

Про модифікацію моделі руху природного газу в трубопроводі

Ярослав П'янило¹, Назарій Лопух², Олег Браташ³

¹ д. т. н., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудасва, 15, Львів, 79005, e-mail: Pjanylo@cmm.lviv

² к. т. н., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудасва, 15, Львів, 79005, e-mail: lopuh.nazar@gmail.com

³ Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудасва, 15, Львів, 79005, e-mail: olebra31@gmail.com

Для моделювання газотранспортних мереж досліджено способи побудови алгоритмів розрахунку нестационарного руху газу в елементі мережі — трубопроводі. Запропоновано модифікацію динамічного складника в моделі руху газу у трубопроводі та побудовано ітераційну схему розв'язування вихідної та модифікованої систем нелінійних диференціальних рівнянь. Реалізовано скінченно-елементну модель задачі з використанням методу Петрова-Гальоркіна.

Ключові слова: математична модель, нестационарний рух газу, лінеаризація, числові методи.

Вступ. Побудова математичної моделі пов'язана з певними припущеннями щодо самих фізичних процесів, так і щодо використання математичного апарату. Зокрема, для спрощення математичної моделі руху газу в трубопроводах приймають, що зміною густини газу з часом можна нехтувати. Очевидно, що це прийнятне для повільних процесів. Однак для швидкозмінних процесів таке твердження може призвести до втрати адекватності на деяких просторово-часових інтервалах. Далі, з точки зору обчислювальної математики, деякі проблеми виникають внаслідок того, що в розрахунку беруть участь великі та малі числа, що впливає на точність значущих цифр.

Метою роботи є дослідження моделей нестационарного руху газу в трубопроводах і модифікація їх таким чином, щоб у процесі обчислень задіяні числа були приблизно однакового порядку.

1. Постановка задачі

Рух газу в трубопроводі у нестационарному неізотермічному режимі описує взаємозв'язана система диференціальних рівнянь у частинних похідних [2]

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho v^2) = -\rho \left(\frac{\lambda v |v|}{2D} + g \frac{dh}{dx} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho v \left(E + \frac{p}{\rho} \right) \right] = \frac{4k(T_{ep} - T)}{D} - \rho v g \frac{dh}{dx}, \quad (1)$$

де ρ, v, p — густина, швидкість руху і тиск газу відповідно; T_{zp}, T — абсолютні температури ґрунту та газу; g — прискорення вільного падіння; λ — коефіцієнт гідравлічного опору; k — коефіцієнт теплопередачі від труби до ґрунту; D — діаметр труби; h — різниця висотних відміток труби; t — час; x — біжуча координата, $x \in [0, L]$; L — довжина трубопроводу; E — повна енергія одиниці маси газу, означена співвідношенням:

$$E = j - \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}; \quad (2)$$

$$dj = \frac{\partial j}{\partial T} dT + \frac{\partial j}{\partial p} dp = C_p dT + \left[\frac{1}{\rho} - T \left(\frac{\partial(1/\rho)}{\partial T} \right)_p \right] dp; \quad C_p = \left(\frac{\partial j}{\partial T} \right) \rho. \quad (3)$$

У формулах (2), (3): j — внутрішня енергія одиниці маси газу; а C_p — питома теплоємність.

До системи рівнянь долучаємо таке рівняння стану газу

$$p = \rho z R T. \quad (4)$$

Тут R — газова стала, z — коефіцієнт стисливості, який описує відмінність реального газу від ідеального. Для його обчислення застосовують емпіричну формулу

$$z = \frac{1}{1 + fp},$$

де p вимірюють в атмосферах, а $f = (24 - 0,21t^\circ\text{C}) \cdot 10^{-4}$, $t^\circ\text{C}$ — температура газу за Цельсієм.

За ізотермічного наближення для опису руху газу в трубопроводі використовуємо систему взаємозв'язаних диференціальних рівнянь у частинних похідних

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda \rho v^2}{2D} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Тут c — швидкість звуку в газі.

Перше рівняння системи рівнянь (5) отримано для випадку, коли зміною густини газу з часом можна знехтувати. У протилежному випадку ця система рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda \rho v^2}{2D} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Систему рівнянь (6) записано відносно ключових функцій p та v . У практично важливих задачах тиски p є величини порядку 10^6 , а швидкості — величини порядку десяти [1]. Під час дослідження системи рівнянь (6) числовими методами варто записати її на такі розв'язувальні функції, що будуть набувати значення однакових порядків. Така зміна суттєво покращить стійкість числових методів, що застосовується в алгоритмі розв'язування. З цією метою використаємо співвідношення

$$\rho = \frac{p}{zRT}$$

і введемо позначення $f = \ln(p)$ та $\gamma = zRT$.

Тоді систему (6) запишемо так

$$\begin{cases} \gamma \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\lambda v^2}{2D} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \\ v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Надалі модель, що базується на системі рівнянь (5), називатимемо моделлю А, а ту, що базується на системі рівнянь (7), — моделлю Б.

За вихідний стан на початку розглядуваного нестационарного процесу приймаємо стаціонарний стан газу. Тому задача математичної фізики в цьому випадку полягає в такому: знайти розв'язок системи рівнянь (7) за відомого початкового стаціонарного розподілу тиску та граничних умов, заданих на тиск або швидкість газу.

На практиці, зазвичай, легше керувати зміною тиску на кінцях трубопроводу, ніж швидкістю руху газу. Такі зміни достатньо добре описуються експоненціальним законом

$$p_o(t) = p_{on} + (p_o - p_{on})e^{-\gamma_o t}, \quad (8)$$

$$p_e(t) = p_{en} + (p_e - p_{en})e^{-\gamma_e t}, \quad (9)$$

відповідно на вході та виході трубопроводу. У цьому випадку p_o , p_{on} і γ_o — тиски газу у вихідному й усталеному в часі стаціонарному стані течії газу та параметр, який характеризує швидкість переходу з одного стану в інший на початку трубопроводу; p_e , p_{en} , γ_e — аналогічні параметри в кінці трубопроводу.

2. Формулювання лінеаризованої крайової задачі

Розглянемо один зі способів лінеаризації системи рівнянь (7), який дає змогу будувати ітераційний метод розв'язування сформульованої крайової задачі.

У першому рівнянні системи (7) другий доданок запишемо так

$$\frac{\lambda v^2(x)}{2D} = \tilde{v} \frac{\lambda v(x)}{2D},$$

а в другому рівнянні

$$v \frac{\partial f}{\partial x} = \tilde{v} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Тут \tilde{v} — наближене значення швидкості газу, за яке в ітераційному процесі можна прийняти значення, одержане на попередньому кроці ітерації.

Якщо ввести позначення

$$c_1 = zRT, \quad c_2 = \frac{\lambda \tilde{v}}{2D}, \quad c_3 = \tilde{v}, \quad c_4 = \frac{zRT}{c^2},$$

то вихідній системі надамо вигляду

$$\begin{cases} c_1 \frac{\partial f}{\partial x} + c_2 v + \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \\ c_3 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + c_4 \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Для знаходження розв'язку системи рівнянь (10) необхідно узгодити початкові та граничні умови. Тому, задача математичної фізики полягатиме у знаходженні розв'язку системи рівнянь (10) за граничних умов (8), (9) і початкових умов

$$v_{st}(x) = v_0 \exp\left(\frac{c_2 c_3 x}{c_1}\right), \quad f_{st}(x) = \frac{1}{c_3} \left(c_3 f_0 + v_0 - v_0 \exp\left(\frac{c_2 c_3 x}{c_1}\right) \right), \quad (11)$$

які є розв'язком системи (10) у стаціонарному випадку. Тут v_0, f_0 — граничні параметри.

Таким чином нестаціонарний рух газу в трубопроводі описується лінеаризованою системою рівнянь (10) за граничних і початкових умов (8), (9), (11).

Зазначимо, що систему рівнянь (10) можна подати в операторному вигляді

$$W(\mathbf{U}) = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} - \mathbf{V} \mathbf{U} = 0. \quad (12)$$

Тут W — диференціальний оператор, який містить просторові та часові похідні;

$$\mathbf{U} = (f, v)^T; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_4 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ c_3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & -c_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'язування задачі методом Петрова-Гальоркіна

Для розв'язування системи рівнянь (12) використаємо схему Гальоркіна в поєднанні з кінцево-різницевою дискретизацією за часом [2-4].

Область визначення аргументів $G = \{a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T\}$ дискретизуємо набором точок із координатами

$$x_j = j\Delta x, \quad j = \overline{1, N}, \quad \Delta x = \frac{b-a}{N}; \quad t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Виберемо пробний розв'язок \bar{U}^* у вигляді

$$\bar{U}^* = \sum_{j=1}^N \bar{U}_j^* \varphi_j(x). \quad (13)$$

Для простоти вважаємо, що $\varphi_j(x)$ — лінійні базисні функції на однорідній сітці. Тоді на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ маємо:

$$\bar{U}^* = \bar{U}_k^* \varphi_k + \bar{U}_{k+1}^* \varphi_{k+1}. \quad (14)$$

Далі обчислюємо члени рівнянь, які містять скалярні добутки

$$(W(\bar{U}^*), \psi_k(x)) = 0, \quad k = \overline{1, N}. \quad (15)$$

Тут $\psi_k(x)$ — пробні функції, які інтерполюємо функціями φ_k та χ_k

$$\begin{aligned} \psi_k &= \varphi_k + \alpha(\chi_k - \varphi_k); \\ \chi_k(\xi) &= \begin{cases} 4 - 6\xi, & \text{для } 0 < \xi < 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \end{aligned}$$

У разі використання дискретизації за часом $\frac{\partial \bar{U}^*}{\partial t} = \frac{\bar{U}^{*n+1} - \bar{U}^{*n}}{\Delta t}$ рівняння (15)

запишемо так

$$(A^n(\bar{U}^{*n+1} - \bar{U}^{*n}) + B^n \Delta t \bar{U}^{*n+1} - V^n \Delta t \bar{U}^{*n+1}, \psi_k(x)) = 0, \quad k = \overline{1, N}. \quad (16)$$

Наближені розв'язки \bar{U}^{*n} та \bar{U}^{*n+1} згідно з (14) мають вигляд

$$\bar{U}^{*n} = \sum_{j=1}^N \bar{U}_j^{*n} \varphi_j(x), \quad \bar{U}^{*n+1} = \sum_{j=1}^N \bar{U}_j^{*n+1} \varphi_j(x). \quad (17)$$

Підставивши (17) у співвідношення (16), отримаємо таку систему рівнянь

$$\sum_{j=0}^N \left[A^n (w_j^{n+1} - w_j^n) (\varphi_j, \psi_k) + B^n \Delta t w_j^{n+1} (\varphi'_j, \psi_k) - V^n \Delta t w_j^{n+1} (\varphi_j, \psi_k) \right] = 0.$$

Оскільки

$$(\varphi_i, \psi_j) = \int_a^b \varphi_i \psi_j dx = \int_0^1 \varphi_i(\xi) \psi_j(\xi) J d\xi,$$

$$(\varphi'_i, \psi_j) = \int_a^b \varphi'_i \psi_j dx = \int_0^{\xi} \varphi'_i(\xi) \psi_j(\xi) J d\xi,$$

то система алгебричних рівнянь для визначення \bar{U}_j^{n+1*} наближеного розв'язку (13) набуде вигляду

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{6}(1+5\alpha) \cdot (A^n - V^n \Delta t) - \frac{1}{2}(1+\alpha) \frac{\Delta t}{\Delta x} B^n \right] \bar{U}_{k-1}^{*n+1} + \\ & + \frac{1}{3}(2+\alpha)(A^n - V^n \Delta t) \bar{U}_k^{*n+1} + \left[\frac{1}{6}(1-\alpha)(A^n - V^n \Delta t) + \frac{1}{2}(1+\alpha) \frac{\Delta t}{\Delta x} B^n \right] \bar{U}_{k+1}^{*n+1} = \\ & = \frac{1}{6}(1+5\alpha) \bar{U}_{k-1}^{*n} + \frac{1}{3}(2+\alpha) \bar{U}_k^{*n} + \frac{1}{6}(1-\alpha) \bar{U}_{k+1}^{*n}, \quad k = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Утворена матриця системи є шестидіагональна. Її можна розв'язати методом прогонки.

4. Числовий експеримент

Числовий експеримент проводився для трубопроводу завдовжки 100 км, діаметром 1,388 м за таких значень параметрів: $\lambda = 0,009$, $\rho_0 = 0,682 \text{ кг/м}^3$, $T = 313 \text{ }^\circ\text{K}$, $R = 506,7 \text{ Дж/кг }^\circ\text{K}$, $z = 0,87$. Граничні умови задавали на тиск газу, який змінювався з часом від 60 до 70 атм на вході та від 44,37 до 50 атм на виході. Крок за часом $dt = 10 \text{ с}$, кількість елементів розбиття за координатою $kx = 8$. Порівнюються результати, отримані за використання моделей А та Б за однакових крайових умов.

Значення відборів газу, отриманих із розрахунків моделей А та Б, відрізняються максимально на 5 % (рис. 1). Це пояснюється тим, що у сформульованих задачах для порівняння задавались однакові граничні умови на тиски для різних моделей. Стационарний розподіл тиску для моделей А та Б відрізняється на 0,8 %. Тому на виході трубопроводу початкове значення тиску та значення тиску, задане

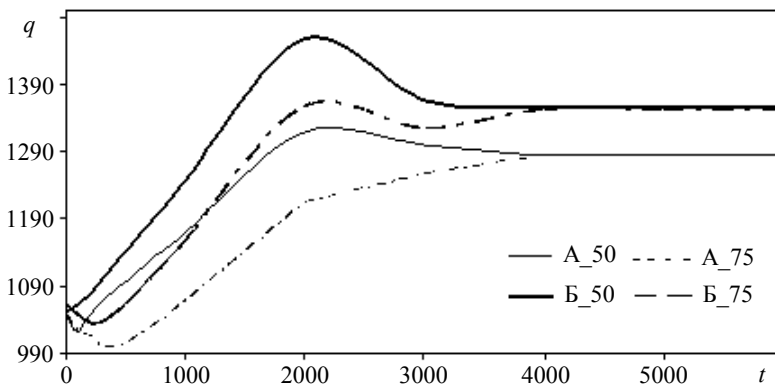


Рис. 1. Значення об'ємних відборів газу на відмітках 50 км і 75 км у разі використання моделей А та Б

граничною умовою, не співпадають. Штучне накладання некоректної граничної умови на тиск призводить до того, що значення відборів у цих двох схемах відрізняються до 5 %.

Проведені числові експерименти показують, що для стабільного розрахунку газодинамічних параметрів (запасу газу, розподілу тиску тощо) точність задання крайових умов необхідно узгоджувати з точністю, необхідною для розв'язування відповідної практичної задачі.

Відхилення значень отриманих результатів у разі використання різних моделей менші під час виходу процесу на новий стаціонарний режим, ніж всередині процесу (див. таблицю), що свідчить про стійкість використаних методів розв'язування.

Таблиця

Значення тисків для моделей А та Б

X	25		50		75	
модель t	А	Б	А	Б	А	Б
0	55,893	55,922	51,923	51,988	48,084	48,116
100	56,273	56,286	52,289	52,312	48,375	48,411
200	56,541	56,552	52,417	52,458	48,503	48,551
300	56,879	56,883	52,644	52,686	48,686	48,736
400	57,253	57,265	52,923	52,969	48,907	48,952
500	57,646	57,658	53,229	53,271	49,146	49,191
600	58,051	58,064	53,549	53,588	49,395	49,456
700	58,461	58,475	53,877	53,911	49,650	49,697
800	58,874	58,886	54,209	54,244	49,907	49,954
900	59,289	59,299	54,542	54,582	50,165	50,208
1000	59,704	59,721	54,877	54,899	50,424	50,460
2000	63,858	63,872	58,226	58,257	53,012	53,048
3000	64,879	64,892	59,788	59,811	54,807	54,841
4000	65,035	65,045	60,027	60,056	55,008	55,042
5000	65,035	65,045	60,028	60,057	55,008	55,042

Висновки. Отже, спосіб знаходження розподілу тиску та швидкості газу в трубопроводі наведено для використання його в разі розрахунку режимів роботи газотранспортних мереж. Важливого значення в цьому разі набувають такі параметри обчислювального процесу як стійкість числових схем та узгодження початкових і граничних умов. Використання модифікації вихідної моделі дає змогу побудувати ітераційні схеми розв'язування нелінійних систем диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Література

- [1] Селезнев, В. Е. Методы и технологии численного моделирования газопроводных систем / В. Е. Селезнев, В. В. Алешин, Г. С. Клишин. — Москва: Едиториал УРСС, 2002. — 448 с.
- [2] Алгоритми розрахунку гідродинамічних параметрів течії газу в трубопроводах (1) / Н. Лопух, М. Прутула, Я. П'янило, Я. Савула // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. — 2007. — Вип. 12. — С. 108-117.
- [3] Лопух, Н. Вплив неусувної похибки на розрахунок газодинамічних параметрів руху газу в трубопроводі / Н. Лопух // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2010. — Вип. 11. — С. 97-104.
- [4] Miller, J. An exponentially fitted finite element volume method for the numerical solution of 2D unsteady incompressible flow problems / J. Miller, S. Wang // J. Comput. Phys. — 1994. — Vol. 115, Issue 1. — P. 56-64.

About the modification of model of natural gas motion in the pipeline

Yaroslav P'yanylo, Nazariy Lopuh, Oleh Bratash

For modelling gas-transport networks ways of construction of calculation algorithms of non-stationary gas motion in a network element the pipeline has been investigated. The modification of the dynamic component in the model of gas motion in the pipeline has been offered and iterative solution scheme for the original and modified systems of nonlinear differential equations has been constructed. Finite-element model of the problem with use a Petrov-Galerkin method has been realized.

О модификации модели движения природного газа в трубопроводе

Ярослав П'янило, Назарий Лопух, Олег Браташ

Для моделирования газотранспортных сетей исследованы способы построения алгоритмов расчета нестационарного движения газа в элементе сети — трубопроводе. Предложена модификация динамической составляющей в модели движения газа в трубопроводе и построена итерационная схема решения исходной и модифицированной систем нелинейных дифференциальных уравнений. Реализована конечно-элементная модель задачи с использованием метода Петрова-Галеркина.

Отримано 14.05.12