

Математична модель тепловологоперенесення та напружено-деформівного стану у капілярно-пористих матеріалах із фрактальною структурою

Ярослав Соколовський¹, Володимир Шиманський²

¹ д. т. н., професор, Національний лісотехнічний університет України, e-mail: sokolowskyu@yahoо.com

² Національний лісотехнічний університет України, e-mail: vshymanskiy@gmail.com

Розглянуто математичну модель розподілу деформаційно-релаксаційних і тепломасообмінних полів у капілярно-пористих матеріалах із фрактальною структурою, для опису якої використовувалися диференціальні рівняння у частинних похідних із дробовим порядком. Різницевим методом отримано чисельний розв'язок задачі для різних значень дробової похідної.

Ключові слова: похідна дробового порядку, фрактал, масоперенесення, капілярно-пористий, чисельний метод, деформаційно-релаксаційні поля.

Вступ. На сьогодні актуальною є наукова задача створення адекватних математичних моделей розподілу деформаційно-релаксаційних і температурно-вологісних полів у процесі сушіння деревини. Розв'язування цієї проблеми ускладнюється тим, що деревина характеризується високою гідрофобністю, значною мінливістю структури фізико-механічних властивостей у напрямках анізотропії. Тому для аналізу цього процесу актуальним є не лише наявність фізико-математичної моделі, адекватної реальним процесам, а й вибір ефективного чисельного методу її реалізації.

Простіші реологічні моделі широко використовуються для описання спадкових властивостей різних середовищ у лінійній області. Будучи простими та наглядними, вони мають один важливий недолік — вони не враховують розмиття релаксаційного спектра, який є властивим для реальних матеріалів, що, своєю чергою, враховується у фрактальних моделях.

Особливість фізичних систем із фрактальною структурою полягає в тому, що для них істотні такі властивості, як: «пам'ять», складна природа просторових кореляцій та ефекти самоорганізації. Створення адекватних математичних моделей для систем, у яких проявляються властивості самоорганізації, детермінованого хаосу, також вимагає залучення нетрадиційних підходів, заснованих на застосуванні математичного апарату диференціальних рівнянь дробового порядку [1]. Фрактальні моделі за рахунок дробового параметра α дозволяють повніше описувати деформаційно-релаксаційні процеси порівняно з традиційними методами.

Аналіз існуючих досліджень [2-5] свідчить про те, що аналітичні методи розв'язування рівнянь дробової дифузії виявляються малоефективними, а теорія чисельних методів їх розв'язування носить фрагментарний характер і далека від завершення.

У цій роботі було використано чисельний метод предиктор-коректор для знаходження розв'язку системи диференціальних рівнянь із частинними похідними дробового порядку.

1. Постановка задачі

Математична модель розподілу температурно-вологісних полів у капілярно-пористих матеріалах із фрактальною структурою описується системою диференціальних рівнянь у частинних похідних із дробовим порядком [6]

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial^\alpha T}{\partial \tau^\alpha} &= \lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \varepsilon \rho_0 r \frac{\partial^\alpha U}{\partial \tau^\alpha}, \\ \frac{\partial^\alpha U}{\partial \tau^\alpha} &= a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + a_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + a_1 \delta \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + a_2 \delta \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

відповідними початковими умовами

$$T|_{\tau=0} = T_0(x), \quad U|_{\tau=0} = U_0(x) \quad (2)$$

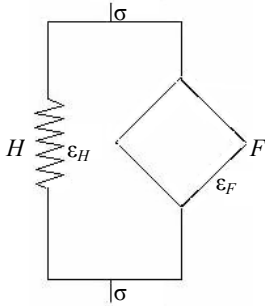
та граничними умовами 3-го роду

$$\begin{aligned} \lambda_i \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{x_i=l_i} + \rho_0(1-\varepsilon)\beta(U|_{x_i=l_i} - U_P) &= \alpha_i(T|_{x_i=l_i} - t_c), \\ a_i \delta \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{x_i=l_i} + a_i \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{x_i=l_i} &= \beta(U_P - U_{x_i=l_i}), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{x_i=0} = 0, \quad a_i \delta \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{x_i=0} + a_i \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{x_i=0} = 0, \quad (4)$$

де U — вологовміст; T — температура; τ — час; $\lambda_i(T, U)$ — коефіцієнти теплопровідності; $a_i(T, U)$ — коефіцієнти вологопровідності; n — зовнішня нормаль; $U_P(t_c, \phi)$ — рівноважний вологовміст, що є функцією від температури середовища t_c та відносної вологості зовнішнього середовища ϕ ; $c(T, U)$ — питома теплоємність; $\rho(U)$ — густина; ρ_0 — базисна густина; ε — коефіцієнт фазового переходу; v — швидкість руху агента сушіння; r — питома теплота пароутворення; $\alpha_i(t_c, v)$ — коефіцієнти теплообміну; $\beta(t_c, \phi, v)$ — коефіцієнт вологообміну; $\delta(T, U)$ — термоградієнтний коефіцієнт; α — дробовий порядок похідної (який характеризує частку каналів відкритих для протікання).

Розглянемо основні динамічні та фізичні співвідношення, що описують реологічну поведінку деревини у процесі сушіння. Це можна зробити, розглянувши основні співвідношення найпростіших структурних одиниць матеріалу деревини:



$$\sigma = \sigma_H + \sigma_F, \quad (5)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_F, \quad (6)$$

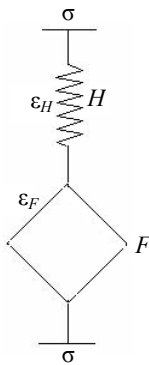
$$\sigma_H = E\varepsilon_H, \quad (7)$$

$$\sigma_F = E\eta^\alpha D^\alpha \varepsilon_F, \quad (8)$$

$$\sigma = E\varepsilon_H + E\eta^\alpha D^\alpha \varepsilon_F. \quad (9)$$

Рис. 1. Фрактальна модель Фойгта

На рис. 1 зображено фрактальну модель Фойгта, яка характеризується паралельним з'єднанням пружного та фрактального елемента. В основі пружного елемента лежить закон Гука (5), а фрактального — закон в'язкості Ньютона (6), що описується диференціальним рівнянням з похідною дробового порядку. Таким чином співвідношення між напруженням σ та деформаціями ε можна записати у вигляді (7). Тут $D^\alpha f$ — оператор диференціювання дробового порядку [2].



$$\sigma = \sigma_H + \sigma_F, \quad (10)$$

$$D^\alpha \varepsilon = D^\alpha \varepsilon_H + D^\alpha \varepsilon_F, \quad (11)$$

$$\sigma_H = E\varepsilon_H, \quad (12)$$

$$\sigma_F = E\eta^\alpha D^\alpha \varepsilon_F, \quad (13)$$

$$D^\alpha \varepsilon_H = \frac{1}{E} D^\alpha \sigma_H, \quad (14)$$

$$D^\alpha \varepsilon = \frac{1}{E} D^\alpha \sigma + \frac{1}{E\eta^\alpha} \sigma. \quad (15)$$

Рис. 2. Фрактальна модель Максвелла

На рис. 2 зображено фрактальну модель Максвелла, яка характеризується послідовним з'єднанням пружного та фрактального елемента, в основі яких також лежать закони Гука та в'язкості Ньютона. Відповідно співвідношення між напруженням σ та деформаціями ε можна записати у вигляді (8).

Також зв'язок між компонентами деформацій і напружень можна подати за допомогою інтегрального рівняння Вольтера

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{E} \int_0^t \Pi(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau^\alpha, \quad \sigma(t) = E\varepsilon(t) + E \int_0^t R(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau^\alpha.$$

Підібравши ядра релаксації $R(t, \tau)$ та повзучості $\Pi(t, \tau)$ певним чином, ми можемо переходити від одної фрактальної моделі до іншої.

Для моделювання напружено-деформівного стану деревини знайдемо компоненти вектора переміщень $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$, який задовольняє рівняння рівноваги

$$\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Граничні умови (що враховують симетричність області задачі) такі

$$u_i|_{x_i=0} = 0, \quad \sigma_{ii}|_{x_i=l_i} = 0. \quad (10)$$

Тут $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})^T$ — вектор компонент напружень, \mathbf{B}^T — матриця диференціальних операторів

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}.$$

Співвідношення між переміщеннями та вектором деформацій $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})^T$ записується таким чином

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}.$$

Зв'язок між компонентами напружень і деформацій деревини у процесі сушіння базується на диференціальних рівняннях в'язкопружності та визначається формулами [7, 8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha \sigma_{11}}{\partial \tau^\alpha} &= C_{11} \left(\frac{\partial^\alpha \varepsilon_{11}}{\partial \tau^\alpha} - \frac{\partial^\alpha \varepsilon_{T1}}{\partial \tau^\alpha} \right) - C_{11} R_{11}(t, \tau) (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + \\ &+ C_{12} \left(\frac{\partial^\alpha \varepsilon_{22}}{\partial \tau^\alpha} - \frac{\partial^\alpha \varepsilon_{T2}}{\partial \tau^\alpha} \right) - C_{12} R_{12}(t, \tau) (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2}), \\ \frac{\partial^\alpha \sigma_{22}}{\partial \tau^\alpha} &= C_{21} \left(\frac{\partial^\alpha \varepsilon_{11}}{\partial \tau^\alpha} - \frac{\partial^\alpha \varepsilon_{T1}}{\partial \tau^\alpha} \right) - C_{21} R_{21}(t, \tau) (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+C_{22}\left(\frac{\partial^\alpha \varepsilon_{22}}{\partial \tau^\alpha}-\frac{\partial^\alpha \varepsilon_{T2}}{\partial \tau^\alpha}\right)-C_{22}R_{22}(t, \tau)\left(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{T2}\right), \\
 \frac{\partial^\alpha \sigma_{12}}{\partial \tau^\alpha} &=2C_{33}\left(\frac{\partial^\alpha \varepsilon_{12}}{\partial \tau^\alpha}-\frac{\partial^\alpha \varepsilon_{T3}}{\partial \tau^\alpha}\right)-2C_{33}R_{33}(t, \tau)\left(\varepsilon_{12}-\varepsilon_{T3}\right),
 \end{aligned} \tag{11}$$

де $\varepsilon_T = (\varepsilon_{T1}, \varepsilon_{T2}, 0)^T$ — вектор деформацій, що зумовлені змінними градієнтами температури ΔT та вмісту вологи ΔU відповідно; C_{ij} — компоненти тензора пружності анізотропного тіла

$$\varepsilon_T = \begin{bmatrix} \varepsilon_{T1} \\ \varepsilon_{T2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \Delta T + \beta_1 \Delta U \\ \alpha_2 \Delta T + \beta_2 \Delta U \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1-\nu_1\nu_2} & \frac{\nu_1 E_{22}}{1-\nu_1\nu_2} & 0 \\ \frac{\nu_1 E_{22}}{1-\nu_1\nu_2} & \frac{E_{22}}{1-\nu_1\nu_2} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Тут E_{11}, E_{22} — модулі Юнга; ν_1, ν_2 — коефіцієнти Пуассона; μ — модуль зсуву. У цій задачі враховано, що коефіцієнти матриці пружності залежать від значень температури та вмісту вологості матеріалу [9].

Ядра релаксації $R_{ij}(T_0, \tau)$ мають вигляд

$$\begin{aligned}
 R &= R(T_0, \tau) = R_1(T_0 - \tau) \cdot R_2(\tau - T_0) = \\
 &= \left[\sum_{i=0}^{\infty} \eta_i E_{\alpha_i, \beta_i}(T_0 - \tau) \right] * \left[\sum_{j=0}^{\infty} \eta_j E_{\alpha_j, \beta_j}(\tau - T_0) \right],
 \end{aligned}$$

де $E_{\alpha, \beta}(z)$ — функції Мітгаг-Леффлера.

2. Чисельний метод розв'язку диференціальних рівнянь із похідними дробового порядку

Розглянемо систему диференціальних рівнянь у частинних похідних, що описує процес тепло- та масоперенесення у середовищах із фрактальною структурою, що має вигляд (1). Приймаємо, що дробова похідна порядку α на відрізку $[\tau^n; \tau^{n+1}]$ є похідна Рімана-Ліувілля

$$\left. \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha} \right|_{\tau^n} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{u(\tau^n)}{(\tau^{n+1} - \tau^n)^\alpha} + \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \frac{u'(\xi)}{(\tau^{n+1} - \tau^n)^\alpha} d\xi \right],$$

де $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ — гамма-функція; n — індекс відповідного часового інтервалу $[\tau^n; \tau^{n+1}]$.

Подамо похідну $f'(\xi)$ на відрізку $[\tau^n; \tau^{n+1}]$ у вигляді скінченної різниці

$$\frac{df}{d\tau} \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta\tau} \quad (\Delta\tau = \tau^{n+1} - \tau^n).$$

Запишемо різницеву апроксимацію похідної дробового порядку α на відрізку $[\tau^n; \tau^{n+1}]$ таким чином

$$\left. \frac{\partial^\alpha f}{\partial \tau^\alpha} \right|_{\tau^n} = \frac{u^{n+1} - \alpha u^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha}.$$

Тоді, явна різницєва схема для системи диференціальних рівнянь (1) із дробовою похідною порядку α ($0 < \alpha < 1$) набуде вигляду

$$\begin{aligned} c\rho \frac{T_{ij}^{n+1} - \alpha T_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} &= \lambda_1 \frac{T_{i-1j}^n - 2T_{ij}^n + T_{i+1j}^n}{h_x^2} + \\ &+ \lambda_2 \frac{T_{ij-1}^n - 2T_{ij}^n + T_{ij+1}^n}{h_y^2} + \varepsilon\rho_0 r \frac{U_{ij}^{n+1} - \alpha U_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha}, \\ \frac{U_{ij}^{n+1} - \alpha U_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} &= a_1 \frac{U_{i-1j}^n - 2U_{ij}^n + U_{i+1j}^n}{h_x^2} + a_2 \frac{U_{ij-1}^n - 2U_{ij}^n + U_{ij+1}^n}{h_y^2} + \\ &+ a_1 \delta \frac{T_{i-1j}^n - 2T_{ij}^n + T_{i+1j}^n}{h_x^2} + a_2 \delta \frac{T_{ij-1}^n - 2T_{ij}^n + T_{ij+1}^n}{h_y^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

де $h_x = x_{i+1} - x_i$, $h_y = y_{i+1} - y_i$.

Неявна схема буде така

$$\begin{aligned} c\rho \frac{T_{ij}^{n+1} - \alpha T_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} &= \lambda_1 \frac{T_{i-1j}^{n+1} - 2T_{ij}^{n+1} + T_{i+1j}^{n+1}}{h_x^2} + \\ &+ \lambda_2 \frac{T_{ij-1}^{n+1} - 2T_{ij}^{n+1} + T_{ij+1}^{n+1}}{h_y^2} + \varepsilon\rho_0 r \frac{u_{ij}^{n+1} - \alpha u_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha}, \\ \frac{u_{ij}^{n+1} - \alpha u_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} &= a_1 \frac{u_{i-1j}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{i+1j}^{n+1}}{h_x^2} + a_2 \frac{u_{ij-1}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{ij+1}^{n+1}}{h_y^2} + \end{aligned}$$

$$+a_1\delta\frac{T_{i-1j}^{n+1}-2T_{ij}^{n+1}+T_{i+1j}^{n+1}}{h_x^2}+a_2\delta\frac{T_{ij-1}^{n+1}-2T_{ij}^{n+1}+T_{ij+1}^{n+1}}{h_y^2}. \quad (13)$$

Аналогічним чином формуються різницеві схеми для систем диференціальних рівнянь згідно граничних умов (3), (4). Для знаходження числового розв'язку задачі (1)-(4) використовувався метод предиктор-коректор. У ролі предиктора використовувався метод, заснований на явній різницевій схемі, а коректора — на неявній [10].

3. Отримані результати

Чисельний експеримент визначення розподілу вологості та температури у процесі сушіння деревини на основі наведеного алгоритму реалізації фізико-математичної моделі (1)-(4) наведемо для сосни з початковим значенням вологовмісту $u_0 = 0,4$ кг/кг, температури $T_0 = 20^{\circ}\text{C}$, температурою середовища $t_c = 70^{\circ}\text{C}$ та такими умовами процесу сушіння деревини: $\phi = 60\%$, $v = 2$ м/с (ϕ, v — відносна вологість і швидкість агента сушіння відповідно) [9, 10].

На рис. 3 наведено розподіл вологісних і температурних полів на взірці після першої години сушіння для порядку дробової похідної рівному $\alpha = 0,9$. За взірець береться брусок із такими розмірами $[l_1 \times l_2]$, де $l_1 = 2$ та $l_2 = 2$ — половини геометричних розмірів.

Проаналізувавши отримані результати та графічні залежності на рис. 3 можна зробити висновок, що вологовиділення стає інтенсивнішим у разі зростання температури взірця. Значення вологовмісту на границі взірця зменшується швидше, ніж у його центрі, а температури — на границі зростає швидше, ніж у центрі взірця. Ці результати також є зрозумілими на інтуїтивному рівні, адже якщо помістити взірець у сушильну камеру, то природним є те, що він зовні висохне та прогріється швидше, аніж всередині.

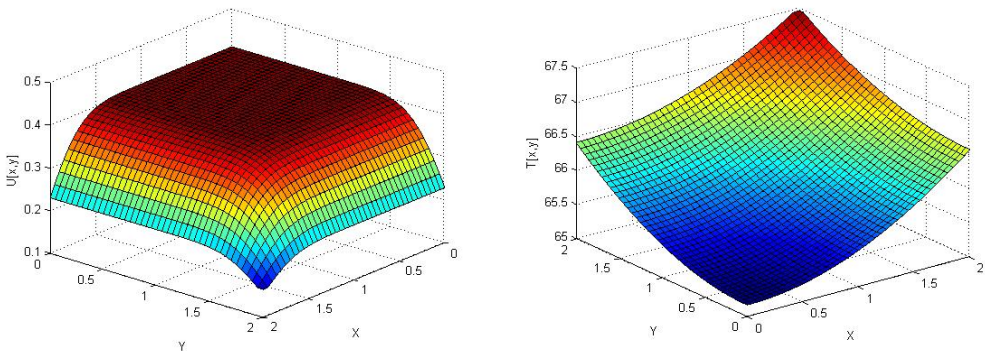


Рис. 3. Розподіл вологісних і температурних полів залежно від просторових координат відповідно

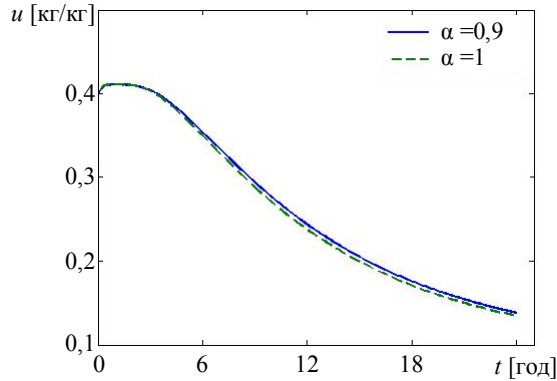


Рис. 4. Розподіл вологісних полів залежно від часу для різних значень показника дробової похідної

На рис. 4 наведено розподіл вологи у точці $A(0;0)$ залежно від часу для порядків дробової похідної рівних $\alpha = 1$ та $\alpha = 0,9$ відповідно за перші 24 години сушіння.

Із графічних залежностей на рис. 3, 4 випливає те, що у разі зменшення порядку дробової похідної спостерігається сповільнення процесу вологовиділення. Адже показник дробової похідної за часом відповідає частці каналів (гілок), відкритих для протікання, тому розглядаючи процес тепло- та масоперенесення для порядку дробової похідної рівному $\alpha = 0,9$ ми приймаємо, що тільки 90 % каналів у деревині відкриті для протікання процесу. Також можна зазначити, що це має більший вплив на розподіл температурно-вологісних полів у центрі взірця, ніж на його границі.

Висновки. Використання математичного апарату інтегро-диференціювання дробового порядку дозволяє створити нову основу для моделювання процесів тепло- та масоперенесення і напружено-деформівного стану у капілярно-пористих матеріалах фрактальної структури. Розроблені чисельні методи знаходження розв'язку крайових задач для рівнянь із похідною дробового порядку дають змогу отримати числові значення та графічні залежності, які відображають стан процесу в певний момент часу та дають змогу зробити висновки про швидкість протікання певного процесу.

Література

- [1] Бейбалаев В. Д. Математические модели неравновесных процессов в средах с фрактальной структурой: автореферат дис. кандидата физико-математических наук. — Махачкала, 2009. — 18 с.
- [2] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
- [3] Povstenko Y. Z. Stresses exerted by a source of diffusion in a case of a non-parabolic diffusion equation // International Journal of Engineering Science. — 2005. — Vol. 43. — P. 977-991.

- [4] Povstenko Y. Z. Two-dimensional axisymmetric stresses exerted by instantaneous pulses and sources of diffusion in an infinite space in a case of time-fractional diffusion equation // International Journal of Solids and Structures. — 2007. — Vol. 44. — P. 2324-2348.
- [5] Povstenko Y. Z. Fractional heat conduction equation and associated thermal stress // Journal of Thermal Stresses. — 2005. — Vol. 28. — P. 83-102.
- [6] Соколовський Я., Шиманський В. Фрактальна модель тепло- та масоперенесення у капілярно-пористих матеріалах // Вісник НУ «ЛП». — Львів: НУ «Львівська політехніка». — 2011. — № 694. — С. 424-428.
- [7] Лыков А. В. Теория сушки. — Москва: Энергия, 1968. — 472 с.
- [8] Шубин Г. С. Сушка и тепловая обработка древесины. — Москва: Лесн. пром-сть, 1990. — 336 с.
- [9] Соколовський Я. І., Бакалець А. В. Моделювання нелінійних тепломасообмінних процесів у висушуваній деревині методом скінченних елементів // Вісник НУ «ЛП». Комп'ютерні науки та інформаційні технології. — Львів: НУ «Львівська політехніка». — 2005. — Вип. 543. — С. 129-134.
- [10] Соколовський Я. І., Шиманський В. М. Двовимірна математична модель вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою // Науковий вісник НЛТУ України: зб. наук.-техн. праць. — Львів: НЛТУ України. — 2011. — Вип. 21.2. — С. 341-348.

Mathematical model of heat-mass and deformation-relaxation state in capillary-porous materials with fractal structure

Yaroslav Sokolowskyi, Volodymyr Shymanskyi

We have considered the mathematical model of the distribution of deformation-relaxation and heat-mass fields in capillary-porous materials with fractal structure. We used differential equations in partial derivatives of fractional order to describe it. The numerical solution of the problem for different values of the fractional derivative is obtained by difference method.

Математическая модель теплового переноса и напряженно-деформированного состояния в капиллярно-пористых материалах с фрактальной структурой

Ярослав Соколовский, Владимир Шыманский

Рассмотрена математическая модель распределения деформационно-релаксационных и теплообменных полей в капиллярно-пористых материалах с фрактальной структурой, для описания которой использовались дифференциальные уравнения в частных производных с дробным порядком. Разностным методом получено численное решение задачи для различных значений дробной производной.

Представлено професором Є. Чаплею

Отримано 15.11.12