УДК 534.1

Опис процесів переносу в шаруватих тілах із використанням теорії узагальнених функцій

Богдана Гайвась[1], Євген Чапля[2]

[1] к. ф.-м. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005
[2] д. ф.-м. н., професор, Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005; Інститут механіки і прикладної інформатики Університету Казиміра Великого в Бидгощі, вул. Ходкевича, Бидгощ, Польща, 85-064, e-mail: chaplia@cmm.lviv.ua

Запропоновано підхід до опису процесів переносу в шаруватих тілах, який базується на формулюванні та розв'язуванні крайової задачі з диференціальним рівнянням зі змінними коефіцієнтами, записаного для тіла в цілому, що відповідає вихідній задачі спряження. Це рівняння за допомогою перетворення аргументу зведено до неоднорідного квазідиференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами та правою частиною у вигляді добутку шуканих функцій на δ-функцію Дірака в площинах спряження. Отримано аналітичний розв'язок задачі переносу для шаруватого тіла з довільною кількістю підшарів. Цей розв'язок конкретизовано для задач тепло- та масопереносу в тришаровому тілі за різних граничних умов.

Ключові слова: теплопровідність, дифузія, шарувата структура, узагальнена функція.

Вступ. Оцінка захисних властивостей шаруватих матеріалів, які широко використовуються в сучасній техніці, від небажаної дії зовнішнього середовища базується на можливостях аналітичного опису відповідних полів температури та концентрації в таких структурах. При цьому часто можна обмежитися розв'язками одновимірних за координатою задач математичної фізики. Однак, навіть у випадку, якщо кількість контактуючих між собою підшарів значна, під час побудови розв'язків із використанням умов спряження виникають значні труднощі [1].

У цій роботі запропоновано підхід до опису процесів переносу в шаруватих тілах, який базується на формулюванні та розв'язуванні крайової задачі для диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами, записаного для тіла в цілому, що відповідає вихідній задачі спряження. Це рівняння за допомогою перетворення аргументу зводиться до неоднорідного квазідиференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами та правою частиною у вигляді добутку шуканих функцій на δ-функцію Дірака в площинах спряження. Тоді можна отримати розв'язок, який має один аналітичний вираз у всій області визначення за довільної кількості шарів.

У задачах механіки цей підхід було реалізовано в роботах В. Лазаряна [2] й адаптовано одним з авторів цієї статті до задач стійкості конструкцій змінної жорсткості та систем із включеннями [3]. Огляд літератури з квазідиференціальних рівнянь наведено у праці [4]. Метод розділення змінних для рівнянь параболічного типу зі сталими коефіцієнтами подано у роботі [5]. Задачі дифузії в шарі та двошаровій смузі іншими способами розв'язувались у працях [6, 7].

1. Формулювання задачі

Розглянемо процес вертикального переносу тепла (маси) у шарі, що складається з n однорідних підшарів різної товщини, у межах яких усі параметри сталі. У кожному з підшарів i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ поле температури (концентрації домішкової речовини) $U_i(x, t)$ задовольняє рівняння

$$c_i \frac{\partial U_i}{\partial t} = k_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2}\,, \tag{1}$$

де для задач теплопереносу $c_i = C_i \rho_i$, C_i — теплоємність, ρ_i — густина, k_i — коефіцієнт теплопровідності, а в задачах дифузії: c_i — пористість [5], k_i — кінетичний коефіцієнт дифузії; t — час, x — просторова координата.

У початковий момент часу відомі розподіли шуканої функції в тілі

$$U_i\big|_{t=0} = \phi_i(x)\,, \tag{2}$$

а функції U_1 та U_n на зовнішніх границях шару $x = 0$ і $x = L$ задовольняють крайові умови першого, другого або третього роду, тобто

$$\begin{gathered} U_1(0,t) = \mu_1(t), \qquad U_n(L,t) = \mu_2(t)\,, \\ k(x)\frac{\partial U_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \bar{\mu}_1(t), \qquad k(x)\frac{\partial U_n}{\partial x}\bigg|_{x=L} = \bar{\mu}_2(t)\,, \\ \frac{\partial U_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \tilde{\beta}_1\left(U_1 - U_{10}\right), \qquad \frac{\partial U_n}{\partial x}\bigg|_{x=L} = \tilde{\beta}_2\left(U_n - U_{n0}\right), \end{gathered} \tag{3}$$

де $\phi_i(x), \mu_1(t), \mu_2(t), \bar{\mu}_1(t), \bar{\mu}_2(t)$ — відомі функції, $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, U_{10}, U_{n0}$ — сталі.

На внутрішніх поверхнях контакту підшарів $x = x_i$ виконуються умови спряження

$$U_i\big|_{x=x_{i-0}} = U_{i+1}\big|_{x=x_{i+0}}\,, \qquad k_i \frac{\partial U_i}{\partial x}\bigg|_{x=x_{i-0}} = k_{i+1}\frac{\partial U_{i+1}}{\partial x}\bigg|_{x=x_{i+0}}\,. \tag{4}$$

2. Схема розв'язування задачі

Для побудови розв'язку задачі (1)-(4) запишемо узагальнене рівняння для тіла в цілому

$$c(x)\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right], \tag{5}$$

де

$$c(x) = c_1\left[1+\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i\theta\left(x-x_i\right)\right], \quad k(x) = k_1\left[1+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\theta\left(x-x_i\right)\right], \tag{6}$$

c_1, k_1 — значення коефіцієнтів $c(x)$ і $k(x)$ у першому підшарі, α_i, β_i — величина стрибків коефіцієнтів $c(x)$ і $k(x)$ на поверхні $x = x_i$ (α_i, β_i можуть набувати як додатних, так і від'ємних значень), $\theta\left(x-x_i\right)$ — одинична функція Хевісайда. При цьому функція $U(x, t)$ задовольняє початкову умову $U(x,0) = \phi_1\Big[1+$ $+\sum_{i=1}^{n-1}\overline{\phi}_i(x)\theta\left(x-x_i\right)\Big]$, відповідні граничні умови (3) й умови спряження (4).

Розв'язок рівняння (5) будемо шукати у вигляді

$$U(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty} X_p(x)T_p(t). \tag{7}$$

Тут $X_p(x)$, $T_p(t)$ — нові шукані функції. Після підстановки співвідношення (7) у (5), знайдемо рівняння для функцій $X_p(x)$, $T_p(t)$, а саме:

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dX_p}{dx}\right] + c(x)\nu_p^2 X_p = 0, \quad \frac{dT_p}{dt} + \nu_p^2 T_p = 0, \tag{8}$$

де $\nu_p^2\left(p=\overline{1,\infty}\right)$ — сталі.

Загальний розв'язок другого рівняння системи (8) має вигляд $T_p = C_{1p}e^{-\nu_p^2 t}$, C_{1p} — сталі інтегрування.

Перейдемо до побудови розв'язку першого рівняння системи (8). Зауважимо, що вихідне рівняння (5) відповідає системі рівнянь

$$k(x)\frac{\partial U}{\partial x} = J, \quad \frac{\partial J}{\partial x} = c(x)\frac{\partial U}{\partial t}. \tag{9}$$

Тут $J(x, t)$ — нова шукана функція (у фізичній інтерпретації — потік).

Аналогічно до (7), потік подамо у вигляді

$$J(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty} T_p(t)J_p(x). \tag{10}$$

Тоді, використовуючи (7) і (10), із системи рівнянь (9) знайдемо

$$k(x)\frac{dX_p}{dx} = J_p, \quad \frac{dJ_p}{dx} = -\nu_p^2 c(x)X_p, \quad p=\overline{1,\infty}. \tag{11}$$

Виключивши з рівнянь (11) функцію X_p, для J_p отримуємо

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{c(x)}\frac{dJ_p}{dx}\right]+\frac{\nu_p^2 J_p}{k(x)}=0\,. \tag{12}$$

Співвідношення (12) запишемо так

$$\frac{d^2J_p}{dx^2}+\nu_p^2\frac{c(x)}{k(x)}J_p=\frac{1}{c(x)}\frac{dc(x)}{dx}\frac{dJ_p}{dx}\,. \tag{13}$$

Із першої формули системи (6) випливає, що

$$\frac{dc}{dx}=c_1\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i\delta\left(x-x_i\right), \tag{14}$$

де $\delta\left(x-x_i\right)$ — δ-функція Дірака. Тоді, використовуючи співвідношення (11), (14), рівняння (13) можна записати так

$$\frac{d^2J_p}{dx^2}+\omega_p^2\left[1+\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i\theta\left(x-x_i\right)\right]\left[1+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\theta\left(x-x_i\right)\right]^{-1}J_p=$$
$$=-\nu_p^2c_1\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i\delta\left(x-x_i\right)X_p(x)\,. \tag{15}$$

Тут $\omega_p^2=\nu_p^2c_1\big/k_1$, $p=\overline{1,\infty}$.

Зведемо рівняння (15) до диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами. Для цього введемо нову змінну u так, що $x=u+\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i\left(u-u_i\right)\theta\left(u-u_i\right)$, де γ_i — сталі величини, $u_i=u\big|_{x=x_i}$.

Враховуючи, що $dx\big/du=1+\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i\theta\left(u-u_i\right)$ та $d^2x\big/du^2=\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i\delta\left(u-u_i\right)$, а також $(u-u_i)\delta(u-u_i)=0$, для визначення сталих γ_i отримуємо співвідношення

$$\left[1+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\theta\left(x-x_i\right)\right]^{-1}\left[1+\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i\theta\left(x-x_i\right)\right]\left[1+\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i\theta\left(x-x_i\right)\right]^2=1\,, \tag{16}$$

з якого визначаємо γ_i за трансцендентною формулою

$$\gamma_i=\left(1+\sum_{j=1}^{i}\alpha_j\right)^{1/2}\left(1+\sum_{j=1}^{i}\beta_j\right)^{-1/2}-\left(1+\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_j\right)^{1/2}\left(1+\sum_{j=1}^{i-1}\beta_j\right)^{-1/2}. \tag{17}$$

Врахуємо, що функції $J_p(x)$, $X_p(x)$ є неперервні у площинах спряження $x=x_i$. Виходячи з рівнянь (4), (11), можемо записати

$$k_1\left(1+\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_j\right)\frac{dX_p}{dx}\bigg|_{x=x_i-0}=J_p\big|_{x=x_i-0}\,, \tag{18}$$

$$-\frac{1}{\nu_p^2 c_1\left(1+\sum\limits_{j=1}^{i-1}\beta_j\right)}\frac{dJ_p}{dx}\bigg|_{x=x_i-0}=X_p\big|_{x=x_i-0}\,. \tag{19}$$

Тоді, з урахуванням співвідношень (16), (17) і (19), рівняння (15) подамо так

$$\frac{d^2J_p}{du^2}+\omega_p^2 J_p(u)=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{dJ_p}{du}\bigg|_{u=u_i-0}\left(1+\sum_{j=1}^{i-1}\gamma_j\right)^{-1}\psi_{2i}\delta\left(u-u_i\right), \tag{20}$$

де коефіцієнти задані виразами

$$\psi_{2i}=\left(1+\sum_{j=1}^{i-1}\beta_j\right)^{-1}\left[\beta_i\left(1+\sum_{j=1}^{i-1}\gamma_j+\frac{\gamma_i}{2}\right)+\gamma_i\left(1+\sum_{j=1}^{i-1}\beta_j+\frac{\beta_i}{2}\right)\right].$$

Подібним чином, з урахуванням формул (18), для функцій $X_p(u)$ отримаємо

$$\frac{d^2X_p}{du^2}+\omega_p^2 X_p(u)=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{dX_p}{du}\bigg|_{u=u_i-0}\left(1+\sum_{j=1}^{i-1}\gamma_j\right)^{-1}\psi_{1i}\delta\left(u-u_i\right). \tag{21}$$

Тут

$$\psi_{1i}=\left(1+\sum_{i=1}^{i}\alpha_i\right)^{-1}\left(1+\sum_{i=1}^{i-1}\alpha_i\right)\left(1+\sum_{i=1}^{i}\gamma_i\right)-\left(1+\sum_{i=1}^{i-1}\gamma_i\right).$$

Розв'язки рівнянь (20), (21) із постійними коефіцієнтами можна знайти методом початкового параметра [2]. Вони мають вигляд

$$J_p(u)=J_p(0)\Phi_{1p}^2(u)+\frac{1}{\omega_p}J_p'(0)\Phi_{2p}^2(u)\,, \tag{22}$$

$$X_p(u)=X_p(0)\Phi_{1p}^1(u)+\frac{1}{\omega_p}X_p'(0)\Phi_{2p}^1(u)\,, \tag{23}$$

де

$$\Phi_{1p}^j(u)=\cos\left(\omega_p u\right)+\sum_{i=1}^{n-1}A_i^j\sin\left[\omega_p\left(u-u_i\right)\right]\theta\left(u-u_i\right), \tag{24}$$

$$\Phi_{2p}^j(u)=\sin\left(\omega_p u\right)+\sum_{i=1}^{n-1}B_i^j\sin\left[\omega_p\left(u-u_i\right)\right]\theta\left(u-u_i\right), \tag{25}$$

$$A_i^l = \left(1+\sum_{j=1}^{i-1}\gamma_j\right)^{-1}\psi_{li}\left\{-\sin\left(\omega_p u_i\right)+\sum_{j=1}^{i-1}A_j^l\cos\left[\omega_p\left(u_i-u_j\right)\right]\right\}, \tag{26}$$

$$B_i^l = \left(1+\sum_{j=1}^{i-1}\gamma_j\right)^{-1}\psi_{li}\left\{\cos\left(\omega_p u_i\right)+\sum_{j=1}^{i-1}B_j^l\cos\left[\omega_p\left(u_i-u_j\right)\right]\right\}, \tag{27}$$

$$J_p(0)=J_p(u)\Big|_{u=0}, \qquad J_p'(0)=\left.\frac{\partial J_p(u)}{\partial u}\right|_{u=0}, \qquad j,l=1,2.$$

Таким чином $J(u,t)=\sum\limits_{p=1}^{\infty}C_{1p}e^{-\nu_p^2 t}J_p(u)$.

Зазначимо, що умови неперервності квазіпохідних типу (9) відповідають умовам рівності потоків у площинах спряження.

3. Граничні умови другого роду

Нехай на зовнішніх поверхнях $u = 0$, $u = u_n$ шару задано сталі значення потоку

$$J(0,t)=\overline{\mu}_1, \qquad J\left(u_n,t\right)=\overline{\mu}_2. \tag{28}$$

Розкладемо (28) у ряд за фундаментальними функціями $J_p(u)$, які ортогональні з вагою $\left[1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\gamma_i\theta\left(u-u_i\right)\right]\Big/k(u)$. Тоді $\overline{\mu}_i=\sum\limits_{p=1}^{\infty}\overline{\mu}_{ip}J_p(u)$, де $\overline{\mu}_{ip}=\int\limits_0^{u_n}\overline{\mu}_i J_p(u)du\Big/\int\limits_0^{u_n}\left[1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\gamma_i\theta\left(u-u_i\right)\right]\frac{J_p^2(u)}{k(u)}du$, $i=1, 2$.

Задовольняючи цим умовам, розв'язки задачі (20), (28) з урахуванням (22) запишемо так

$$J_p\left(u_n\right)=\overline{\mu}_{1p}\Phi_{1p}^2\left(u_n\right)+\frac{1}{\omega_p}J_p'(0)\Phi_{2p}^2\left(u_n\right)=\overline{\mu}_{2p}. \tag{29}$$

Тут $u_n=L+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(L-x_i\right)\tilde{\gamma}_i$ визначаємо на підставі формули зворотної заміни змінної $u=x+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(x-x_i\right)\tilde{\gamma}_i\theta\left(x-x_i\right)$, де $\tilde{\gamma}_i=\left(1+\sum\limits_{j=1}^{i}\gamma_j\right)^{-1}-\left(1+\sum\limits_{j=1}^{i-1}\gamma_j\right)^{-1}$. Тоді на основі (24)-(28) для $J_p(u)$ отримаємо

$$J_p(u)=\frac{\overline{\mu}_{1p}\Delta_1(u)}{\Delta}+\frac{\overline{\mu}_{2p}\Delta_2(u)}{\Delta}, \qquad \Delta=\Phi_{2p}^2\left(u_n\right)\Phi_{1p}^2(0)-\Phi_{2p}^2(0)\Phi_{1p}^2\left(u_n\right),$$

$$\Delta_1(u)=\Phi_{2p}^2\left(u_n\right)\Phi_{1p}^2(u)-\Phi_{1p}^2\left(u_n\right)\Phi_{2p}^2(u), \Delta_2(u)=\Phi_{2p}^2(u)\Phi_{1p}^2(0)-\Phi_{2p}^2(0)\Phi_{1p}^2(u).$$

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2011, вип. 14, 13-22

Аналогічно, з використанням (23), маємо

$$X_p(u) = -\frac{\Delta_3}{\Delta}\Phi_{1p}^1(u) + \frac{\Delta_4}{\Delta}\Phi_{2p}^1(u),$$

де

$$\Delta_3 = -\frac{1}{\nu_p^2 c_1}\left(\overline{\mu}_{2p}\Phi_{1p}^2(0) - \overline{\mu}_{1p}\Phi_{1p}^2(u_n)\right), \qquad \Delta_4 = \left(-\overline{\mu}_{2p}\Phi_{2p}^2(0) + \overline{\mu}_{1p}\Phi_{2p}^2(u_n)\right),$$

$$\Phi_{1p}^2(u_n) = \cos\left(\omega_p u_n\right) + \sum_{i=1}^{n-1} A_i^2 \sin\left[\omega_p\left(u_n - u_i\right)\right], \qquad \Phi_{1p}^2(0) = 1,$$

$$\Phi_{2p}^2(u_n) = \sin\left(\omega_p u_n\right) + \sum_{i=1}^{n-1} B_i^2 \sin\left[\omega_p\left(u_n - u_i\right)\right], \qquad \Phi_{2p}^2(0) = 0,$$

$$A_i^2 = \left(1 + \sum_{j=1}^{i-1}\gamma_j\right)^{-1} \psi_{2i}\left\{-\sin\left(\omega_p u_i\right) + \sum_{j=1}^{i-1} A_j^2 \cos\left[\omega_p\left(u_i - u_j\right)\right]\right\},$$

$$B_i^2 = \left(1 + \sum_{j=1}^{i-1}\gamma_j\right)^{-1} \psi_{2i}\left\{\cos\left(\omega_p u_i\right) + \sum_{j=1}^{i-1} B_j^2 \cos\left[\omega_p\left(u_i - u_j\right)\right]\right\}.$$

Власне значення ω_p задачі (20), (28) за нульових граничних умов визначається як корінь рівняння

$$\Phi_{2p}^2(u_n) = 0.$$

Для трьох підшарів ($n = 3$; $i = 1,2$) маємо

$$A_1^2 = -\psi_{21}\sin\left(\omega_p u_1\right), \qquad B_1^2 = \psi_{21}\cos\left(\omega_p u_1\right),$$

$$A_2^2 = \left(1+\gamma_1\right)^{-1}\psi_{22}\left\{-\sin\left(\omega_p u_2\right) + A_1^2\cos\left[\omega_p\left(u_2 - u_1\right)\right]\right\},$$

$$B_2^2 = \left(1+\gamma_1\right)^{-1}\psi_{22}\left\{\cos\left(\omega_p u_2\right) + B_1^2\cos\left[\omega_p\left(u_2 - u_1\right)\right]\right\},$$

$$\psi_{21} = \left[\beta_1\left(1 + \frac{\gamma_1}{2}\right) + \gamma_1\left(1 + \frac{\beta_i}{2}\right)\right],$$

$$\psi_{22} = \left(1+\beta_1\right)^{-1}\left[\beta_2\left(1 + \gamma_1 + \frac{\gamma_2}{2}\right) + \gamma_2\left(1 + \beta_1 + \frac{\beta_2}{2}\right)\right],$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{1+\alpha_1}{1+\beta_1}} - 1, \qquad \gamma_2 = \sqrt{\frac{1+\alpha_1+\alpha_2}{1+\beta_1+\beta_2}} - \sqrt{\frac{1+\alpha_1}{1+\beta_1}}.$$

Отже розв'язок вихідної задачі запишемо у вигляді

$$U(u,t)=\sum_{p=1}^{\infty}C_{1p}X_p(u)e^{-\nu_p^2 t}=\sum_{p=1}^{\infty}C_{1p}e^{-\frac{k_1\omega_p^2}{c_1}t}X_p(u)\,. \tag{30}$$

При цьому для потоку маємо

$$J(u,t)=\sum_{p=1}^{\infty}C_{1p}e^{-\nu_p^2 t}J_p(u)=\sum_{p=1}^{\infty}C_{1p}e^{-\frac{k_1\omega_p^2}{c_1}t}J_p(u)\,.$$

У знайденому розв'язку (30) сталі C_{1p} є невідомі. Визначимо їх з початкових умов (2). Для $t = 0$

$$U(u,0)=\sum_{p=1}^{\infty}C_{1p}X_p(u)\,,\qquad J(u,0)=\sum_{p=1}^{\infty}C_{1p}J_p(u)\,. \tag{31}$$

Розкладемо початкову умову $\phi(u)$ в ряд за власними функціями задачі (20), (28). У цій задачі зручно використати фундаментальні функції $J_p(u)$ з вагою $\frac{1}{k(u)}\left[1+\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i\theta\left(u-u_i\right)\right]$. Запишемо

$$\phi(u)=\sum_{p=1}^{\infty}a_pJ_p(u)\,, \tag{32}$$

де з урахуванням умови ортогональності для $J_p(u)$

$$\int_0^{u_n}\frac{1}{k(u)}\left[1+\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i\theta\left(u-u_i\right)\right]J_p(u)J_k(u)du=0\qquad\left(p\neq k\right),$$

коефіцієнт розкладу a_p обчислимо так

$$a_p=\int_0^{u_n}\phi(u)J_p(u)du\Bigg/\int_0^{u_n}\frac{1}{k(u)}\left[1+\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i\theta\left(u-u_i\right)\right]J_p^2(u)du\,.$$

Із виразів (31) і (32), отримуємо $C_{1p}=a_p$.

4. Граничні умови третього роду

Розглянемо випадок конвективного обміну на поверхнях шару. Після розділення змінних маємо

$$J_p(0)=\tilde{\beta}_1\left(X_p(0)-\Theta_{1p}\right),\quad J_p\left(u_n\right)=\tilde{\beta}_2\left(X_p\left(u_n\right)-\Theta_{2p}\right),$$

Θ_{ip} — коефіцієнти розкладу U_{10}, U_{n0} у ряди за власними функціями $X_p(u)$, ортогональними з вагою $c(u)\left[1+\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i\theta\left(u-u_i\right)\right]$. У цьому випадку

$$J_p(0)\Omega_{1p}^1(0)+J_p'(0)\Omega_{2p}^1(0)=-\tilde{\beta}_1\Theta_{1p},$$

$$J_p(0)\Omega_{1p}^2\left(u_n\right)+J_p'(0)\Omega_{2p}^2\left(u_n\right)=-\tilde{\beta}_2\Theta_{2p}.$$

Тут

$$\Omega_{1p}^i(u)=\Phi_{1p}^2(u)-\tilde{\beta}_i\frac{1}{\omega_p k_1}\Phi_{2p}^1(u), \quad \Omega_{2p}^i(u)=\frac{1}{\omega_p}\Phi_{2p}^2(u)-\tilde{\beta}_i\frac{1}{\nu_p^2 c_1}\Phi_{1p}^1(u),$$

де ω_p — корінь характеристичного рівняння $\Omega_{1p}^1(0)\Omega_{2p}^2\left(u_n\right)-\Omega_{2p}^1(0)\Omega_{1p}^2\left(u_n\right)=0$, а $J_p(0)=\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $J_p'(0)=\frac{\Delta_2}{\Delta}$, $\Delta_1=-\tilde{\beta}_1\Theta_{1p}\Omega_{2p}^2\left(u_n\right)+\tilde{\beta}_2\Theta_{2p}\Omega_{2p}^1(0)$, $\Delta_2=-\tilde{\beta}_2\Theta_{2p}\Omega_{1p}^1(0)+$ $+\tilde{\beta}_1\Theta_{1p}\Omega_{1p}^2\left(u_n\right)$.

Шукані функції $X_p(u)$, $J_p(u)$ під час конвективного масообміну з навколишнім середовищем остаточно визначаються так

$$X_p(u)=-\frac{c_1}{\omega_p^2 k_1}\frac{\Delta_2}{\Delta}\Phi_{1p}^1(u)+\frac{1}{\omega_p k_1}\frac{\Delta_1}{\Delta}\Phi_{2p}^1(u),$$

$$J_p(u)=\frac{\Delta_1}{\Delta}\Phi_{1p}^2(u)+\frac{1}{\omega_p}\frac{\Delta_2}{\Delta}\Phi_{2p}^2(u).$$

Подібно розв'язуються задачі тепло- та масопереносу за інших крайових умов.

Висновки. Застосування апарату узагальнених функцій під час розв'язування задач, які описуються рівняннями параболічного типу, в неоднорідних шаруватих середовищах і використання перетворення аргументу дає можливість побудувати аналітичний розв'язок у всій області дослідження, а встановлення рекурентних співвідношень — значно спростити процес дослідження задач переносу тепла чи маси. Отримання розв'язків включає інтегрування звичайних диференціальних рівнянь із сингулярними коефіцієнтами.

Література

[1] *Подстригач, Я. С.* Обобщенная термомеханика / *Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно*. — Киев: Наук. думка, 1976. — 309 с.

[2] *Лазарян, В. А.* Обобщенные функции в задачах механики / *В. А. Лазарян , С. И. Конашенко*. — Киев: Наук. думка, 1974. — 189 с.

[3] *Гайвась, Б. И.* Построение характеристических рядов для ступенчатых стержней / *Б. И. Гайвась* // Мат. методы и физ.-мех. поля. — 1979. — Вып. 5. — С. 20-23.

[4] *Тацій, Р.* Моделювання дискретно-континуальних систем / *Р. Тацій, М. Стасюк, В. Мазуренко* // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2009. — Вип. 10. — С. 7-37.
[5] *Тихонов, А. Н.* Уравнения математической физики / *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский*. — Москва, 1972. — 736 с.
[6] *Чапля, Є. Я.* Механо-дифузійні процеси у твердих розчинах. Дифузія в шарі / *Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха*. — Львів: 1995. — 40 с. (Препр. / Центр математичного моделювання НАН України; 20-95).
[7] *Чапля, Є. Я.* Про процеси гетеродифузії в двошаровій смузі / *Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха* // Доповіді НАН України. — 2002. — № 11. — С. 65-70.

Description of transfer processes in stratified bodies using the theory of generalized function

Bogdana Gayvas, Yevhen Chaplya

The approach to the description of transfer processes in stratified bodies that is based on the statement and solving an initial-boundary value problem with a differential equation with variable coefficients for a whole body and corresponds to the original conjugation problem is proposed. By argument transformation this equation is reduced to an inhomogeneous quasi-differential equation with constant coefficients and a right-hand side as a multiplication of sought functions and the Dirac delta-function in conjugation planes. A solution is obtained in terms of a single analytical expression at any sublayer quantity. The solutions are concretised for heat- and mass transfer problems in a three-layered medium under different boundary conditions.

Описание процессов переноса в слоистых телах с использованием теории обобщенных функций

Богдана Гайвась, Евгений Чапля

Предложен подход к описанию процессов переноса в слоистых телах, который базируется на постановке и решении краевой задачи с дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами, записанного для тела в целом, которое соответствует исходной задаче сопряжения. Это уравнение с помощью преобразования аргумента приведено к неоднородному квазидифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами и правой частью в виде произведения искомых функций на δ*-функцию Дирака в плоскостях сопряжения. Получено решение в виде единого аналитического выражения при произвольном количестве подслоев. Эти решения конкретизированы для задач тепло- и массопереноса в трехслойной среде при различных граничных условиях.*

Отримано 13.09.11