УДК 621.372.061:517.3

Використання дробових похідних для аналізу нестаціонарного руху газу в трубопроводах за наявності компресорних станцій та відводів

Ярослав П'янило

Д. т. н., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: pjanylo@cmm.lviv

Розглянуто нестаціонарну ізотермічну модель процесу руху газу в трубопроводі в термінах дробових похідних Капутто за часовою змінною. Проведено лінеаризацію вихідної нелінійної моделі та знайдено розв'язок в аналітичному вигляді. Розглядуваний спосіб лінеаризації дає можливість побудувати ітераційний алгоритм знаходження розв'язку вихідної нелінійної моделі.

Ключові слова: математична модель, нестаціонарний рух газу, дробові похідні, лінеаризація, інтегральні перетворення.

Вступ. Розвиток теорії та методів математичного та комп'ютерного моделювання процесів і систем базується на використанні нових ідей, підходів і методів з області аналізу, прикладної й обчислювальної математики. Однією з актуальних проблем моделювання в широкому сенсі слова є проблема адекватності математичних моделей досліджуваним об'єктам. Математичні моделі традиційно вивчаються на базі апарату інтегро-диференціальних рівнянь або їх систем у звичайних і частинних похідних. Такий підхід передбачає, що інтеграли та похідні мають порядки, що виражаються цілими числами. Відомо, що більшість фізичних процесів описуються динамічними системами, в яких враховуються похідні дробових порядків. Дробове (диференціальне й інтегральне) числення в теорії фракталів і систем із пам'яттю набуває такого ж важливого значення, як і класичний аналіз у фізиці (механіці) суцільних середовищ [1-3]. Зростання уваги дослідників до дробового числення зумовлено численними ефективними використаннями його для опису широкого класу фізичних і хімічних процесів, що протікають у фрактальних середовищах, під час математичного моделювання фізичних явищ, зокрема, руху газу в трубопроводах. Відомо, що математичні моделі складних систем, у тому числі газотранспортних, будуються на базі теорії графів [4, 5-7], які об'єднують велику кількість технологічних об'єктів різного ступеня опису й адекватності. Оскільки трубопроводи є одними з основних технологічних об'єктів газотранспортних систем, то адекватність математичної моделі фізичному процесові набуває особливого значення.

Метою роботи є застосування та дослідження порядку дробової похідної за часом для аналізу неусталеного руху газу в трубопроводах.

1. Постановка задачі

Під час дослідження нестаціонарного руху газу з відборами за наявності компресорних станцій найчастіше використовують традиційну систему взаємозв’язаних диференціальних рівнянь у частинних похідних цілого порядку [4, 8-10]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x}+\rho\alpha\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\upsilon^2}{2}\right)+\rho g\dfrac{\partial h}{\partial x}+\dfrac{\lambda\upsilon^2}{2D}\rho+\dfrac{\partial(\rho\upsilon)}{\partial t}=\Theta(x,t), \\ \dfrac{\partial(\rho\upsilon)}{\partial x}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial p}{\partial t}=\Psi(x,t), \\ p=\rho\chi RT. \end{cases} \quad (1)$$

У першому рівнянні враховано втрати енергії на тертя, на подолання різниці перепаду висот трубопроводу, нестаціонарний опір і характер руху. Друге рівняння характеризує кількісний баланс газу, а третє — рівняння стану реального газу.

У системі (1) ρ,υ та p — відповідно густина, швидкість руху та тиск газу; λ — коефіцієнт гідравлічного опору; T — температура газу; h — глибина залягання труби; g — прискорення вільного падіння; D — діаметр трубопроводу; t — час; x, $x\in[0,l]$ — біжуча координата; l — довжина трубопроводу, χ — коефіцієнт стисливості, який характеризує відмінність реального газу від ідеального та визначається на основі побудованих емпіричних залежностей; R — газова стала. Функції

$$\Theta(x,t)=\sum_{i=1}^{I} p_{st,i}\,\delta(x-x_i)\left[\eta(t-t_{1i})-\eta(t-t_{2i})\right],$$
$$\Psi(x,t)=\pm\sum_{j=1}^{J}\frac{q_j(t)}{F}\,\delta(x-x_j)\left[\eta(t-t_{1j})-\eta(t-t_{2j})\right]$$

моделюють наявність вздовж траси компресорних станцій із координатами $x=x_i$, $i=\overline{1,I}$, та пунктів відводу в точках $x=x_j$, $j=\overline{1,J}$, з часами включення t_{1i}, t_{1j} і виключення t_{2i}, t_{2j} відповідно; F — площа поперечного перерізу трубопроводу; знак (+) вказує на відбір газу, а (–) — на поступлення.

Зазвичай, процес руху газу в горизонтальному трубопроводі довжини l розглядається за заданих граничних умов на функцію тиску $p(0,t)=p_{ok}(t)$, $p(l,t)=p_{kk}(t)$ або масової витрати $\omega(o,t)=\omega_{ok}(t)$, $\omega(l,t)=\omega_{kk}(t)$.

За початкову умову приймається відомий початковий стаціонарний розподіл тиску $p(x,0)=p_{om}(x)$ або масової витрати $\omega(x,0)=\omega_{om}(x)$.

Система (1) є нелінійна. Для розв'язку таких задач у роботах [5, 9-12] запропоновано ітераційний алгоритм з уточненням розв'язку на кожному наступному кроці. Як показує практика, такий підхід дозволяє розв'язати ряд практичних задач із допустимою точністю.

Зазвичай, використовуючи рівняння стану, система (1) у лінеаризованому варіанті записується у вигляді [8]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial t} + \dfrac{\partial p}{\partial x} + b_1 p + b_2 \omega + b_3 \dfrac{\partial \omega}{\partial x} = -b_0 \dfrac{a_p}{RT} + \varphi(\rho, v) + \Theta(x,t), \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial x} + \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial p}{\partial t} = \Psi(x,t), \end{cases} \tag{2}$$

де $\omega = \rho \upsilon$ — масова швидкість,

$$b_0 = \frac{\lambda a_\upsilon}{2D} + g\frac{\partial h}{\partial x}, \quad b_1 = b_0 \frac{b_p}{RT}, \quad b_2 = \frac{\lambda d_\upsilon}{2D}, \quad b_3 = \frac{\alpha\, d_\upsilon}{2},$$

$$\varphi(\rho,\upsilon) = \upsilon \frac{\alpha b_\upsilon}{2}\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\alpha \rho}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\upsilon^2 - a_\upsilon - b_\upsilon \upsilon\right) - \frac{\lambda \rho}{2D}\left(\upsilon^2 - a_\upsilon - b_\upsilon \upsilon\right) -$$

$$-\frac{b_0}{RT}\left[p\left(1+fp\right) - a_p - b_p p\right]$$

— нев'язка, що виникає внаслідок лінеаризації системи (1), $f = \left(24 - 0,21 T_C\right) \times$ $\times 0,101302 \cdot 10^{-9}$ (T_C — температура газу в градусах Цельсія). Розв'язок поставленої задачі за сталих початкових і граничних умов є в роботі [8].

Розглянемо поставлену вище задачу з нехтуванням сили Коріоліса за постійного значення коефіцієнта стисливості χ з використанням дробової похідної Капутто порядку α за часом, яка визначається формулою [1, 3, 13, 14]

$$D_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau .$$

За таких припущень система (2) записується

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha} \omega(x,t) + \dfrac{\partial p}{\partial x} + a\omega - bp = \Theta(x,t), \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial x} + \dfrac{1}{c^2} D_{0+}^{\alpha} p(x,t) = \Psi(x,t). \end{cases}$$

Якщо $\Im$ оператор перетворення Лапласа-Карсона функції $f(t)$ [15, 16], то справджується рівність

$$\Im\left(D_0^{\alpha} f(t)\right) = s^{\alpha}\left[F(s) - f(0)\right],$$

де $F(s)$ — зображення Лапласа-Карсона оригіналу $f(t)$. Тому якщо в останній системі перейдемо до зображень Лапласа-Карсона, то отримаємо

$$\begin{cases} \left(s^{\alpha}+a\right)\overline{\omega}+\dfrac{d\,\overline{p}}{dx}-b\,\overline{p}=s^{\alpha}\omega(x,0)+\overline{\Theta}, \\ \dfrac{d\overline{\omega}}{dx}+\dfrac{s^{\alpha}}{c^2}\,\overline{p}=\dfrac{s^{\alpha}}{c^2}\,p\left(x,0\right)+\overline{\Psi}. \end{cases} \tag{3}$$

Тут s — параметр перетворення Лапласа-Карсона, $\overline{p}\equiv\overline{p}(x,s)$, $\overline{\omega}\equiv\overline{\omega}(x,s)$, $\overline{\Theta}\equiv\overline{\Theta}(x,s)$ та $\overline{\Psi}\equiv\overline{\Psi}(x,s)$ — зображення Лапласа-Карсона відповідних оригіналів. Зокрема, якщо $q_j(t)=q_j\equiv const,$ то маємо

$$\overline{\Theta}(x,s)=\sum_{i=1}^{I}\ p_{st,i}\,\delta\left(x-x_i\right)\left[e^{-s\,t_{1i}}-e^{-s\,t_{2i}}\right],$$
$$\overline{\Psi}(x,s)=\sum_{j=1}^{J}\ \frac{q_j}{F}\,\delta\left(x-x_j\right)\left[e^{-t_{1j}s}-e^{-t_{2j}s}\right].$$

За сталих початково-граничних умов замість функцій $\overline{p}$ і $\overline{\omega}$ введемо в розгляд функції

$$\tilde{p}=\overline{p}+\frac{x}{l}h_p-p_{0k}, \qquad \tilde{\omega}=\overline{\omega}+\frac{x}{l}h_{\omega}-\omega_{0k},$$

де

$$h_p=p_{0k}-p_{kk}, \qquad h_{\omega}=\omega_{0k}-\omega_{kk}.$$

Введені таким чином функції $\tilde{p}$ і $\tilde{\omega}$ задовольняють нульові граничні умови. Оскільки

$$\frac{d\,\tilde{p}}{dx}=\frac{d\,\overline{p}}{dx}+\frac{1}{l}h_p, \qquad \frac{d\tilde{\omega}}{dx}=\frac{d\overline{\omega}}{dx}+\frac{1}{l}h_{\omega},$$

то в нових позначеннях система (3) набуде вигляду

$$\begin{cases} \left(s^{\alpha}+a\right)\overline{\omega}+\dfrac{d\,\tilde{p}}{dx}-b\tilde{p}=-\left(s^{\alpha}+a\right)\left(\dfrac{x}{l}h_{\omega}-\omega_{0k}\right)+ \\ +b\left(\dfrac{x}{l}h_p-p_{0k}\right)+s^{\alpha}\omega(x,0)-\dfrac{1}{l}h_p+\overline{\Theta}; \\ \dfrac{d\tilde{\omega}}{dx}+\dfrac{s^{\alpha}}{c^2}\,\tilde{p}=-\dfrac{s^{\alpha}}{c^2}\left(\dfrac{x}{l}h_p-p_{0k}\right)+\dfrac{s^{\alpha}}{c^2}\,p(x,0)-\dfrac{1}{l}h_{\omega}+\overline{\Psi}, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \left(s^{\alpha}+a\right)\tilde{\omega}+\dfrac{d\,\tilde{p}}{dx}-b\tilde{p}=\varphi_1; \\ \dfrac{d\tilde{\omega}}{dx}+\dfrac{s^{\alpha}}{c^2}\,\tilde{p}=\varphi_2, \end{cases} \tag{4}$$

де

$$\varphi_1=-\left(s^{\alpha}+a\right)\left(\frac{x}{l}h_{\omega}-\omega_{0k}\right)+b\left(\frac{x}{l}h_p-p_{0k}\right)+s^{\alpha}\omega(x,0)-\frac{1}{l}h_p+\overline{\Theta}\,,$$

$$\varphi_2=-\frac{s^{\alpha}}{c^2}\left(\frac{x}{l}h_p-p_{0k}\right)+\frac{s^{\alpha}}{c^2}\,p(x,0)-\frac{1}{l}h_{\omega}+\overline{\Psi}\,.$$

Оскільки крайові умови нульові, то систему (4) доцільно розв'язувати методом розділення змінних із використанням рядів Фур'є за синусами, тобто

$$\begin{Bmatrix} \tilde{p}(x,s) \\ \tilde{\omega}(x,s) \end{Bmatrix}=\sum_{n=1}^{\infty}\begin{Bmatrix} \tilde{p}_n(s) \\ \tilde{\omega}_n(s) \end{Bmatrix}\sin\frac{n\pi x}{l}\,. \tag{5}$$

Тут коефіцієнти Фур'є $b_n=\begin{Bmatrix} \tilde{p}_n(s) \\ \tilde{\omega}_n(s) \end{Bmatrix}$ функцій $b(x)=\begin{Bmatrix} \tilde{p}(x,s) \\ \tilde{\omega}(x,s) \end{Bmatrix}$ обчислюються за формулою

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l b(x)\,\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

або

$$b_n=\frac{1}{li}\left[\int_0^l b(x)e^{n\pi i x/l}\,dx-\int_0^l b(x)e^{-n\pi i x/l}\,dx\right]. \tag{6}$$

Позначимо

$$\hat{b}_n=\frac{1}{l}\int_0^l b(x)\,e^{-n\pi i x/l}\,dx\,. \tag{7}$$

Тоді згідно формули (6)

$$b_n=-i\left(\hat{b}_{-n}-\hat{b}_n\right).$$

Оскільки $b(0)=b(l)=0,$ то рівність (7) зводиться до вигляду

$$\hat{b}_n=\nu_n\int_0^l\frac{d\,b(x)}{dx}\,e^{-\frac{x}{\nu_n l}}\,dx\,,\qquad \frac{\hat{b}_n}{l\nu_n}=\frac{1}{l}\int_0^l\frac{d\,b(x)}{dx}\,e^{-\frac{x}{\nu_n l}}\,dx \tag{8}$$

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2012, вип. 16, 122-132

або

$$\hat{b}_n / l\nu_n = \hat{b}'_n .$$

З системи (4) визначимо функцію $db(x)/dx$, тобто

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{p}}{dx} = \varphi_1 + b\,\tilde{p} - \left(s^\alpha + a\right)\tilde{\omega}, \\ \dfrac{d\tilde{\omega}}{dx} = \varphi_2 - \dfrac{s^\alpha}{c^2}\,\tilde{p}. \end{cases} \qquad (9)$$

З формул (8) і (9) отримуємо

$$\tilde{p}(s) = \nu_n\, l\left[\varphi_{1n} + b\,\tilde{p}_n(s) - \left(s^\alpha + a\right)\tilde{\omega}_n(s)\right], \qquad (10)$$

$$\tilde{\omega}_n(s) = \nu_n\, l\left[\varphi_{2n} - \frac{s^\alpha}{c^2}\,\tilde{p}_n(s)\right]. \qquad (11)$$

Підставимо вираз (11) у формулу (10). Отримаємо

$$\tilde{p}_n(s) = \nu_n\, l\,\varphi_{1n} + b\,l\,\nu_n\tilde{p}_n - \left(\nu_n\, l\right)^2\left(s^\alpha + a\right)\varphi_{2n} + \frac{s^\alpha}{c^2}\left(\nu_n\, l\right)^2\left(s^\alpha + a\right)\tilde{p}_n ,$$

звідки

$$\tilde{p}_n(s) = \nu_n\, l\,\frac{\varphi_{1n} - \nu_n\, l\left(s^\alpha + a\right)\varphi_{2n}}{1 - b\,l\,\nu_n - \left(\nu_n\, l/c\right)^2 s^\alpha\left(s^\alpha + a\right)} .$$

Позначивши $\kappa_n = \dfrac{1 - b\,l\,\nu_n}{\left(\nu_n\, l/c\right)^2}$, запишемо

$$\tilde{p}_n(s) = -\left(\frac{c}{\nu_n\, l}\right)^2 \nu_n\, l\,\frac{\varphi_{1n} - \nu_n\, l\left(s^\alpha + a\right)\varphi_{2n}}{s^{2\alpha} + a s^\alpha + \kappa_n} ,$$

або, коли $s^\alpha = \bar{s}$,

$$\tilde{p}_n(s) = -\left(\frac{c}{\nu_n\, l}\right)^2 \nu_n\, l\,\frac{1}{\left(\bar{s} - s_1\right)\left(\bar{s} - s_2\right)}\left[\varphi_{1n} - \nu_n\, l\left(\bar{s} + a\right)\varphi_{2n}\right],$$

де $s_1 = \left(-a - \sqrt{a^2 - 4\kappa_n}\right)\Big/2,\ s_2 = \left(-a + \sqrt{a^2 - 4\kappa_n}\right)\Big/2$.

Згідно означення

$$\varphi_{1n} = \frac{1}{l}\int_0^l \left\{ \frac{x}{l}\left[\left(\bar{s}+a\right) h_\omega - b h_p \right] + \bar{s}\,\omega_{om} - \left(\bar{s}+a\right)\omega_{ok} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{l} h_p + b p_{ok} + \bar{\Theta}(x,s) \right\} e^{-x/\nu_n l}\, dx\,.$$

Оскільки

$$\int_0^l e^{-x/\nu_n l}\, dx = \nu_n l \left[1 + (-1)^{n+1} \right], \qquad \int_0^l x e^{-x/\nu_n l}\, dx = \nu_n l^2 \left[\nu_n + (-1)^{n+1} \left(1+\nu_n\right) \right],$$

то при

$$\hat{\nu}_n = \nu_n \left[1 + (-1)^{n+1} \right], \qquad \hat{\hat{\nu}}_n = \nu_n \left[\nu_n + (-1)^{n+1} \left(1+\nu_n\right) \right]$$

отримуємо

$$\varphi_{1n} = \hat{\hat{\nu}}_n \left[\left(\bar{s}+a\right) h_\omega - b h_p \right] + \hat{\nu}_n \left[\bar{s}\,\omega_{om} - \left(\bar{s}+a\right)\omega_{ok} + \frac{1}{l} h_p + b p_{0k} \right] + \bar{\Theta}_n(s)\,,$$

де $\bar{\Theta}_n(s) = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{I} p_{om,i}\, e^{-x_i/\nu_n l} \left(e^{-t_{1i}s} - e^{-t_{2i}s} \right)$.

Аналогічно одержимо формулу

$$\varphi_{2n} = \hat{\hat{\nu}}_n \frac{\bar{s}}{c^2} h_p + \hat{\nu}_n \left[\frac{\bar{s}}{c^2}\left(p_{om} - p_{on}\right) + \frac{1}{l} h_\omega \right] + \bar{\Psi}_n(s)\,,$$

де $\bar{\Psi}_n(s) = \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{J} \frac{q_j}{F}\, e^{-x_j/\nu_n l} \left(e^{-t_{1j}s} - e^{-t_{2j}s} \right)$.

Таким чином, маємо

$$\tilde{p}_n(s) = -\left(\frac{c}{\nu_n l}\right)^2 \nu_n l \frac{1}{\left(\bar{s}-s_1\right)\left(\bar{s}-s_2\right)} \left\langle \left\{ \hat{\hat{\nu}}_n \left(a h_\omega - b h_p \right) + \hat{\nu}_n \left(\frac{1}{l} h_p + b p_{ok} - a\omega_{ok} \right) - \right.\right.$$

$$\left. - a\nu_n \hat{\nu}_n h_\omega \right\} + \bar{s} \left\{ \hat{\hat{\nu}}_n h_\omega + \hat{\nu}_n \left(\omega_{om} - \omega_{ok}\right) - \nu_n l \left[\frac{1}{l} h_\omega \hat{\nu}_n + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{a}{c^2}\left(\hat{\hat{\nu}}_n h_p + \hat{\nu}_n \left(p_{om} - p_{ok}\right) \right) \right] \right\} - \nu_n l \frac{\bar{s}^2}{c^2} \left[\hat{\hat{\nu}}_n h_p + \hat{\nu}_n \left(p_{om} - p_{ok}\right) \right] +$$

$$\left. + \bar{\Theta}_n(s) - \nu_n l \left(\bar{s}+a\right) \bar{\Psi}_n(s) \right\rangle .$$

Тут

$$d_1 = \hat{\hat{\nu}}_n \left(ah_\omega - bh_p\right) + \hat{\nu}_n \left(\frac{1}{l} h_p + bp_{ok} - a\omega_{ok}\right) - a\,\nu_n\,\hat{\nu}_n\,h_\omega,$$

$$d_2 = \hat{\hat{\nu}}_n\,h_\omega + \hat{\nu}_n\left(\omega_{om} - \omega_{ok}\right) - \nu_n\,l\left\{\frac{1}{l}\hat{\nu}_n\,h_\omega + \frac{a}{c^2}\left[\hat{\hat{\nu}}_n\,h_p + \hat{\nu}_n\left(p_{om} - p_{ok}\right)\right]\right\},$$

$$d_3 = -\nu_n\,l\frac{1}{c^2}\left[\hat{\hat{\nu}}_n\,h_p + \hat{\nu}_n\left(p_{om} - p_{ok}\right)\right].$$

Тоді

$$\hat{\bar{p}}_n(s) = -\left(\frac{c}{\nu_n\,l}\right)^2 \frac{\nu_n\,l}{\left(\bar{s}-s_1\right)\left(\bar{s}-s_2\right)}\left\{d_1 + \bar{s}d_2 + \bar{s}^2 d_3 + \bar{\Theta}_n(s) - \nu_n\,l\left(\bar{s}+a\right)\Psi_n(s)\right\}.$$

Якщо вважати, що $\bar{s}$ параметр перетворення Лапласа-Карсона, то зображенням

$$\bar{\xi}_{1n}(s) = \frac{1}{\left(\bar{s}-s_1\right)\left(\bar{s}-s_2\right)}, \quad \bar{\xi}_{2n}(s) = \frac{\bar{s}}{\left(\bar{s}-s_1\right)\left(\bar{s}-s_2\right)}, \quad \bar{\xi}_{3n}(s) = \frac{\bar{s}^2}{\left(\bar{s}-s_1\right)\left(\bar{s}-s_2\right)}$$

відповідають оригінали

$$\zeta_{1n} = \frac{1}{s_1\,s_2} - \frac{e^{s_1\,\tau}}{s_1\left(s_2 - s_1\right)} + \frac{e^{s_2\,\tau}}{s_2\left(s_2 - s_1\right)}, \quad \zeta_{2n} = \frac{e^{s_2\,\tau} - e^{s_1\,\tau}}{\left(s_2 - s_1\right)}, \quad \zeta_{3n} = \frac{s_2\,e^{s_2\,\tau} - s_1\,e^{s_1\,\tau}}{\left(s_2 - s_1\right)}.$$

Для знаходження оригіналів зображень із параметром перетворення Лапласа-Карсона s^{α} використовуємо теорему Ефроса [15].

Теорема Ефроса. Якщо оператор $\bar{a}(p)$ можна подати у вигляді $\bar{a}(p) = \bar{\Phi}\left(q(p)\right)/pq(p)$, причому:

а) $\bar{\Phi}(p) = p\int\limits_0^\infty \Phi(t)e^{-pt}dt$ та $\int\limits_0^\infty \left|\Phi(t)\right|e^{-\gamma_0 t}dt < \infty$, де $\gamma_0 > 0$;

б) $q(p)$ аналітична в півплощині $\operatorname{Re} p > \gamma_0 \ge 0$ функція, яка задовольняє в півплощині умові $\operatorname{Re} q(p) \ge \gamma_0$.

Тоді оператор $\bar{a}(p)$ зводиться до функції

$$\bar{a}(p) = \int\limits_0^\infty L\left(t,\xi\right)\Phi\left(\xi\right)d\xi,$$

де $L\left(t,\xi\right) = e^{-\xi q(p)}/p$.

Застосуємо теорему Ефроса для знаходження оригіналу зображення

$$\bar{\xi}_{1n}(s) = \frac{1}{\left(\bar{s}-s_1\right)\left(\bar{s}-s_2\right)}.$$

У цьому випадку

$$\Phi(s)=\frac{1}{\left(s-s_1\right)\left(s-s_2\right)}, \quad q(s)=s^{\alpha}.$$

Оригінал зображення $e^{-\xi s^{\alpha}} \big/ s$ знаходиться методом контурного інтегрування та має вигляд

$$L\left(t,\xi\right)=1-\frac{1}{\pi\alpha}\int_0^{\infty}\frac{1}{\upsilon}e^{-t\upsilon^{1/\alpha}}\sin\left(\xi\upsilon\right)d\upsilon .$$

Таким чином зображенням

$$\overline{\xi}_{1n}(s)=\frac{1}{\left(\overline{s}-s_1\right)\left(\overline{s}-s_2\right)}, \quad \overline{\xi}_{2n}(s)=\frac{\overline{s}}{\left(\overline{s}-s_1\right)\left(\overline{s}-s_2\right)}, \quad \overline{\xi}_{3n}(s)=\frac{\overline{s}^2}{\left(\overline{s}-s_1\right)\left(\overline{s}-s_2\right)}$$

відповідають такі оригінали

$$H_{1n}(t)=\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{s_1 s_2}-\frac{e^{s_1\tau}}{s_1\left(s_2-s_1\right)}+\frac{e^{s_2\tau}}{s_2\left(s_2-s_1\right)}\right]\left[1-\frac{1}{\pi\alpha}\int_0^{\infty}\frac{1}{\upsilon}e^{-t\upsilon^{1/\alpha}}\sin(\tau\upsilon)d\upsilon\right]d\tau ,$$

$$H_{2n}(t)=\int_0^{\infty}\left[\frac{e^{s_2\tau}-e^{s_1\tau}}{\left(s_2-s_1\right)}\right]\left[1-\frac{1}{\pi\alpha}\int_0^{\infty}\frac{1}{\upsilon}e^{-t\upsilon^{1/\alpha}}\sin(\tau\upsilon)d\upsilon\right]d\tau ,$$

$$H_{3n}(t)=\int_0^{\infty}\left[\frac{s_2 e^{s_2\tau}-s_1 e^{s_1\tau}}{\left(s_2-s_1\right)}\right]\left[1-\frac{1}{\pi\alpha}\int_0^{\infty}\frac{1}{\upsilon}e^{-t\upsilon^{1/\alpha}}\sin(\tau\upsilon)d\upsilon\right]d\tau .$$

Якщо

$$\overline{\xi}_{4n}(s)=\frac{\overline{\Theta}_n(s)}{\left(\overline{s}-s_1\right)\left(\overline{s}-s_2\right)}=\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{I} p_{st,i}\, e^{-\frac{x_i}{\nu_n l}}\left[\frac{e^{-t_{1i}s}}{\left(\overline{s}-s_1\right)\left(\overline{s}-s_2\right)}-\frac{e^{-t_{2i}s}}{\left(\overline{s}-s_1\right)\left(\overline{s}-s_2\right)}\right],$$

то

$$H_{4n}(t)=\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{I} p_{st,i}\, e^{-\frac{x_i}{\nu_n l}}\left[\begin{cases}0, & t<t_{1i}\\ H_{1n}(t-t_{1i}), & t>t_{1i}\end{cases}-\begin{cases}0, & t<t_{2i}\\ H_{1n}(t-t_{2i}), & t>t_{2i}\end{cases}\right].$$

Аналогічно, якщо

$$\overline{\xi}_{5n}(s)=\frac{\overline{s}+a}{\left(\overline{s}-s_1\right)\left(\overline{s}-s_2\right)}\overline{\Psi}_n(s)=\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{J}\frac{q_j}{F}\, e^{-\frac{x_j}{\nu_n l}}\left[e^{-t_{2j}s}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\overline{\xi}_{2n}(s)+a\overline{\xi}_{1n}(s)\right)-e^{-t_{2j}s}\left(\xi_{2n}(s)+a\overline{\xi}_{1n}(s)\right)\right],$$

то

$$H_{5n}(t)=\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{J}\frac{q_j}{F}e^{-\frac{x_j}{\nu_n l}}\left[\begin{cases}0, & t<t_{1j}\\ H_{2n}\left(t-t_{1j}\right)+aH_{1n}\left(t-t_{1j}\right), & t>t_{1j}\end{cases}-\right.$$
$$\left.-\begin{cases}0, & t<t_{2j}\\ H_{2n}\left(t-t_{2j}\right)+aH_{1n}\left(t-t_{2j}\right), & t>t_{2j}\end{cases}\right].$$

Використовуючи знайдені оригінали, отримуємо коефіцієнти ряду (5)

$$\tilde{p}_n(t)=-\left(\frac{c}{l}\right)^2\frac{l}{\nu_n}\left[d_1H_{1n}(t)+d_2H_{2n}(t)+d_3H_{3n}(t)\right]-\left(\frac{c}{l}\right)^2\frac{l}{\nu_n}H_{4n}(t)+c^2H_{5n}(t)\,.$$

Оскільки оригінали коефіцієнтів ряду розкладу функції тиску в ряд (5) знайдено, то на основі адитивної властивості перетворення Лапласа-Карсона можна вважати, що знайдено розв’язок поставленої задачі стосовно тиску.

Висновок. Отримані результати дають можливість оцінювати вплив порядку дробової похідної Капутто за часом на процес транспортування газу в трубопроводах. Порядок дробової похідної може служити додатковим параметром адаптації математичної моделі. Оскільки газотранспортні системи відносяться до систем із пам’яттю, то використання дробових похідних дозволить побудувати більш адекватні математичні моделі процесу руху газу в цих системах.

Література

[1] *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка; Научно-исследовательский ин-т приклад. математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН. — Москва: Наука, 2005. — 199 с.

[2] *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. — Москва: Физматлит, 2003. — 272 с.

[3] *Нахушева В. А.* Некоторые классы дифференциальных уравнений математических моделей нелокальных физических процессов. — Нальчик: КБНЦ РАН, 2002. — 100 с.

[4] Математичне моделювання динамічних процесів в газотранспортних системах (програмний комплекс) / *Притула Н. М., П’янило Я. Д., Притула М. Г., Гринів О. Д.*; під заг. ред. *В. Д. Кубенка, Р. М. Кушніра, Д. В. Тарлаковського*. — Львів, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2012. — С. 166-170.

[5] *Майника Э.* Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. — Москва: Мир, 1981. — 323 с.

[6] *Scheritz T., Sąsiadek M., Nahirny T.* Zastosowanie analizy sieciowej do reorganizacji procesu remontowo-obsługowego; B: Inżynieria produkcji : technologia, informacja, zastosowania; red. *J. Jakubowski, C. Saniuk, R. Stryjski*. — Zielona Góra: Oficyna Wydaw. Uniwersytetu Zielonogórskiego, 2007. — S. 195-202.

[7] *Nahirny T., Sąsiadek M.* Komputerowe wspomaganie wyboru sekwencji montażu a metody sieciowe // Komputerowo zintegrowane zarządzanie. T. 2; pod red. *R. Knosali*. — Opole: Oficyna Wydaw. Polskiego Towarzystwa Zarządzania Produkcją, 2009. — S. 200-205.

[8] *П’янило Я. Д.* Розподіл гідравлічного тиску при нестаціонарному русі газу в трубопроводах при наявності компресорних станцій та відборів // Нелінійні коливання. — 1998. — Вип. 2. — С. 84-88.

[9] *П'янило Я. Д., Притула М. Г., Землянський Б. В.* Ітераційні методи розв'язування задач про розподіл тиску в трубопроводах // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2005. — Вип. 1. — С. 97-105.

[10] Алгоритми розрахунку гідродинамічних параметрів течії газу в трубопроводах (1) / *Н. Лопух, М. Притула, Я. П'янило, Я. Савула* // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. — 2007. — Вип. 12. — С. 108-117.

[11] *П'янило Я. Д., Притула Н. М., П'янило Г. М.* Моделювання газотранспортних мереж з урахуванням змінності параметрів стану газу та рельєфу траси трубопроводів // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2008. — Вип. 7. — С. 145-153.

[12] *П'янило Я., П'янило Г.* Дослідження впливу теплофізичних параметрів на процес руху газу в трубопроводах // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2009. — Вип. 10. — С. 58-69.

[13] *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.

[14] *Васильев В. В., Симак Л. А.* Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. — Киев: Научное издание НАН Украины, 2008. — 256 с.

[15] *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление. — Москва: Высшая школа, 1975. — 407 с.

[16] *Диткин В. А., Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. — Москва: Высшая школа, 1965. — 466 с.

The use of fractional derivatives for the analysis of unsteady gas flow in the pipeline in the presence of compressor stations and branches

Yaroslav Pjanylo

Nonstationary isothermal model of gas flow in the pipeline in terms of Caputto fractional derivatives in the time variable is considered. Linearization of the original nonlinear model is carried out and a solution in analytical form is found. This method of linearization makes it possible to construct an iterative algorithm of finding of a solution of the original nonlinear model.

Использование дробных производных для анализа нестационарного движения газа в трубопроводах при наличии компрессорных станций и отводов

Ярослав Пьянило

Рассмотрена нестационарная изотермическая модель процесса движения газа в трубопроводе в терминах дробных производных Капутто по временной переменной. Проведено линеаризацию исходной нелинейной модели и найдены решения в аналитическом виде. Рассматриваемый способ линеаризации дает возможность построить итерационный алгоритм нахождения решения исходной нелинейной модели.

Отримано 21.11.12