

## **Інтегральні рівняння для моделювання плоскої термовологопружності анізотропних тіл**

Ярослав Пастернак<sup>1</sup>, Георгій Сулим<sup>2</sup>

<sup>1</sup> к. ф.-м. н., Луцький національний технічний університет, вул. Львівська, 75, Луцьк, 43018, e-mail: pasternak@ukrpost.ua

<sup>2</sup> д. ф.-м. н., професор, Львівський національний університет ім. Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: sulym@franko.lviv.ua

*Побудовано в замкнутій формі крайові інтегральні рівняння типу Сомільяни для плоскої задачі термовологопружності анізотропного тіла. За відсутності об'ємних сил, розподілених джерел тепла та вологи отримані рівняння не містять інтегралів по області тіла. Це дає змогу ефективно моделювати відповідні тіла, зокрема, із використанням схеми методу граничних елементів для числового розв'язування отриманих інтегральних рівнянь. Розглянуто числові приклади застосування розроблених підходів для вивчення зв'язаних полів в анізотропних тілах із тріщинами.*

**Ключові слова:** термопружність, вологопружність, анізотропія, тріщина, коефіцієнт інтенсивності напружень.

**Вступ.** Серед сучасних конструкційних матеріалів дуже часто використовують природні (деревина) та спеціально виготовлені (склопластик, армовані матеріали) композити, що дають можливість зменшити вагу виробу, зберігши при цьому відповідні характеристики міцності та жорсткості. У процесі обробки (наприклад, сушіння деревини) та експлуатації конструкційних елементів слід зважати не тільки на їхнє механічне навантаження, але й на вплив інших чинників, зокрема, вологості та температури.

Саме тому до задач волого- та термопружності анізотропних тіл прикуто значну увагу дослідників. Зокрема, у роботах [1, 2] отримано комплексні потенціали типу Лехніцького для задач термопружності анізотропних середовищ і запропоновано спосіб їхнього розв'язування на основі методів рядів і найменших квадратів. У монографіях [3, 4] отримано співвідношення формалізму Стро для задач термопружності та подано аналіз теплових напружень у тілах з отворами, включеннями та тріщинами. У статті [5] досліджено напруження в анізотропних ламінованих пластинах поблизу отворів за сумісної дії полів вологи та температури. У працях [6, 7] вивчено формостійкість і міцність деревини у процесі сушіння.

Поряд із цим видається ефективним моделювання термовологопружності анізотропних середовищ методами інтегральних рівнянь, зокрема, методом граничних елементів (МГЕ), який має високу точність і вимагає дискретизації лише межі області. Проте складність полягає у тому, що досі не вдалося отримати інтегральних рівнянь, що містять лише крайові інтеграли, навіть для задач термопружності

анізотропного тіла, оскільки під час вивчення впливу теплового розширення на напружений стан тіл за допомогою МГЕ, у числовій схемі слід обчислювати додатковий об'ємний інтеграл, а це часто зводить нанівещь усі переваги методу. Для реалізації цього підходу у роботі [8] розроблено частковий інтегральний підхід (particular integral approach), який передбачає розбиття зайнятої тілом області на комірки, у кожній з яких температура апроксимується поліномом. У праці [9] запропоновано алгоритм перетворення об'ємного інтегралу до контурного. Його успішно використано під час аналізу термонапруженого стану анізотропних тіл із тріщинами у роботі [10]. Тим не менше, деякі з контурних інтегралів все ж слід обчислювати у певним чином відображеній області, що ускладнює алгоритм МГЕ.

Тому в цій роботі запропоновано новий підхід до отримання крайових інтегральних рівнянь термовологопружності анізотропного тіла довільної геометрії з використанням теорії аналітичних функцій [11]. Завдяки отриманим новим співвідношенням ортогональності розширеного формалізму Стро, у цій роботі вдалося записати інтегральні рівняння типу Сомільяни для задач термовологопружності анізотропних тіл із розрізами, які цілком вирішують проблему усунення з розгляду інтегралів по області.

## 1. Основні співвідношення та розширений формалізм Стро

Розглянемо стаціонарні (або квазістаціонарні) фізико-механічні поля, що діють у твердому тілі, з яким пов'язано прямокутну систему координат  $Ox_1x_2x_3$ . Балансові рівняння для теплових потоків, вологості та рівняння статичної рівноваги у цій системі координат мають вигляд [4, 5]

$$h_{i,i} = 0, \quad m_{i,i} = 0, \quad \sigma_{ij,j} = 0, \quad (1)$$

де  $h_i, m_i$  — відповідно компоненти векторів густин теплового потоку та вологоперенесення;  $\sigma_{ij}$  — компоненти тензора напружень. Конститутивні співвідношення лінійної теплопровідності, вологоперенесення та термовологопружності анізотропних тіл у випадку незв'язаних полів є такі [4, 5]

$$h_i = -k_{ij}^t \theta_{,j}, \quad m_i = -k_{ij}^h \chi_{,j}, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkm} \varepsilon_{km} - \beta_{ij}^t \theta - \beta_{ij}^h \chi. \quad (2)$$

Тут  $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$  — деформації;  $u_i$  — компоненти вектора переміщень;  $\theta, \chi$  — відповідно зміни температури та вологості порівняно з відліковими;  $C_{ijkm}$  — пружні сталі;  $k_{ij}^t$  — коефіцієнти теплопровідності;  $k_{ij}^h$  — коефіцієнти вологопроникності;  $\beta_{ij}^t = C_{ijkm} \alpha_{km}^t$  — модулі теплового розширення;  $\alpha_{ij}^t$  — коефіцієнти теплового розширення;  $\beta_{ij}^h = C_{ijkm} \alpha_{km}^h$ ;  $\alpha_{ij}^h$  — коефіцієнти лінійного вологорозширення. Компоненти тензорів  $C_{ijkm}$ ,  $k_{ij}^t$ ,  $k_{ij}^h$ ,  $\beta_{ij}^t$  та  $\beta_{ij}^h$  вважаємо симетричними. У формулах прийнято правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється. Кома серед нижніх індексів відповідає диференціюванню за зазначеною після коми координатою, відтак,  $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$ .

Розглянемо циліндричне тверде тіло, в якому теплові та механічні поля, а також вологість не змінюються уздовж осі  $Ox_3$ , тобто,  $\theta_{,3} \equiv 0$ ,  $\chi_{,3} \equiv 0$ ,  $u_{i,3} \equiv 0$  (умови узагальненої плоскої деформації). У цьому разі можна обмежитися вивченням лише двовимірних полів, що діють у деякому нормальному до осі  $Ox_3$  перерізі цього тіла. За аналогією із задачами плоскої термопружності анізотропного тіла [3, 4] розв'язок задачі (1), (2) термовологопружності можна подати у такому загальному вигляді

$$\begin{aligned} \theta &= 2 \operatorname{Re}\{g'_t(z_t)\}, \quad z_t = x_1 + p_t x_2; \quad \chi = 2 \operatorname{Re}\{g'_h(z_h)\}, \quad z_h = x_1 + p_h x_2; \\ h_1 &= -\vartheta_{,2}, \quad h_2 = \vartheta_{,1}, \quad \vartheta = 2k_t \operatorname{Im}\{g'_t(z_t)\}, \quad k_t = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}; \\ m_1 &= -\mu_{,2}, \quad m_2 = \mu_{,1}, \quad \mu = 2k_h \operatorname{Im}\{g'_h(z_h)\}, \quad k_h = \sqrt{k_{11}^h k_{22}^h - (k_{12}^h)^2}; \\ \mathbf{u} &= 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{A}\mathbf{f}(z_*) + \mathbf{c}_t g_t(z_t) + \mathbf{c}_h g_h(z_h)\}, \\ \boldsymbol{\varphi} &= 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{B}\mathbf{f}(z_*) + \mathbf{d}_t g_t(z_t) + \mathbf{d}_h g_h(z_h)\}; \\ \boldsymbol{\sigma}_1 &\equiv [\sigma_{i1}] = -\boldsymbol{\varphi}_{,2}, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 \equiv [\sigma_{i2}] = \boldsymbol{\varphi}_{,1}, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\mathbf{f}(z_*) = [F_1(z_1), F_2(z_2), F_3(z_3)]^T$ ;  $F_\alpha(z_\alpha)$  ( $\alpha = \overline{1,3}$ ),  $g_t(z_t), g_h(z_h)$  — певні аналітичні функції своїх аргументів; комплексні сталі  $p_t, p_h$  є коренями з додатною уявною частиною характеристичних рівнянь

$$k_{22}^t p_t^2 + 2k_{12}^t p_t + k_{11}^t = 0, \quad k_{22}^h p_h^2 + 2k_{12}^h p_h + k_{11}^h = 0. \quad (4)$$

Матриці  $\mathbf{A} \equiv [A_{i\alpha}] = [\mathbf{a}_\alpha]$  та  $\mathbf{B} \equiv [B_{i\alpha}] = [\mathbf{b}_\alpha]$ , а також сталі  $p_\alpha$  ( $\alpha = \overline{1,3}$ ) задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} & \left( [C_{i1j1}] + p_\alpha [C_{i1j2} + C_{i2j1}] + p_\alpha^2 [C_{i2j2}] \right) \mathbf{a}_\alpha = 0, \\ \mathbf{b}_\alpha &= \left( [C_{i2j1}] + p_\alpha [C_{i2j2}] \right) \mathbf{a}_\alpha = - \left( [C_{i1j1}] + p_\alpha [C_{i1j2}] \right) \mathbf{a}_\alpha / p_\alpha \end{aligned} \quad (5)$$

та умови ортонормованості

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & \mathbf{A}^T \\ \overline{\mathbf{B}}^T & \overline{\mathbf{A}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \overline{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} & \overline{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Вектори  $\mathbf{c}_t, \mathbf{c}_h$  визначають із рівнянь

$$\begin{aligned} & \left( [C_{i1j1}] + p_t [C_{i1j2} + C_{i2j1}] + p_t^2 [C_{i2j2}] \right) \mathbf{c}_t = [\beta_{i1}^t] + p_t [\beta_{i2}^t], \\ & \left( [C_{i1j1}] + p_h [C_{i1j2} + C_{i2j1}] + p_h^2 [C_{i2j2}] \right) \mathbf{c}_h = [\beta_{i1}^h] + p_h [\beta_{i2}^h], \end{aligned} \quad (7)$$

а вектори  $\mathbf{d}_t, \mathbf{d}_h$  означені так

$$\mathbf{d}_t = \left( [C_{i2j1}] + p_t [C_{i2j2}] \right) \mathbf{c}_t - [\beta_{i2}^t], \quad \mathbf{d}_h = \left( [C_{i2j1}] + p_h [C_{i2j2}] \right) \mathbf{c}_h - [\beta_{i2}^h]. \quad (8)$$

Співвідношення (5)-(8) дають можливість отримати такі важливі для побудови інтегральних рівнянь тотожності

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\mathbf{B}^T \operatorname{Im}\{\mathbf{c}_t\} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T \operatorname{Im}\{\mathbf{d}_t\} &= \mathbf{B}^T \operatorname{Im}\{p_t \mathbf{c}_t\} + \mathbf{A}^T \operatorname{Im}\{p_t \mathbf{d}_t\}, \\ \mathbf{P}\mathbf{B}^T \operatorname{Im}\{\mathbf{c}_h\} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T \operatorname{Im}\{\mathbf{d}_h\} &= \mathbf{B}^T \operatorname{Im}\{p_h \mathbf{c}_h\} + \mathbf{A}^T \operatorname{Im}\{p_h \mathbf{d}_h\}, \end{aligned} \quad (9)$$

де  $\mathbf{P} = \operatorname{diag}[p_1, p_2, p_3]$ .

## 2. Побудова інтегральних рівнянь теплопровідності, вологоперенесення та термовологопружності анізотропного тіла з тріщинами

Розглянемо безмежну комплексну площину  $z = x_1 + ix_2$  з системою гладких розіркннутих дуг  $\Gamma = \bigcup_j \Gamma_j$ , що не перетинаються (рис. 1). Відповідно до монографії [11] функції  $\phi^+(s), \phi^-(s)$  класу  $H^*$  на  $\Gamma$  (включаючи початки та кінці дуг) є граничними значеннями кусково-голоморфної зовні  $\Gamma$  функції  $\phi(z)$ , що дорівнює нулю на безмежності ( $\phi(\infty) = 0$ ), якщо виконується таке інтегральне рівняння

$$\frac{1}{2} \Sigma \phi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Delta \phi(\tau)}{\tau - s} d\tau \quad (\tau, s \in \Gamma), \quad (10)$$

де  $\Sigma(\cdot) = (\cdot)^+ + (\cdot)^-$ ,  $\Delta(\cdot) = (\cdot)^+ - (\cdot)^-$ ;  $i = \sqrt{-1}$ ; знаками «+» та «-» позначено величини, що стосуються поверхонь  $\Gamma^+$  і  $\Gamma^-$ , утворених розрізами  $\Gamma$ . Інтеграл (10) обчислюється в сенсі головного значення.

Формули для замкнутих контурів можна трактувати [11] як частковий випадок формул для розіркннутих контурів. Для цього слід лише прийняти, що на замкнутому контурі  $\phi^+(s) = \phi(s)$ , а  $\phi^-(s) \equiv 0$ .

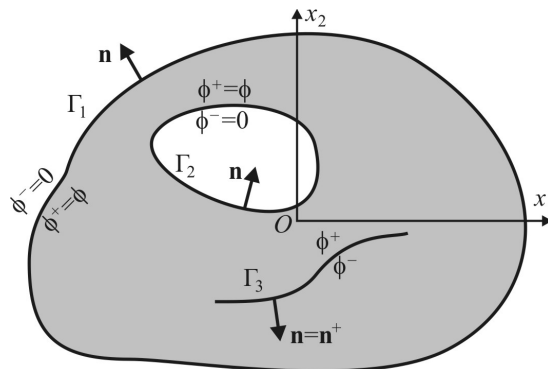


Рис. 1. Система контурів  $\Gamma_j$  у комплексній площині

**2.1. Теплопровідність і вологоперенесення.** З огляду на співвідношення (10), для того, щоб функція  $g'(z_t)$  була голоморфною у комплексній площині  $z_t$ , необхідне виконання такого рівняння

$$\frac{1}{2}\Sigma g'_t(Z_t(\mathbf{y})) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Delta g'_t(Z_t(\mathbf{x}))}{Z_t(\mathbf{x}-\mathbf{y})} dZ_t(\mathbf{x}), \quad Z_t(\mathbf{x}) = x_1 + p_t x_2, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma. \quad (12)$$

Використовуючи співвідношення (3) та інтегруючи (12) частинами, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Sigma g'_t(Z_t(\mathbf{y})) &= \frac{1}{4\pi k_t} \int_{\Gamma} \ln(Z_t(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \Sigma h_n(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \\ &- \frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma} \frac{n_2 - p_t n_1}{Z_t(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \Delta\theta(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (13)$$

Тут  $\Sigma h_n = h_i^+ n_i^+ + h_i^- n_i^-$ ;  $n_j^{\pm}$  — компоненти вектора нормалей  $\mathbf{n}^{\pm}$  до поверхонь  $\Gamma^{\pm}$  у точці  $\mathbf{x}$ ;  $\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}^-$ ;  $d\Gamma$  — дійсний диференціал дуг  $\Gamma$ . Під час побудови рівняння (13) використано диференціальну залежність  $dZ_t = -(n_2 - p_t n_1) d\Gamma$ .

Інтегруючи (13), отримаємо рівняння, яке задовольняє функція  $g_t(z_t)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Sigma g_t(Z_t(\mathbf{y})) &= -\frac{1}{4\pi k_t} \int_{\Gamma} f^*(Z_t(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \Sigma h_n(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ &+ \frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma} (n_2 - p_t n_1) \ln(Z_t(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \Delta\theta(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (14)$$

де  $f^*(z) = z(\ln z - 1)$ .

Співвідношення (3) та (13) дають можливість побудувати такі інтегральні рівняння теплопровідності

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Sigma\theta(\mathbf{y}) &= \int_{\Gamma} \Theta^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma h_n(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} H^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta\theta(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \\ \frac{1}{2}\Delta h_n(\mathbf{y}) &= n_i^+(\mathbf{y}) \left[ \int_{\Gamma} \Theta_i^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma h_n(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} H_i^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta\theta(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Ядра рівнянь (15) означені виразами

$$\begin{aligned} \Theta^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2\pi k_t} \ln|Z_t(\mathbf{x}, \mathbf{y})|, \quad H^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left\{ \frac{n_2 - p_t n_1}{Z_t(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right\}, \\ \Theta_i^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\delta_{i2} - p_t \delta_{i1}}{Z_t(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right\}, \\ H_i^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{k_t}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{(\delta_{i2} - p_t \delta_{i1})(n_2 - p_t n_1)}{[Z_t(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Потрібно наголосити, що сингулярні інтеграли слід обчислювати в сенсі головного значення, а гіперсингулярні — в сенсі скінченної частини Адамара.

Якщо серед контурів  $\Gamma_j$  є замкнуті, то аналогічно до загальних підходів теорії голоморфних функцій [11] для них слід вважати, що  $\theta^+ = \theta$ ,  $\theta^- \equiv 0$ ,  $h_n^+ = h_n$ ,  $h_n^- \equiv 0$ .

З огляду на математичну аналогію задач (1), (2) для теплопровідності та вологоперенесення, інтегральні рівняння останнього можна отримати з (14)-(16) безпосередньою зміною позначень:  $h \rightarrow m$ ,  $\theta \rightarrow \chi$ ,  $k_t \rightarrow k_h$ ,  $p_t \rightarrow p_h$ .

**2.2. Термовологопружність.** Зважаючи на умови ортогональності (6), комплексні функції  $\mathbf{f}(z_*)$  можна подати у вигляді

$$\mathbf{f}(z_*) = \mathbf{B}^T \mathbf{u} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{B}^T \mathbf{u}^t - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi}^t - \mathbf{B}^T \mathbf{u}^h - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi}^h, \quad (17)$$

де  $\mathbf{u}^t = 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{c}_t g_t(z_t)\}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}^t = 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{d}_t g_h(z_t)\}$ ,  $\mathbf{u}^h = 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{c}_h g_h(z_h)\}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}^h = 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{d}_h g_h(z_h)\}$ .

Згідно зі співвідношеннями (10) і (17), комплексні потенціали Стро  $F_\alpha(z_\alpha)$  є кусково-голоморфні у комплексних площинах  $z_\alpha$  функції, що зникають на безмежності, якщо виконуються такі інтегральні рівняння

$$\frac{1}{2} \Sigma \mathbf{f}(Z_*(\mathbf{y})) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\langle \frac{dZ_*(\mathbf{x})}{Z_*(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \right\rangle \Delta \mathbf{f}(Z_*(\mathbf{x})). \quad (18)$$

Тут  $\langle F(Z_*) \rangle = \operatorname{diag}[F_1(Z_1), F_2(Z_2), F_3(Z_3)]$ ;  $Z_\alpha(\mathbf{x}) = x_1 + p_\alpha x_2$ ;  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma$ .

Підставляючи (17) у (18) і двічі інтегруючи отриманий вираз частинами, з огляду на співвідношення (3) та (9) отримаємо

$$\begin{aligned} i\pi \Sigma \mathbf{f}(Z_*(\mathbf{y})) = & \int_{\Gamma} \langle \ln(Z_*(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \rangle \mathbf{A}^T \Sigma \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \left\langle \frac{n_2 - n_1 p_*}{Z_*(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \right\rangle \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \\ & - \int_{\Gamma} \langle \ln(Z_*(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \rangle \left( \mathbf{A}^T \operatorname{Re}\{\mathbf{d}_t(n_2 - n_1 p_t)\} \right) \Delta \theta(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \\ & - \int_{\Gamma} \langle \ln(Z_*(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \rangle \left( \mathbf{B}^T \operatorname{Re}\{\mathbf{c}_t(n_2 - n_1 p_t)\} \right) \Delta \theta(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \\ & - \frac{1}{k_t} \int_{\Gamma} \langle f^*(Z_*(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \rangle \left( \mathbf{A}^T \operatorname{Im}\{\mathbf{d}_t\} + \mathbf{B}^T \operatorname{Im}\{\mathbf{c}_t\} \right) \Sigma h_n(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \\ & - \int_{\Gamma} \langle \ln(Z_*(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \rangle \left( \mathbf{A}^T \operatorname{Re}\{\mathbf{d}_h(n_2 - n_1 p_h)\} \right) \Delta \chi(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \\ & - \int_{\Gamma} \langle \ln(Z_*(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \rangle \left( \mathbf{B}^T \operatorname{Re}\{\mathbf{c}_h(n_2 - n_1 p_h)\} \right) \Delta \chi(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \\ & - \frac{1}{k_h} \int_{\Gamma} \langle f^*(Z_*(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \rangle \left( \mathbf{A}^T \operatorname{Im}\{\mathbf{d}_h\} + \mathbf{B}^T \operatorname{Im}\{\mathbf{c}_h\} \right) \Sigma m_n(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (19)$$

Використовуючи співвідношення (3), (13), (14) і (19), отримуємо такі дуальні інтегральні рівняння термовологопружності

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma \mathbf{u}(\mathbf{y}) &= \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{A} \Sigma \mathbf{f}(Z_*(\mathbf{y})) + \mathbf{c}_t \Sigma g_t(Z_t(\mathbf{y})) + \mathbf{c}_h \Sigma g_h(Z_h(\mathbf{y})) \right\}, \\ \frac{1}{2} \Delta \mathbf{t}(\mathbf{y}) &= -\operatorname{Re} \left\{ \mathbf{B} \langle n_2(\mathbf{y}) - n_1(\mathbf{y}) p_* \rangle \Sigma \mathbf{f}'(Z_*(\mathbf{y})) \right\} - \\ &- \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{d}_t \Sigma g_t'(Z_t(\mathbf{y})) (n_2 - n_1 p_t) \right\} - \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{d}_h \Sigma g_h'(Z_h(\mathbf{y})) (n_2 - n_1 p_h) \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Якщо якісь із контурів  $\Gamma_j$  замкнуті, то в рівняннях (20) вважатимемо, що на цих контурах  $\Sigma \mathbf{t} = \Delta \mathbf{t} = \mathbf{t}$ ,  $\Delta \mathbf{u} = \Sigma \mathbf{u} = \mathbf{u}$ ,  $\Delta \theta = \theta$ ,  $\Sigma h_n = h_n$ ,  $\Delta \chi = \chi$ ,  $\Sigma m_n = m_n$ .

Якщо усе тіло перебуває за відлікових температури та вологості, інтегральні рівняння (20) переходять у звичні співвідношення типу Сомільяни [4]. Перевагою отриманих співвідношень є те, що всі інтеграли обчислюються уздовж реальних контурів  $\Gamma_j$ , а не їхніх відображень у комплексну область  $z_i$ , як це здійснено у роботі [9].

### 2.3. Модифікація співвідношень для заданого на безмежності навантаження.

Розглянемо випадок, якщо комплексні функції  $\mathbf{f}(z_*)$ ,  $g_t(z_t)$  та  $g_h(z_h)$  не зникають на безмежності. Унаслідок лінійності задачі їх можна подати у вигляді сум потенціалів  $\mathbf{f}^0(z_*)$ ,  $g_t^0(z_t)$ ,  $g_h^0(z_h)$ , що відповідають термовологонапруженому стану безмежного середовища без розрізів  $\Gamma_j$  та збурених наявністю ліній  $\Gamma_j$  складників  $\mathbf{f}^1(z_*)$ ,  $g_t^1(z_t)$ ,  $g_h^1(z_h)$ . Причому останні зникають на безмежності, а тому задовольняють інтегральні рівняння (14), (19).

Функції  $\mathbf{f}^0(z_*)$ ,  $g_t^0(z_t)$ ,  $g_h^0(z_h)$  слід обчислювати виходячи з крайових умов, заданих у безмежно віддаленій точці. Зокрема, якщо середовище нагріте до деякої температури  $\theta_0$ , а на безмежності діє тепловий потік із компонентами  $h_i^\infty$  вектора густини, то відповідно до співвідношень (3) функція  $g_t^0(z_t)$  має вигляд

$$g_t^0(z_t) = \frac{1}{2} e_0 z_t^2 + \theta_0 z_t, \quad e_0 = -\frac{h_1^\infty + h_2^\infty \bar{p}_t}{2k_t \operatorname{Im} p_t}. \quad (21)$$

При цьому для обчислення потенціалів  $\mathbf{f}^0(z_*)$  слід зважати на фізичну умову зникання напружень на безмежності, тобто

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sigma_{ij}(z) = 0. \quad (22)$$

Для виконання умови (22),  $\mathbf{f}^0(z_*)$  повинні мати таку ж, як і в (21), структуру

$$\mathbf{f}^0(z_*) = \frac{1}{2} \langle z_*^2 \rangle \mathbf{q}^h + \langle z_* \rangle \mathbf{q}^\theta. \quad (23)$$

Комплексні сталі вектори  $\mathbf{q}^h, \mathbf{q}^\theta$  подамо, як і в праці [4], через дійсні вектори  $\mathbf{q}_a^h, \mathbf{q}_b^h, \mathbf{q}_a^\theta, \mathbf{q}_b^\theta$  так

$$\mathbf{q}^h = \mathbf{A}^T \mathbf{q}_a^h + \mathbf{B}^T \mathbf{q}_b^h, \quad \mathbf{q}^\theta = \mathbf{A}^T \mathbf{q}_a^\theta + \mathbf{B}^T \mathbf{q}_b^\theta. \quad (24)$$

Підставляючи (21), (23), (24) у рівняння (3), задовольняючи умови (22) та зважаючи на співвідношення ортогональності (6), отримаємо рівняння, які повинні задовольняти вектори  $\mathbf{q}_a^h, \mathbf{q}_b^h, \mathbf{q}_a^\theta, \mathbf{q}_b^\theta$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_a^\theta &= -2 \operatorname{Re}\{\theta_0 \mathbf{d}_t\}, & 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{BPA}^T\} \mathbf{q}_a^\theta + 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{BPB}^T\} \mathbf{q}_b^\theta + 2 \operatorname{Re}\{\theta_0 p_t \mathbf{d}_t\} &= 0, \\ \mathbf{q}_a^h &= -2 \operatorname{Re}\{e_0 \mathbf{d}_t\}, & 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{BPA}^T\} \mathbf{q}_a^h + 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{BPB}^T\} \mathbf{q}_b^h + 2 \operatorname{Re}\{e_0 p_t \mathbf{d}_t\} &= 0, \\ & & 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{BP}^2 \mathbf{A}^T\} \mathbf{q}_a^h + 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{BP}^2 \mathbf{B}^T\} \mathbf{q}_b^h + 2 \operatorname{Re}\{e_0 p_t^2 \mathbf{d}_t\} &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

З огляду на математичну аналогію задач теплопровідності та вологоперенесення, для останньої відповідні співвідношення будуть подібні до рівнянь (23)-(25).

### 3. Числова верифікація отриманих рівнянь

Розв'язуватимемо отримані інтегральні рівняння за побудованою в роботі [12] схемою методу граничних елементів. Використання спеціальних граничних елементів, що моделюють кореневу особливість полів напружень і теплових потоків у вершинах тріщин, дає можливість обчислювати коефіцієнти інтенсивності напружень безпосередньо за формулою

$$\mathbf{k}^{(1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} \mathbf{L} \cdot \Delta \mathbf{u}(s), \quad (26)$$

де  $\mathbf{k}^{(1)} = [K_{II}, K_I, K_{III}]^T$  — вектор коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН);  $\mathbf{L} = -2\sqrt{-1} \mathbf{B} \mathbf{V}^T$  [3].

Розглянемо безмежне середовище з прямолінійною та нахиленою до осі  $Ox_1$  під кутом  $\gamma$  теплоізолюваною тріщиною завдовжки  $2a$  (рис. 2). На безмежності діє однорідний тепловий потік із такими компонентами вектора густини:  $h_1^\infty = 0, h_2^\infty = h^\infty$ . Напруження зникають на безмежності.

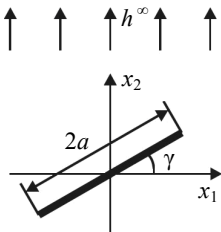


Рис. 2. Теплоізолювана тріщина в безмежному термопружному середовищі

Дослідимо коефіцієнти інтенсивності напружень тріщини для плоского напруженого стану, якщо матеріал середовища ізотропний (коефіцієнт Пуассона 0,25) або анізотропний із такими властивостями [10]:  $E_{11} = 55$  ГПа,  $E_{22} = 21$  ГПа,  $\nu_{12} = 0,25$ ,  $G_{12} = 9,7$  ГПа (відповідно  $C_{1111} = E_1^2 / (E_1 - \nu_{12}^2 E_2)$ ,  $C_{2222} = E_1 E_2 / (E_1 - \nu_{12}^2 E_2)$ ,  $C_{1212} = G_{12}$ ,  $C_{1112} = \nu_{12} C_{2222}$ ,  $\alpha_{11}^t = 6,3 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ,  $\alpha_{22}^t = 2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ ,



Таблиця

КІН нахиленої тріщини  
у безмежному термопружному середовищі

$\gamma$ , градуси	0	30	45	60	75
Ізотропний матеріал					
$K_{II}/K_0$ , точно	0,2500	0,2165	0,1768	0,1250	0,0647
$K_{II}/K_0$ , МГЕ	0,2505	0,2169	0,1771	0,1253	0,0648
Анізотропний матеріал					
$K_I/K_0$ , точно	0,0000	0,3279	0,3091	0,1893	0,0566
$K_I/K_0$ , МГЕ	0,0000	0,3284	0,3097	0,1896	0,0567
$K_{II}/K_0$ , точно	0,3657	0,5060	0,5677	0,5107	0,3058
$K_{II}/K_0$ , МГЕ	0,3664	0,5069	0,5687	0,5116	0,3063

$k_{11}/k_{22} = 3,46/0,35$ . Ізотропний матеріал моделюватимемо слабо анізотропним зі збуреним на 0,1 % модулем зсуву. Це дає можливість отримати різні власні значення у задачі (6) і застосувати загальну обчислювальну схему.

У таблиці значення нормованих КІН у лівій вершині тріщини (у правій КІН мають протилежний знак) для п'яти різних значень кута нахилу  $\gamma$  зіставлено з даними аналітичного розв'язку [4]. Коефіцієнт нормування дорівнює  $K_0 = a\sqrt{\pi a}E_{11}\alpha_{11}h^\infty/k_{11}$ . В обчислювальній схемі використано 20 рівномірно розподілених уздовж поверхні тріщини тривузлових (квадратичних) розривних граничних елементів, включаючи два спеціальні [12], що моделюють кореневі особливості полів у вершинах дефекту.

Із таблиці видно добру узгодженість числових результатів з аналітичними даними як для ізотропного, так і для анізотропного матеріалу. Відносна похибка не перевищує 0,2 %, що засвідчує достовірність і надійність отриманих результатів.

**Висновки.** Теорія аналітичних функцій і співвідношення ортогональності формалізму Стро дають можливість отримати інтегральні рівняння типу Сомільяни для двовимірних задач термовологопружності анізотропного тіла. Ці рівняння не накладають жодних обмежень на форму тіла, що досліджується — воно може бути як скінченним, так і безмежним. Отримані рівняння практично без ускладнень впроваджуються в обчислювальну схему методу граничних елементів і дають можливість досліджувати термовологопружну рівновагу тіл із тріщинами, отворами та включеннями.

## Література

- [1] *Космодамианский, А. С.* Температурные напряжения в многосвязных пластинках / *А. С. Космодамианский, С. А. Калоеров.* — Донецк: Вища школа, 1983. — 160 с.
- [2] *Калоеров, С. А.* Термоупругое состояние кусочно-однородной анизотропной пластинки / *С. А. Калоеров, Д. А. Добряк* // Вісник Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки. — 2006. — Вип. 2. — С. 77-88.
- [3] *Ting, T. C. T.* Anisotropic elasticity: theory and applications / *T. C. T. Ting.* — New York: Oxford University Press, 1996. — 570 p.
- [4] *Hwu, C.* Anisotropic elastic plates / *C. Hwu.* — London: Springer, 2010. — 673 p.
- [5] *Hsieh, M. C.* Hygrothermal stresses in unsymmetric laminates disturbed by elliptical holes / *M. C. Hsieh, C. Hwu* // *J. Appl. Mech.* — 2006. — Vol. 73; No 2. — P. 228-239.
- [6] *Гайвась, Б.* Модель формостійкості пористої пластини в процесі природного осушення / *Б. Гайвась* // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2010. — Вип. 11. — С. 56-65.
- [7] *Поберейко, Б. П.* Вплив температури на міцність деревини у пружній області деформування / *Б. П. Поберейко* // Науковий вісник НЛТУ України: зб. наук.-техн. праць. — Львів: НЛТУ України, 2007. — Вип. 17.2. — С. 61-66.
- [8] *Deb, A.* Alternate BEM formulation for 2D and 3D anisotropic thermoelasticity / *A. Deb, Jr. D. P. Henry, E. B. Wilson* // *Int. J. Solids Struct.* — 1991. — Vol. 27, Issue 13. — P. 1721-1738.
- [9] *Shiah, Y. C.* Exact boundary integral transformation of the thermoelastic domain integral in BEM for general 2D anisotropic elasticity / *Y. C. Shiah, C. L. Tan* // *Computational Mechanics.* — 1999. — Vol. 23, No 1. — P. 87-96.
- [10] *Shiah, Y. C.* Fracture mechanics analysis in 2-D anisotropic thermoelasticity using BEM / *Y. C. Shiah, C. L. Tan* // *CMES.* — 2000. — Vol. 1, No 3. — P. 91-99.
- [11] *Мухелишвили, Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения; изд. 3-е, испр. и дополн. / *Н. И. Мухелишвили.* — Москва: Наука, 1968. — 512 с.
- [12] *Pasternak, Ia.* Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities / *Ia. Pasternak* // *Engng. Anal. Bound. Elem.* — 2011. — Vol. 35, No 4. — P. 678-690.

## Integral equations for modelling of plane hygrothermoelasticity of anisotropic solids

Iaroslav Pasternak, Heorhiy Sulym

*This paper derives closed-form Somigliana type boundary integral equations for plane hydrothermoelasticity of anisotropic solids. In the absence of the volume forces, the distributed sources of heat and moisture obtained equations do not contain domain integral terms. This allows to model effectively corresponding solids, in particular, using the computational algorithm of the boundary element method for the numerical solution of the obtained integral equations. Numerical examples of application of the developed approaches for studying of the coupled fields in anisotropic solids with cracks have been considered.*

## Интегральные уравнения для моделирования плоской термовлагоупругости анизотропных тел

Ярослав Пастернак, Георгий Сулим

*Построены в замкнутой форме граничные интегральные уравнения типа Сомиглианы для плоской задачи термовлагоупругости анизотропного тела. Полученные уравнения не содержат интегралов по области тела. Это дает возможность эффективно моделировать соответствующие тела, в частности, с использованием схемы метода граничных элементов для численного решения полученных интегральных уравнений. Рассмотрены численные примеры применения разработанных подходов при моделировании анизотропных тел с трещинами.*

Отримано 15.02.12