поля. — 1988. — Вып. 28. — С. 83-86.
- [9] Попович, В. С. О решении стационарных задач теплопроводности контактирующих термочувствительных тел / В. С. Попович // Мат. методы и физ.-мех. поля. — 1989. — Вып. 29. — С. 51-55.
- [10] Попович, В. С. Розв'язування нестационарних задач теплопровідності для термочутливих тіл при конвективному теплообміні / В. С. Попович, Г. Ю. Гарматій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1997. — Т. 40, № 2. — С. 148-152.
- [11] Kushnir, R. M. Solution of quasi-static thermoelasticity problem for thermosensitive bodies under a convective heat exchange / R. M. Kushnir, V. S. Popovych, H. Yu. Harmatiy // Proc. of 5th Intern. Congress on Thermal Stresses and Related Topics (Blacksburg, VA, USA, 08-11 June, 2003). — Virginia Tech., 2003. — Vol. 1. — P. MM-3-2-1–MM-3-2-4.
- [12] Popovych, V. S. The thermoelastic state of a thermosensitive sphere and space with a spherical cavity subject to complex heat exchange / V. S. Popovych, R. M. Kushnir, O. M. Vovk // J. Engng Math. — 2008. — No 2-4. — P. 375-369.
- [13] Direct Laplace transforms. Integrals and Series. Vol. 4 / A. V. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev. — New York: 1992. — 331 p.
- [14] Prudnikov, A. V. Inverse Laplace transforms. Integrals and Series. Vol. 5 / A. V. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev. — New York: 1992. — 595 p.
- [15] Марочник сталей и сплавов; под ред. В. Г. Сорокина. — Москва: Машиностроение, 1989. — 640 с.

Thermoelastic state of a thermosensitive layer under convectively heating with an environment of variable in time temperature

Vasyl Popovych, Vitaly Yanishevsky

A thermosensitive problem for a thermosensitive layer with convective heat exchange conditions on lateral faces with the environments of variable in time temperatures is considered. The method of linearized parameters was used while obtaining its solution. A temperature field distribution and caused stressed-strained state components were found.

Термоупругое состояние термочувствительного слоя при конвективном теплообмене со средой переменной со временем температуры

Василий Попович, Віталій Янішевський

Рассмотрена задача термоупругости для бесконечного термочувствительного слоя с конвективным теплообменом на поверхностях, со средой сменной со временем температуры. При решении данной задачи был применен метод «линеаризующих параметров». Получено распределение температуры в слое и вызванное им напряженно-деформированное состояние.

Представлено доктором фізико-математичних наук Р. Мусієм

Отримано 05.10.11