

Контактна задача теплопровідності для двох півпросторів з періодично розташованими шорсткими ділянками

Костянтин Чумак

к. ф.-м. н., Інститут прикладних проблеми механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Досліджено температурне поле двох півпросторів, які контактують за наявності на межі одного з них періодично розташованих ділянок із шорсткою поверхнею. Зумовлений шорсткістю неідеальний тепловий контакт тіл змодельовано контактним термоопором, що залежить від номінального тиску. Сформульовану задачу зведено до сингулярного інтегро-диференціального рівняння типу Прандтля відносно стрибка температури між поверхнями тіл, яке розв'язано числово. Проаналізовано вплив інтенсивності силового навантаження та довжини шорстких ділянок на стрибок температури між шорсткими поверхнями й ефективний контактний термоопір періодичної системи шорсткостей.

Ключові слова: тепловий контакт, шорсткість, усереднений стрибок температури, ефективний контактний термоопір, сингулярне інтегро-диференціальне рівняння типу Прандтля.

Вступ. Розвиток сучасної техніки супроводжується інтенсивним зростанням теплових навантажень вузлів і деталей конструкцій. На їх тепловий режим суттєво впливає контактний термоопір, зумовлений недосконалістю поверхонь, що контактують. Водночас, із метою покращення функціональних і трибологічних властивостей, в інженерній практиці на сьогодні широкого використання набуло формування регулярного рельєфу поверхонь тіл, що зумовлює локальну зміну межових характеристик, зокрема, поверхневого термоопору. Тому, з практичної точки зору, актуальним є дослідження теплового контакту тіл за наявності локальних ділянок зі змінним термоопором.

Досліджено тепловий контакт двох півпросторів із хвилястими поверхнями за припущення про теплоізоляцію міжповерхневих зазорів [1] та у разі наявності періодичної системи зазорів, заповнених теплопровідним середовищем [2, 3]. Періодичні контактні задачі теплопровідності для безмежної площини з теплопроникними тріщинами розглянуті в монографії [4].

Раніше вивчено контакт двох півпросторів за наявності на лінії спряження однієї ділянки зі змінним уздовж неї термоопором, незалежним від навантаження [5, 6], та із залежним від навантаження термоопором, зумовленим шорсткістю [7]. Нижче досліджено теплову взаємодію двох півбезмежних тіл із періодично розташованими на поверхні одного з них шорсткими ділянками.

1. Формулювання контактної задачі

Розглянемо контакт двох півпросторів D_1 і D_2 під дією прикладених на безмежності номінального тиску p^∞ і стаціонарного теплового потоку q^∞ (рис. 1). Матеріали

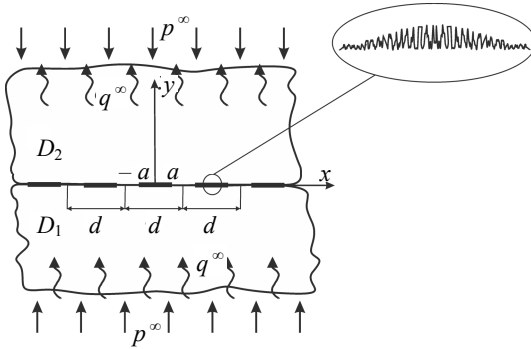


Рис. 1. Тіла до контакту

тіл ізотропні та мають різні коефіцієнти теплопровідності λ_1, λ_2 .

Межа півплощини D_1 шорстка на періодичній системі ділянок $L = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} L_m, L_m = [-a + md, a + md]$ завдовжки $2a$ кожна, які розташовані вздовж усього інтерфейсу з періодом d ($d > 2a$). Наявність шорсткості на кожній із ділянок L_m на макрорівні враховуватимемо контактним термоопором $R(x)$, обернено пропорційним до номінального тиску p^∞

[8, 9]: $R(x) = f(x)/p^\infty$. Тут $f(x)$ — періодична функція, що описує неоднорідність розподілу мікронерівностей уздовж межі.

Контактний термоопір зумовлює неідеальний тепловий контакт тіл на ділянках L_m , внаслідок чого між поверхнями тіл виникає стрибок температури

$$\gamma(x) = T^-(x, 0) - T^+(x, 0), \quad x \in L_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

де T — температура, індексами «-» і «+» позначено граничні значення функції на осі x у нижній і верхній півплощинах. На частині інтерфейсу $L' = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} L'_m, L'_m = (a + md, -a + (m + 1)d)$, де межі тіл гладкі, реалізується ідеальний тепловий контакт.

Крайові умови сформульованої періодичної контактної задачі теплопровідності мають вигляд

$$q_y^- = q_y^+, \quad -\infty < x < \infty; \tag{1}$$

$$T^- = T^+, \quad x \in L'_m, \quad T^- - T^+ = f(x)q_y^+/p^\infty, \quad x \in L_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \tag{2}$$

$$q_x^\infty = 0, \quad q_y^\infty = q^\infty. \tag{3}$$

Тут q_x, q_y — компоненти вектора теплового потоку.

2. Методика розв'язування задачі

Використовуючи метод комплексних потенціалів [4], температуру та теплові потоки подамо через комплексний потенціал $F(z)$ у вигляді, який враховує умови (3) на безмежності [7, 10-12]

$$T = \operatorname{Re} F(z) - \frac{q^\infty}{\lambda_j} y, \quad q_x - iq_y = -\lambda_j F'(z) - iq^\infty, \quad z \in D_j, \quad j = 1, 2.$$

З огляду на періодичність сформульованої задачі, комплексний потенціал $F(z)$ визначається співвідношенням

$$F(z) = -\frac{\lambda_{12}}{2\pi i \lambda_j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-a+md}^{a+md} \frac{\gamma(t)}{t-z} dt = -\frac{\lambda_{12}}{2di\lambda_j} \int_{-a}^a \gamma(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-z)}{d} dt, \quad z \in D_j, \quad (4)$$

де $j = 1, 2$, $\lambda_{12} = 2\lambda_1\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$.

У виразі (4) враховано крайову умову (1) і першу крайову умову в (2). Задовольнивши другу крайову умову в (2), для знаходження стрибка температури $\gamma(x)$ між шорсткими поверхнями одержимо сингулярне інтегро-диференціальне рівняння (СІДР) з ядром Гільберта

$$\frac{p^\infty}{f(x)} \gamma(x) - \frac{\lambda_{12}}{2d} \int_{-a}^a \gamma'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt = q^\infty, \quad |x| < a. \quad (5)$$

Здійснивши заміну змінних $\xi = \operatorname{tg}(\pi x/d)$, $\eta = \operatorname{tg}(\pi t/d)$, $\alpha = \operatorname{tg}(\pi a/d)$, СІДР (5) з ядром Гільберта трансформуємо в СІДР типу Прандтля з ядром Коші

$$\frac{p^\infty}{(1+\xi^2)f(\xi)} \gamma(\xi) - \frac{\lambda_{12}}{2d} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\gamma'(\eta)}{\eta-\xi} d\eta = \frac{q^\infty}{1+\xi^2}, \quad |\xi| < \alpha. \quad (6)$$

Функцію $f(\xi)$, що враховує неоднорідний розподіл мікронерівностей уздовж межі, задамо у вигляді

$$f(\xi) = r \left(1 - \xi^2/\alpha^2\right)^{3/2} / \left(1 + \xi^2\right), \quad r = \operatorname{const} > 0.$$

Функція $f(\xi)$ дорівнює нулеві разом зі своєю похідною на краях ділянки з термоопором ($f(\pm\alpha) = f'(\pm\alpha) = 0$). Тому стрибок температури $\gamma(\xi)$ повинен задовольняти таким умовам на краях цих ділянок [7, 10-12]

$$\gamma(\pm\alpha) = 0, \quad \gamma'(\pm\alpha) = 0.$$

У праці [12] розроблено аналітично-числову методику розв'язування сингулярного інтегро-диференціального рівняння типу Прандтля саме для такого класу функцій $f(\xi)$. Тому цю методику використано для знаходження розв'язку рівняння типу Прандтля (6).

3. Числові результати та їх аналіз

Інтегральний вплив періодичної системи шорстких ділянок на температуру тіл відчутний в обох тілах навіть на далеких відстанях від лінії спряження ($y \rightarrow \pm\infty$) і проявляється у вигляді усередненого стрибка температури між ними

$$\gamma_{av} = \frac{1}{d} \int_{-a}^a \gamma(x) dx .$$

Знаючи усереднений стрибок температури γ_{av} та значення теплового потоку q^∞ , можна визначити [8, 9, 13-15] ефективний контактний термоопір R_{eff} тіл із періодичною системою шорстких ділянок: $R_{eff} = \gamma_{av} / q^\infty$.

Для числових розрахунків введені такі безрозмірні величини: координата $\tilde{x} = x/d$, півдовжина шорстких ділянок $\tilde{a} = a/d$, стрибок температури $\tilde{\gamma} = (\lambda_{12}/d q^\infty) \gamma$, номінальний тиск $\tilde{p}^\infty = (d/r\lambda_{12}) p^\infty$, усереднений стрибок температури $\tilde{\gamma}_{av} = (\lambda_{12}/d q^\infty) \gamma_{av}$ та ефективний контактний термоопір $\tilde{R}_{eff} = (\lambda_{12}/d) R_{eff} = \tilde{\gamma}_{av}$.

Криві на рис. 2 відображають вплив номінального тиску \tilde{p}^∞ на розподіл стрибка температури $\tilde{\gamma}$ між поверхнями тіл на шорсткій ділянці завдовжки $2\tilde{a} = 0,5$ ($\tilde{p}^\infty = 30; 20; 10$ криві 1-3 відповідно). З рисунка видно, що стрибок температури збільшується зі зменшенням значення номінального тиску \tilde{p}^∞ . Рис. 3 ілюструє розподіл стрибка температури $\tilde{\gamma}$ для шорстких ділянок різної довжини за фіксованого значення номінального тиску $\tilde{p}^\infty = 20$ ($\tilde{a} = 0,15; 0,25; 0,35$ криві 1-3 відповідно). Чим більшою є довжина ділянок із шорсткістю, тим більшим є максимальне значення стрибка температури $\tilde{\gamma}$.

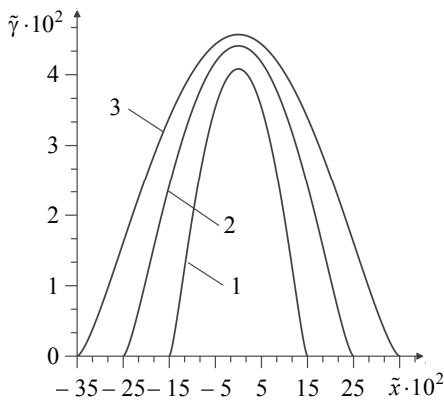


Рис. 2. Вплив значення номінального тиску на стрибок температури між шорсткими поверхнями

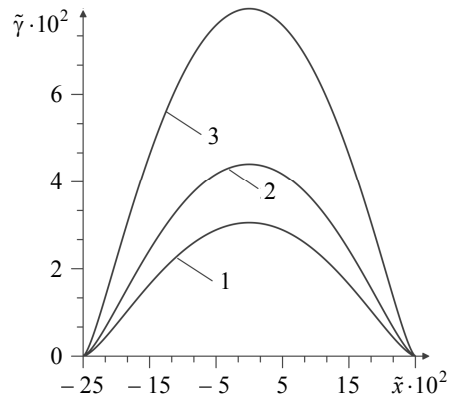


Рис. 3. Стрибок температури між поверхнями тіл на шорстких ділянках різної довжини

Рис. 4 ілюструє залежність ефективного контактного термоопору \tilde{R}_{eff} від номінального тиску \tilde{p}^∞ для різних значень півдовжини \tilde{a} шорстких ділянок ($\tilde{a} = 0,15; 0,25; 0,35$ криві 1-3 відповідно). Бачимо, що збільшення \tilde{p}^∞ і зменшення \tilde{a} призводить до зменшення термоопору \tilde{R}_{eff} . Також виявлено, що для розглянутого діапазону зміни \tilde{a} залежність термоопору \tilde{R}_{eff} від півдовжини \tilde{a} є близькою до лінійної.

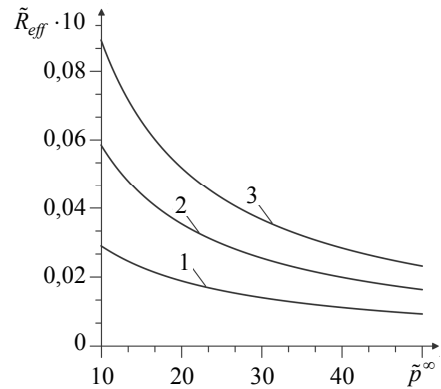


Рис. 4. Залежність ефективного контактного термоопору від номінального тиску

Висновки. Розглянуто контактну задачу теплопровідності про взаємодію двох півбезмежних тіл за наявності на межі одного з них періодично розташованих ділянок із шорсткими поверхнями. Вплив шорсткості поверхні на теплообмін між тілами на макрорівні враховано контактним термоопором, який залежить від координати межі й обернено пропорційний до номінального тиску.

Сформульовану задачу теплопровідності зведено до сингулярного інтегродиференціального рівняння типу Прандтля відносно стрибка температури між шорсткими поверхнями тіл. На основі числового розв'язку цього рівняння проаналізовано вплив зовнішнього навантаження та відносної довжини шорстких ділянок на стрибок температури й ефективний контактний термоопір контактної пари. Виявлено, що максимальне значення стрибка температури між поверхнями тіл та ефективний контактний термоопір періодичної системи шорсткостей зростають зі зменшенням номінального тиску та збільшенням довжини шорстких ділянок.

Література

- [1] *Dundurs, J.* Heat conduction between bodies with wavy surfaces / *J. Dundurs, C. Panek* // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 1976. — Vol. 19, No 7. — P. 731-736.
- [2] *Das, A. K.* Analytical solution for constriction resistance with interstitial fluid in the gap / *A. K. Das, S. S. Sadhal* // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 1998. — Vol. 34, No 2-3. — P. 111-119.
- [3] *Das, A. K.* The effect of interstitial fluid on thermal constriction resistance / *A. K. Das, S. S. Sadhal* // *ASME. J. Heat Transfer.* — 1992. — Vol. 14, No 4. — P. 1045-1048.
- [4] *Кут, Г. С.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / *Г. С. Кут, М. Г. Кривицун.* — Киев: Наукова думка, 1983. — 280 с.
- [5] *Криштафович, А. А.* Термоупругий контакт с термосопротивлением анизотропных полупространств / *А. А. Криштафович, Р. М. Мартыняк* // *Прикл. механика.* — 1998. — Т. 34, № 7. — С. 27-33.
- [6] *Мартыняк, Р. М.* Термопружне розшарування тіл за наявності теплопроникного заповнювача міжконтактного просвіту / *Р. М. Мартыняк, К. А. Чумак* // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* — 2009. — Т. 45, № 4. — С. 45-52.
- [7] *Мартыняк, Р. М.* Термоупругость контактной пары при наличии шероховатости на локальном участке сопряженных поверхностей / *Р. М. Мартыняк, К. А. Чумак* // *Теор. и прикл. механика.* — 2009. — Вып. 45. — С. 32-38.

- [8] Шлыков, Ю. П. Контактное термическое сопротивление / Ю. П. Шлыков, Е. А. Ганин, С. Н. Царевский. — Москва: Энергия, 1977. — 328 с.
- [9] Yovanovich, M. M. Four decades of research on thermal contact, gap, and joint resistance in microelectronics / M. M. Yovanovich // IEEE Trans. Compon. Packag. Technol. — 2005. — Vol. 28, No 2. — P. 182-206.
- [10] Чумак, К. Вплив теплопровідності заповнювача міжповерхневого просвіту на термопружний контакт тіл за теплового потоку, спрямованого до матеріалу з більшою термічною дистортивністю / К. Чумак, Р. Мартиняк // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2009. — Вип. 9. — С. 160-169.
- [11] Martynyak, R. Effect of heat-conductive filler of interface gap on thermoelastic contact of solids / R. Martynyak, K. Chumak // Int. J. Heat Mass Transfer. — 2012. — Vol. 55, No 4. — P. 1170-1178.
- [12] Мартиняк, Р. М. Термопружний контакт півпросторів, що мають однакові термічні дистортивності, за наявності теплопроникного міжповерхневого просвіту / Р. М. Мартиняк, К. А. Чумак // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2008. — Т. 51, № 3. — С. 163-175.
- [13] Snaith, B. Thermal resistances of pressed contacts / B. Snaith, S. D. Probert, P. W. O'Callaghan // Appl. Energy — 1986. — Vol. 22, No 1. — P. 31-84.
- [14] Clausing, A. M. Heat transfer at the interface of dissimilar metals – the influence of thermal strain / A.M. Clausing // Int. J. Heat Mass Transfer. — 1966. — Vol. 9, No 8. — P. 791-801.
- [15] Madhusudana, C. V. Contact heat transfer – the last decade / C. V. Madhusudana, L. S. Fletcher // AIAA J. — 1986. — Vol. 24, No 3. — P. 510-523.

Contact problem of heat conduction for two half-spaces with rough zones placed periodically

Kostyantyn Chumak

Thermal field of two half-spaces contacting at presence of rough zones placed periodically on the surface of one of solids has been investigated. The non-ideal thermal contact of bodies caused by roughness has been modelled by contact thermal resistance, which depends on a nominal pressure. The formulated problem has been reduced to the singular integro-differential equation of Prandtl type concerning of temperature jump between the surfaces of bodies, which has been solved numerically. The influence of power load intensity and rough zones length on the temperature jump between the rough surfaces and effective contact thermal resistance of periodic system of rough zones has been analyzed.

Контактная задача теплопроводности для двух полупространств с периодически расположенными шероховатыми участками

Константин Чумак

Исследовано температурное поле двух полупространств, контактирующих при наличии периодически расположенных на границе одного из них участков с шероховатой поверхностью. Обусловленный шероховатостью неидеальный тепловой контакт тел моделируется контактным термосопротивлением, зависящим от номинального давления. Сформулированная задача сведена к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению типа Прандтля относительно скачка температуры между поверхностями тел, которое решено численно. Проанализировано влияние интенсивности силовой загрузки и длины шероховатых участков на скачок температуры между шероховатыми поверхностями и эффективное контактное термосопротивление периодической системы шероховатостей.

Представлено доктором фізико-математичних наук Р. Мартиняком

Отримано 17.05.12