

## Динаміка трубопроводу з рідиною на віброуючій основі

Володимир Лимарченко

КНУ імені Тараса Шевченка, проспект академіка Глушкова, 4е, Київ, e-mail: vladimir\_limarchenko@yahoo.com

*Побудовано математичну модель динаміки трубопроводу з швидкокоруючою рідиною. Трубопровід закріплено на основі, яка здійснює різні типи рухів. Складність задачі зумовлена тим, що рух компонент описується в різних системах змінних (рідина в ейлерових, а пружний трубопровід у лагранжевих) у неінерціальній системі відліку. На основі декомпозиції руху системи за формами коливань побудовано дискретну модель системи в її зв'язаному русі (система звичайних диференціальних рівнянь) і знайдено аналітичний вигляд сили взаємодії між трубопроводом і основою.*

**Ключові слова:** трубопровід, швидкісна течія рідини, рухома основа, дискретна модель системи, зв'язаний рух, сили взаємодії між трубопроводом і основою.

**Вступ.** Задачі про рух трубопроводів із рідиною набули великої актуальності у зв'язку зі застосуванням трубопроводів у транспортній, енергетичній і багатьох інших галузях. Проте, переважна частина досліджень із цієї теми стосується трубопроводів на нерухомій основі [1-3]. Насправді ж трубопроводи з рідиною майже завжди є частиною складніших систем, у яких основа, на якій встановлено трубопровід, також може рухатися. Такі рухи основи можуть бути спричинені як імпульсним, так і вібраційним впливом. Метою пропонованого дослідження є побудова математичної моделі коливань трубопроводу з рідиною на рухомій основі. Робота ґрунтується на підходах, поданих у працях [1, 4, 5], де здійснено мішаний (ейлерово-лагранжевий) опис руху складників системи та виведено дискретну модель системи на основі застосування методу модальної декомпозиції.

### 1. Об'єкт дослідження

Розглянемо задачу про коливання механічної системи, яка складається з трьох складників: рухомої основи (абсолютно твердого тіла) маси  $M_{осн}$ ; трубопроводу, який описується за моделлю балки зі згинною жорсткістю  $EJ$ , площею поперечного перерізу  $F$  та масою  $M_{б} = \mu l$ , де  $\mu$  — лінійна густина, а  $l$  — довжина трубопроводу; й ідеальної, однорідної, нестисливої рідини, яка має масу  $M_{рід} = \rho l$  ( $\rho$  — лінійна густина рідини) та рухається в трубопроводі з заданою швидкістю  $V(t)$ . Маса всієї системи буде:  $M_{сис} = M_{осн} + M_{б} + M_{рід}$ . Приймаємо, що рух системи відбувається в одній площині. Проведений у роботі [5] аналіз

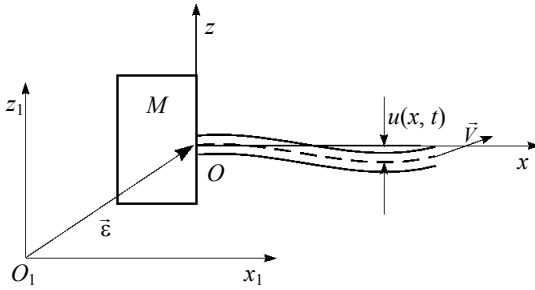


Рис. 1. Модель механічної системи

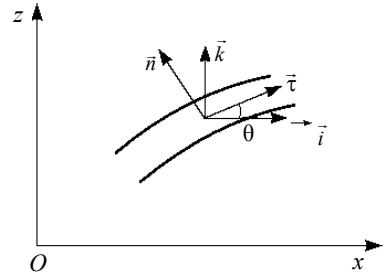


Рис. 2. Елемент труби

показав, що якщо початковий рух системи буде плоским, то він залишиться таким і надалі. Впливом дії сил тяжіння нехтуємо. Загальну схему такої механічної системи наведено на рис. 1.

Для опису руху труби з рідиною введемо дві системи координат: абсолютну, нерухому систему  $O_1x_1z_1$ , і систему, пов'язану з рухом основи трубопроводу  $Oxz$ .

## 2. Варіаційне формулювання задачі

Побудову математичної моделі системи будемо здійснювати на основі варіаційного принципу Гамільтона.

Переміщення основи трубопроводу вздовж відповідних осей позначимо через  $\varepsilon_x, \varepsilon_z$ . Для випадку поступального руху основи, на яку можуть діяти сили  $F_x, F_z$ , одержуємо такі вирази для кінетичної та потенціальної енергій

$$T_{осн} = \frac{1}{2} M_{осн} (\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_z^2), \quad \Pi_{осн} = F_x \varepsilon_x + F_z \varepsilon_z.$$

Для трубопроводу кінетична та потенціальна енергії мають вигляд [5]

$$T_{\sigma} = \frac{1}{2} \mu \int_0^l \left[ \left( \dot{\varepsilon}_z + \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \dot{\varepsilon}_x^2 \right] \sqrt{1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} dx,$$

$$\Pi_{\varepsilon z} = \frac{1}{2} EJ \int_0^l \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \sqrt{1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} dx, \quad \Pi_{cm} = \frac{1}{2} EF \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 u dx.$$

Тут  $u(x, t)$  — поперечне зміщення точок трубопроводу по осі  $Oz$ ,  $\Pi_{\varepsilon z}$  — потенціальна енергія згинних коливань,  $\Pi_{cm}$  — потенціальна енергія, пов'язана з повздовжнім стисканням матеріалу трубопроводу, крапка над символом означає повну похідну за часом.

Кінетична та потенціальна енергії рідини відповідно дорівнюють

$$T_{pid} = \frac{1}{2} \rho \int_0^l v^2 \sqrt{1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} dx, \quad \Pi_{pid} = \frac{1}{2} PF \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Потенціальна енергія рідини зумовлена тиском рідини на стінки трубопроводу.

Для отримання кінетичної енергії рідини розглянемо елемент труби, який повернуто на кут  $\theta$  відносно осі  $Ox$  (рис. 2). Тоді

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sin \theta = \frac{\partial u / \partial x}{\sqrt{1 + (\partial u / \partial x)^2}}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial u / \partial x)^2}}.$$

Знайдемо швидкість рідини в абсолютній системі координат. Оскільки рідина ідеальна та вільно ковзає вздовж трубопроводу, то вплив на її швидкість матимуть лише нормальні складники швидкості труби

$$v_x = V \cos \theta + V_{n_x}^{mp}, \quad v_z = V \sin \theta + \frac{du}{dt} + V_{n_z}^{mp}.$$

$$\text{Тут } \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} v_x.$$

Щоб отримати нормальні відносно траєкторії руху рідини складники швидкості труби, спроекуємо швидкість  $V_n = \dot{\varepsilon} \cdot \vec{n}$  на осі  $Ox, Oz$ . Матимемо

$$V_{n_x}^{TP} = \frac{1}{1 + \dot{u}^2} \left[ \dot{\varepsilon}_x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \dot{\varepsilon}_z \frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad V_{n_z}^{TP} = \frac{1}{1 + \dot{u}^2} \left( -\dot{\varepsilon}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \dot{\varepsilon}_z \right).$$

Подамо  $du/dt$  як суму частинної та конвективної похідних і врахуємо, що  $\partial u / \partial z = 0$ .

Обчислимо  $v^2 = v_x^2 + v_z^2$ . У результаті матимемо такий вираз для кінетичної енергії рідини

$$\begin{aligned} T_{pid} = & \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left[ V^2 + \dot{\varepsilon}_z^2 + \frac{\partial u}{\partial x} (2V\dot{\varepsilon}_z - 2\dot{\varepsilon}_x\dot{\varepsilon}_z) + 2 \frac{\partial u}{\partial t} \dot{\varepsilon}_z + \right. \\ & + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{7}{2} V^2 - 2V\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_x^2 - \frac{5}{2} \dot{\varepsilon}_z^2 \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} (4V - 2\dot{\varepsilon}_x) + \\ & + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 (5\dot{\varepsilon}_x\dot{\varepsilon}_z - 4V\dot{\varepsilon}_z) - 3\dot{\varepsilon}_z \frac{\partial u}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \\ & \left. + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 \left( 4V\dot{\varepsilon}_z - \frac{13}{8} V^2 - \frac{5}{2} \dot{\varepsilon}_x^2 + \frac{27}{8} \dot{\varepsilon}_z^2 \right) + 3\dot{\varepsilon}_x \frac{\partial u}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Тоді функція Лагранжа всієї системи буде

$$\begin{aligned} L = & T_{pid} + T_{\sigma} + T_{осн} - \Pi_{pid} - \Pi_{\varepsilon z} - \Pi_{cm} - \Pi_{осн} = \\ = & \frac{1}{2} M_{осн} (\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_z^2) - F_x \varepsilon_x - F_z \varepsilon_z + \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left\{ \left( V^2 + \dot{\varepsilon}_z^2 \right) + \frac{\partial u}{\partial x} (2V\dot{\varepsilon}_z - 2\dot{\varepsilon}_x\dot{\varepsilon}_z) + \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial u}{\partial t} \dot{\varepsilon}_z + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left[ \frac{7}{2} V^2 - 2V\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_x^2 - \frac{5}{2} \dot{\varepsilon}_z^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} (4V - 2\dot{\varepsilon}_x) + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 (5\dot{\varepsilon}_x \dot{\varepsilon}_z - 4V \dot{\varepsilon}_z) - 3\dot{\varepsilon}_z \frac{\partial u}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \\
 & + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 \left( 4V \dot{\varepsilon}_z - \frac{13}{8} V^2 - \frac{5}{2} \dot{\varepsilon}_x^2 + \frac{27}{8} \dot{\varepsilon}_z^2 \right) + 3\dot{\varepsilon}_x \frac{\partial u}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \Big\} dx + \\
 & + \frac{1}{2} \mu \int_0^l \left[ \dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_z^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial t} \dot{\varepsilon}_z + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 (\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_z^2) + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \dot{\varepsilon}_z + \right. \\
 & + \left. \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 (\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_z^2) \right] dx - \frac{1}{2} EJ \int_0^l \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx - \\
 & - \frac{1}{4} EJ \int_0^l \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} EF \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 u dx - \frac{1}{2} PF \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Якщо прирівняти  $\varepsilon_x, \varepsilon_z$  до нуля, то ця функція повністю співпадає з результатами роботи [5].

### 3. Побудова дискретної моделі системи

Виконаємо дискретизацію функції Лагранжа за методом Канторовича. Подамо зміщення точок трубопроводу у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^N A_i(x) c_i(t). \quad (2)$$

Тут  $N$  — кількість форм коливань трубопроводу.

Оскільки трубопровід розглядаємо у наближенні балки, то за  $A_i(x)$  беремо форми коливань труби як балки з рідиною. Виходячи з результатів роботи [5], для зручності подальші розрахунки будемо проводити лише з частиною функції Лагранжа (1), в яку входять переміщення труби  $\varepsilon_x, \varepsilon_z$

$$\begin{aligned}
 L_\varepsilon = & \frac{1}{2} M_{оч} (\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_z^2) + F_x \varepsilon_x + F_z \varepsilon_z + \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} (V \dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_x \dot{\varepsilon}_z) dx + \\
 & + (\rho + \mu) \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \dot{\varepsilon}_z dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left[ -2\rho V \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_x^2 \left( \rho + \frac{1}{2} \mu \right) + \dot{\varepsilon}_z^2 \left( \frac{1}{2} \mu - \frac{5}{2} \rho \right) \right] dx - \\
 & - \rho \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \dot{\varepsilon}_x dx + \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 (5\dot{\varepsilon}_x \dot{\varepsilon}_z - 4V \dot{\varepsilon}_z) dx + \frac{\mu - 3\rho}{2} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \dot{\varepsilon}_z dx + \\
 & + \frac{3}{2} \rho \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 \dot{\varepsilon}_x dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 \left[ 4V \dot{\varepsilon}_x \rho + \dot{\varepsilon}_x^2 \left( -\frac{5}{2} \rho - \frac{1}{8} \mu \right) + \dot{\varepsilon}_z^2 \left( \frac{27}{8} \rho - \frac{1}{8} \mu \right) \right] dx.
 \end{aligned}$$

Щоб отримати додаткові члени в рівняннях, які відповідають впливу руху основи на рух трубопроводу, використаємо методику, запропоновану в [5]. Підставимо в  $L_\varepsilon$  розклади (2), виконаємо інтегрування за просторовою змінною та поділимо функцію Лагранжа на  $(\rho + \mu)$

$$\begin{aligned}
 L_\varepsilon = & \frac{1}{\rho + \mu} \left[ \frac{1}{2} M_{осн} (\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_z^2) + F_x \varepsilon_x + F_z \varepsilon_z \right] + \frac{\rho}{\rho + \mu} \sum_{i=1}^N c_i \psi_i^1 (V \dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_x \dot{\varepsilon}_z) + \\
 & + \sum_{i=1}^N c_i \psi_i^0 \dot{\varepsilon}_z + \frac{1}{2(\rho + \mu)} \sum_{i,j=1}^N c_i c_j \beta_{ij}^2 \left[ -2\rho V \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_x^2 \left( \rho + \frac{1}{2} \mu \right) + \dot{\varepsilon}_z^2 \left( \frac{1}{2} \mu - \frac{5}{2} \rho \right) \right] - \\
 & - \frac{\rho}{\rho + \mu} \sum_{i,j=1}^N c_i \dot{c}_j \beta_{ij}^1 \dot{\varepsilon}_x + \frac{\rho}{\rho + \mu} \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j c_k \varphi_{ijk}^3 \frac{5}{2} \dot{\varepsilon}_x \dot{\varepsilon}_z - 2V \dot{\varepsilon}_z + \\
 & + \frac{3\rho}{2(\rho + \mu)} \sum_{i,j,k,l=1}^N c_i c_j c_k \dot{c}_l d_{ijkl}^3 \dot{\varepsilon}_x + \\
 & + \frac{1}{2(\rho + \mu)} \sum_{i,j,k,l=1}^N c_i c_j c_k c_l d_{ijkl}^4 \left[ 4V \dot{\varepsilon}_x \rho - \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_x^2 \left( 5\rho + \frac{1}{4} \mu \right) + \frac{1}{8} \dot{\varepsilon}_z^2 (27\rho - \mu) \right], \\
 \psi_i^0 = & \int_0^l A_i dx, \quad \psi_i^1 = \int_0^l A_i' dx, \quad N_i = \int_0^l A_i^2 dx, \quad \beta_{ij}^1 = \int_0^l A_i' A_j dx, \quad \beta_{ij}^2 = \int_0^l A_i' A_j' dx, \\
 \kappa_i^4 = & \int_0^l (A_i'')^2 dx, \quad \varphi_{ijk}^2 = \int_0^l A_i' A_j' A_k dx, \quad \varphi_{ijk}^3 = \int_0^l A_i' A_j' A_k' dx, \quad d_{ijkl}^2 = \int_0^l A_i' A_j' A_k A_l dx, \\
 d_{ijkl}^3 = & \int_0^l A_i' A_j' A_k' A_l dx, \quad d_{ijkl}^4 = \int_0^l A_i' A_j' A_k' A_l' dx, \quad d_{ijkl}^6 = \int_0^l A_i'' A_j'' A_k' A_l' dx.
 \end{aligned}$$

Введені величини є квадратурами від відомих форм коливань по відомій області та визначаються чисельно.

Отже, фактично функцію Лагранжа (1) подано у вигляді  $L = L_1 + L_\varepsilon$ . Внаслідок рухомості основи в рівняння руху трубопроводу додатково входять такі доданки

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L_\varepsilon}{\partial \dot{c}_r} = & \psi_r^0 \dot{\varepsilon}_z - \frac{\rho}{\rho + \mu} \sum_{i=1}^N c_i \beta_{ir}^1 \dot{\varepsilon}_x + \frac{\mu - 3\rho}{2(\rho + \mu)} \sum_{i,j=1}^N c_i c_j \varphi_{ijr}^2 \dot{\varepsilon}_z + \\
 & + \frac{3\rho}{2(\rho + \mu)} \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j c_k d_{ijk}^3 \dot{\varepsilon}_x, \\
 \frac{\partial L_\varepsilon}{\partial c_r} = & \frac{\rho}{\rho + \mu} \psi_r^1 (V \dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_x \dot{\varepsilon}_z) + \\
 & + \frac{1}{\rho + \mu} \sum_{i=1}^N c_i \beta_{ir}^2 \left[ -2\rho V \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_x^2 \left( \rho + \frac{1}{2} \mu \right) + \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_z^2 (\mu - 5\rho) \right] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\rho}{\rho+\mu} \sum_{i=1}^N \dot{c}_i \beta_{ir}^1 \dot{\varepsilon}_x + \frac{3\rho}{\rho+\mu} \sum_{i,j=1}^N c_i c_j \Phi_{ijr}^3 \left( \frac{5}{2} \dot{\varepsilon}_x \dot{\varepsilon}_z - 2V \dot{\varepsilon}_z \right) + \\
 & + \frac{\mu-3\rho}{\rho+\mu} \sum_{i,j=1}^N c_i \dot{c}_j \Phi_{ijr}^2 \dot{\varepsilon}_z + \frac{9\rho}{2(\rho+\mu)} \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j \dot{c}_k d_{ijrk}^3 \dot{\varepsilon}_x + \\
 & + \frac{2}{\rho+\mu} \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j c_k d_{ijkr}^4 \left[ -4\rho V \dot{\varepsilon}_x - \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_x^2 \left( 5\rho + \frac{1}{4} \mu \right) + \frac{1}{8} \dot{\varepsilon}_z^2 (27\rho - \mu) \right], \\
 & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{\varepsilon}}{\partial \dot{c}_r} \right) = \Psi_r^0 \ddot{\varepsilon}_z - \frac{\rho}{\rho+\mu} \sum_{i=1}^N \dot{c}_i \beta_{ir}^1 \dot{\varepsilon}_x - \frac{\rho}{\rho+\mu} \sum_{i=1}^N \dot{c}_i \beta_{ir}^1 \ddot{\varepsilon}_x + \\
 & + \frac{\mu-3\rho}{\rho+\mu} \sum_{i,j=1}^N \dot{c}_i \dot{c}_j \Phi_{ijr}^2 \dot{\varepsilon}_z + \frac{\mu-3\rho}{2(\rho+\mu)} \sum_{i,j=1}^N c_i c_j \Phi_{ijr}^2 \ddot{\varepsilon}_z + \\
 & + \frac{9\rho}{2(\rho+\mu)} \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j c_k d_{ijkr}^3 \dot{\varepsilon}_x + \frac{3\rho}{2(\rho+\mu)} \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j c_k d_{ijkr}^3 \ddot{\varepsilon}_x.
 \end{aligned}$$

Для основи, рух якої визначається параметрами  $\varepsilon_x, \varepsilon_z$ , одержимо такі рівняння

$$M_{cuc} \ddot{\varepsilon}_x = F_x + R_x; \quad M_{cuc} \ddot{\varepsilon}_z = F_z + R_z, \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned}
 R_x = & \rho \sum_{i=1}^N c_i \Psi_i^1 \ddot{\varepsilon}_z + \rho \sum_{i=1}^N \dot{c}_i \Psi_i^1 \dot{\varepsilon}_z - \sum_{i,j=1}^N c_i c_j \beta_{ij}^2 \left[ \ddot{\varepsilon}_x \left( \rho + \frac{1}{2} \mu \right) - \rho \dot{V} \right] - \\
 & - 2 \sum_{i,j=1}^N c_i \dot{c}_j \beta_{ij}^2 \left[ \dot{\varepsilon}_x \left( \rho + \frac{1}{2} \mu \right) - \rho V \right] + \rho \sum_{i,j=1}^N \dot{c}_i \dot{c}_j \beta_{ij}^1 + \rho \sum_{i,j=1}^N c_i \ddot{c}_j \beta_{ij}^1 - \\
 & - \rho \sum_{i,j,k=1}^N \frac{5}{2} c_i c_j c_k \Phi_{ijk}^3 \ddot{\varepsilon}_z - 3\rho \sum_{i,j,k=1}^N \frac{5}{2} c_i c_j \dot{c}_k \Phi_{ijk}^3 \dot{\varepsilon}_z + \frac{9}{2} \rho \sum_{i,j,k,l=1}^N c_i c_j \dot{c}_k d_{ijkl}^3 - \\
 & - \frac{3}{2} \rho \sum_{i,j,k,l=1}^N c_i c_j c_k \ddot{c}_l d_{ijkl}^3 - \sum_{i,j,k,l=1}^N c_i c_j c_k c_l d_{ijkl}^4 \left[ 2\dot{V} \rho - \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_x \left( 5\rho + \frac{1}{4} \mu \right) \right] - \\
 & - 4 \sum_{i,j,k,l=1}^N c_i c_j c_k \dot{c}_l d_{ijkl}^4 \left[ 2V \rho - \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_x \left( 5\rho + \frac{1}{4} \mu \right) \right], \\
 R_z = & -\rho \sum_{i=1}^N \dot{c}_i \Psi_i^1 V - \rho \sum_{i=1}^N c_i \Psi_i^1 \dot{V} - (\rho + \mu) \sum_{i=1}^N \ddot{c}_i \Psi_i^0 - \\
 & - \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{2} c_i c_j \beta_{ij}^2 \ddot{\varepsilon}_z (\mu - 5\rho) - 2 \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{2} c_i \dot{c}_j \beta_{ij}^2 \dot{\varepsilon}_z (\mu - 5\rho) - \\
 & - \rho \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j c_k \Phi_{ijk}^3 \left( \frac{5}{2} \ddot{\varepsilon}_x - 2\dot{V} \right) - 3\rho \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j \dot{c}_k \Phi_{ijk}^3 \left( \frac{5}{2} \dot{\varepsilon}_x - 2V \right) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j \ddot{c}_k \varphi_{ijk}^2 (\mu - 3\rho) - \sum_{i,j,k=1}^N c_i \dot{c}_j \dot{c}_k \varphi_{ijk}^2 (\mu - 3\rho) - \\
 & - \sum_{i,j,k,l=1}^N \frac{1}{8} c_i c_j c_k c_l d_{ijkl}^4 \ddot{\varepsilon}_z (27\rho - \mu) - 4 \sum_{i,j,k,l=1}^N \frac{1}{8} c_i c_j c_k c_l d_{ijkl}^4 \dot{\varepsilon}_z (27\rho - \mu). \quad (4)
 \end{aligned}$$

Тут  $R_x, R_z$  — компоненти вектора сил, що діють від трубопроводу на основу. Зауважимо, що одержання сил реакцій  $R_x$  і  $R_z$  трубопроводу на опору в аналітичному вигляді є суттєвою перевагою використання варіаційного формулювання задачі.

Рівняння руху системи відносно амплітудних параметрів коливань трубопроводу з урахуванням впливу коливань основи набувають такого вигляду

$$\begin{aligned}
 \ddot{c}_r = & -\frac{EJ}{\rho + \mu} \kappa_r^4 c_r + \frac{7}{2} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 + \frac{2\rho V}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i (\beta_{ri}^1 - \beta_{ir}^1) - \\
 & - \frac{PF}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \frac{2\rho \dot{V}}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \frac{1}{2N_r} \sum_{ijk} \ddot{c}_i c_j c_k d_{jkir}^2 - \\
 & - \sum_{ijk} \dot{c}_i \dot{c}_j c_k \frac{1}{N_r} \left( d_{jkir}^2 - \frac{1}{2} d_{krij}^2 \right) - \frac{EJ}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkl}^6 - \\
 & - \frac{2EF}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkr}^3 - \frac{13}{4} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkr}^4 + \\
 & + \frac{\rho}{N_r (\rho + \mu)} \Psi_r^1 (V \dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_x \dot{\varepsilon}_z) + \\
 & + \frac{1}{N_r (\rho + \mu)} \sum_{i=1}^N c_i \beta_{ir}^2 \left[ \dot{\varepsilon}_x^2 \left( \rho + \frac{1}{2} \mu \right) + \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_z^2 (\mu - 5\rho) - 2\rho V \dot{\varepsilon}_x \right] - \\
 & - \frac{\rho}{N_r (\rho + \mu)} \sum_{i=1}^N \dot{c}_i (\beta_{ri}^1 - \beta_{ir}^1) \dot{\varepsilon}_x + \frac{3\rho}{N_r (\rho + \mu)} \sum_{i,j=1}^N c_i c_j \varphi_{ijr}^3 \left( \frac{5}{2} \dot{\varepsilon}_x \dot{\varepsilon}_z - 2V \dot{\varepsilon}_z \right) + \\
 & + \frac{\mu - 3\rho}{N_r (\rho + \mu)} \sum_{i,j=1}^N c_i \dot{c}_j (\varphi_{irj}^2 - \varphi_{jir}^2) \dot{\varepsilon}_z + \frac{9\rho}{2N_r (\rho + \mu)} \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j \dot{c}_k (d_{ijrk}^3 - d_{kjir}^3) \dot{\varepsilon}_x + \\
 & + \frac{2}{N_r (\rho + \mu)} \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j c_k d_{ijkr}^4 \left[ \frac{1}{8} \dot{\varepsilon}_z^2 (27\rho - \mu) - 4\rho V \dot{\varepsilon}_x - \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_x^2 \left( 5\rho + \frac{1}{4} \mu \right) \right] - \\
 & - \frac{1}{N_r} \Psi_r^0 \ddot{\varepsilon}_z + \frac{\rho}{N_r (\rho + \mu)} \sum_{i=1}^N \dot{c}_i \beta_{ir}^1 \ddot{\varepsilon}_x - \frac{\mu - 3\rho}{2N_r (\rho + \mu)} \sum_{i,j=1}^N c_i c_j \varphi_{ijr}^2 \ddot{\varepsilon}_z - \\
 & - \frac{3\rho}{2N_r (\rho + \mu)} \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j c_k d_{ijkr}^3 \ddot{\varepsilon}_x. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Варто зазначити, що під час розгляду нелінійних коливань системи з точністю до величин третього порядку відносно амплітудних параметрів коливань трубопроводу  $c_i$  замість членів  $\ddot{c}_i$  у правій частині рівнянь можна використовувати їх лінійне наближення, що в цьому випадку, на відміну від результатів роботи [5], вже буде включати члени з  $\varepsilon_x, \varepsilon_z$  і матиме вигляд

$$\begin{aligned} \ddot{c}_p = & -\frac{EJ}{\rho + \mu} \kappa_p^4 c_p + \frac{7}{2} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_p} \sum_i c_i \beta_{ip}^2 + \frac{2\rho V}{(\rho + \mu) N_p} \sum_i c_i (\beta_{pi}^1 - \beta_{ip}^1) - \\ & - \frac{PF}{(\rho + \mu) N_p} \sum_i c_i \beta_{ip}^2 - \frac{2\rho \dot{V}}{(\rho + \mu) N_p} \sum_i c_i \beta_{ip}^2 - \frac{1}{N_r} \psi_r^0 \ddot{\varepsilon}_z + \frac{\rho}{N_r (\rho + \mu)} \psi_r^1 V \dot{\varepsilon}_z. \end{aligned}$$

Після проведення такої процедури систему рівнянь сумісного руху (3), (5) шляхом зниження порядку можна легко звести до форми Коші, що сприяє можливості проведення якісного та чисельного аналізу. В цілому система рівнянь руху системи (3), (5) є нелінійна система звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних параметрів деформації трубопроводу та переміщень його основи.

**Висновки.** Побудовано нелінійну математичну модель динаміки трубопроводу з рідиною за її швидкісної течії для випадку, якщо трубопровід закріплено на основі, що здійснює різні типи рухів. Під час побудови моделі прийнято до уваги те, що рух рідини описується в ейлерових, а пружного трубопроводу в лагранжевих змінних, а рух всієї системи задається в неінерціальній системі відліку. На основі декомпозиції руху системи за формами коливань побудовано дискретну модель системи в її зв'язаному русі та в аналітичному вигляді знайдені сили взаємодії між трубопроводом і основою. Показано, що одержана модель для випадку нерухомої основи співпадає з раніше одержаними результатами. Розв'язувальну систему звичайних диференціальних рівнянь зведено до форми Коші, яка є зручною для проведення якісних і кількісних досліджень.

## Література

- [1] Бондарь, Н. Г. Нелинейные автономные задачи механики упругих систем / Н. Г. Бондарь. — Киев: Будівельник, 1971. — 140 с.
- [2] Kuiper, G. L. Experimental investigation of dynamic stability of a free hanging pipe conveying fluid / G. L. Kuiper, V. A. Metrikine // Journal of Fluids and Structures. — 2008. — Vol. 24, No 4. — P. 541-558.
- [3] Paidoussis, M. P. A horizontal fluid-conveying cantilever: spatial coherent structures, beam modes and jumps in stability diagram / M. P. Paidoussis, A. Sarkar, C. Semler // Journal of Sound and Vibration. — 2005. — Vol. 280, Issues 1-2. — P. 141-157.
- [4] Бабаков, И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. — Москва: Наука, 1968. — 560 с.
- [5] Василевский, Ю. Е. Нелинейная модель динамики трубопровода при скоростном течении жидкости / Ю. Е. Василевский, О. С. Лимарченко // Збірник праць Інституту математики НАН України, 2006. — № 4. — С. 322-334.



## Dynamics of pipeline with liquid on a vibrating foundation

Volodymyr Limarchenko

*Mathematical model of dynamics of the pipeline with liquid, under its high-speed flowing has been constructed. Pipeline has been fixed on foundation which performs different types of motions. Complexity of the problem has been caused by the fact that motion of component is described in different systems of variables (for liquid we have used the Euler variables, and for pipeline the Lagrange variables are used) in non-inertial reference frame. On the basis of decomposition of system motion under forms of vibrations the discrete model of the system in its combine motion (system of the ordinary differential equations) has been constructed and the interaction force between pipeline and a foundation has been obtained in analytical form.*

## Динамика трубопровода с жидкостью на вибрирующем основании

Владимир Лимарченко

*Построена математическая модель динамики трубопровода с жидкостью при ее скоростном течении. Трубопровод закреплен на основании, совершающем разные типы движений. Сложность задачи определяется тем, что движение компонент описывается в разных системах переменных (жидкость в эйлеровых, а упругий трубопровод в лагранжевых) в неинерциальной системе отсчета. На основе декомпозиции движения системы по формам колебаний построена дискретная модель системы в ее совместном движении (система обыкновенных дифференциальных уравнений) и в аналитическом виде определены силы взаимодействия между трубопроводом и основанием.*

Представлено доктором технічних наук Я. П'янилом

Отримано 12.09.11