УДК 517.958:532.72

Двоточкова функція кореляції та дисперсія випадкового дифузійного поля концентрації в смузі з рівномірним розподілом шаруватих включень

Юрій Білущак[1], Євген Чапля[2], Ольга Чернуха[3]

[1] Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: bil@cmm.lviv.ua
[2] д. ф.-м. н., професор, Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005; Інститут механіки середовища і прикладної інформатики Університету Казиміра Великого в Бидгощі, вул. Коперніка, 1, Бидгощ, 85-064, Польща, e-mail: chaplia@cmm.lviv.ua
[3] д. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: cher@cmm.lviv.ua

У роботі досліджено процеси дифузії домішкової речовини у двофазній випадково неоднорідній шаруватій смузі з урахуванням умов неідеального масового контакту на міжфазних границях. Контактна задача дифузії зведена до рівняння масоперенесення в усій області тіла. Сформульовано еквівалентне інтегро-диференціальне рівняння, розв'язок якого знайдено у вигляді інтегрального ряду Неймана. Усереднення отриманого розв'язку проведено за ансамблем конфігурацій фаз із рівномірною функцією розподілу. Визначений вплив характеристик матеріалу на поведінку та величину усередненого поля концентрації домішкових частинок. Визначено дисперсію поля концентрації частинок і двоточкову функцію кореляції (автокореляції) поля для процесу дифузії в шаруватій смузі з рівномірним розподілом фаз. Отримано формули для коефіцієнта кореляції поля концентрації.

Ключові слова: дифузія, випадково неоднорідна шарувата структура, дисперсія, функція кореляції, коефіцієнт кореляції, рівномірний розподіл.

Вступ. Створення композитів і композитних наноструктур із заданими властивостями відноситься до актуальних проблем сучасної фізики, хімії та математичного моделювання [1]. Наприклад, вуглецеві нанотрубки [2] завдяки своїм властивостям застосовуються в різних галузях сучасної електроніки, матеріалознавства, хімії, медицини тощо [3]. У мембранних технологіях все ширше використовуються композитні матеріали гетерогенної структури з відомими дифузійними характеристиками [4], такі як полімери з хімічно або радіаційно модифікованою поверхнею тощо [5, 6]. Зокрема, мембранні шаруваті структури застосовуються у полярографічних сенсорах, у мембранних хімічних реакторах, захисних покриттях цегляних будинків для гідроізоляції та вітрового захисту, в антикорозійних, радіопрозорих, антифрикційних покриттях на металах тощо.

Параметри таких складних структур можна розглядати як певні реалізації хаотичних полів у просторі та часі [7]. Введення випадковості у параметрах середовища породжує стохастичність самих фізичних полів. При цьому методи статистичного усереднення за ансамблем реалізацій випадкових параметрів згладжують якісні особливості типових реалізацій, і отримані статистичні характеристики можуть суттєво відрізнятися від окремих реалізацій. Проте повна статистика містить всю інформацію про динамічну систему. Але на практиці вдається знайти тільки перші статистичні характеристики, які пов’язані з одноточковими розподілами ймовірностей [7].

Математичний опис процесів перенесення у стохастичних структурах базується на відповідних задачах математичної фізики для конкретних фізичних систем. При цьому у випадку дослідження шаруватих структур часто невідомі їх геометричні параметри [8, 9], проте достатньо повно встановлені дифузійні властивості окремих елементів та умови контакту між ними. У зв’язку з цим виникає необхідність оцінити вплив просторових реалізацій структури середовища [10] та умов міжфазного контакту на процес дифузії.

У цій роботі розв’язується контактно-крайова задача дифузії у двофазній випадково неоднорідній багатошаровій смузі з рівномірним розподілом фаз. При цьому рівняння дифузії в контактуючих областях формулюються з використанням кінетичних коефіцієнтів дифузії, що під час зведення задачі до еквівалентного інтегро-диференціального рівняння призводить до врахування похідної за часом в його операторі. Також визначається дисперсія поля концентрації мігруючої речовини та двоточкова функція кореляції (автокореляції) поля.

1. Об’єкт дослідження. Постановка задачі

Нехай домішкові частинки одного хімічного сорту мігрують у шарі товщиною z_0, який складається з підшарів двох типів (фаз). При цьому розташування цих підшарів є невідомим. Одна з можливих реалізацій структури багатошарового тіла, в якому дифундує домішкова речовина, подана на рис. 1. Вважаємо, що дифузійні властивості фаз (області Ω_0 і Ω_1), з яких складене тіло, можуть суттєво відрізнятися. Приймаємо, що фази в тілі розташовані за рівномірним розподілом і об’ємна частка v_1 області Ω_1 є набагато меншою за об’ємну частку v_0 області Ω_0, тобто $v_1 \ll v_0$.

Процес міграції домішки в такому тілі описують рівняння дифузії, сформульовані для кожної фази зокрема. А саме

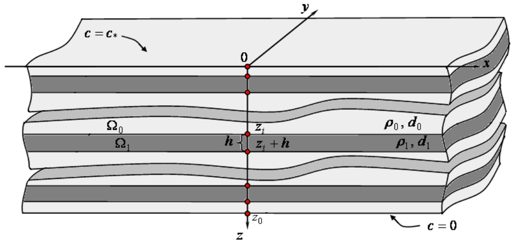

Рис. 1. Одна з можливих реалізацій шаруватої структури тіла

$$\rho_j \frac{\partial c_j(z,t)}{\partial t} = d_j \frac{\partial^2 c_j(z,t)}{\partial z^2}, \quad z \in \Omega_j = \bigcup_{i=1}^{n_j} \Omega_{ij}, \quad t \in [0, \tau] \; (\tau < \infty), \quad j = 0,1, \qquad (1)$$

де $c_j(z,t)$ — концентрація домішкових частинок у фазі *j*; ρ_j — густина, d_j — кінетичний коефіцієнт переносу в області Ω_j, яку займає фаза *j*; n_j — кількість підшарів фази *j*, Ω_{ij} — *i*-та однозв'язна область фази *j*, $i = \overline{1, n_j}$, $j = 0,1$; *z* — просторова координата, *t* — час.

Приймаємо нульові початкові умови, а також, що на границі тіла $z = 0$ підтримується постійне значення концентрації домішкової речовини c_*, а на нижній границі $z = z_0$ — вона дорівнює нулю, тобто

$$c_0(z,t)\big|_{t=0} = c_1(z,t)\big|_{t=0} = 0, \quad c_0(z,t)\big|_{z=0} = c^* \equiv const, \quad c_0(z,t)\big|_{z=z_0} = 0. \qquad (2)$$

На границях поділу областей $z = z_i$ і $z = z_l + h_{l1}$ виконуються умови неідеального контакту для функції концентрації у вигляді [11]

$$k_0 c_0(z,t)\big|_{z=z_i-0} = k_1 c_1(z,t)\big|_{z=z_i+0}, \quad \rho_0 d_0 \frac{\partial c_0}{\partial z}\bigg|_{z=z_l-0} = \rho_1 d_1 \frac{\partial c_1}{\partial z}\bigg|_{z=z_l+0}; \qquad (3)$$

$$k_1 c_1\big|_{z=z_l+h_{l1}-0} = k_0 c_0\big|_{z=z_l+h_{l1}+0}, \quad \rho_1 d_1 \frac{\partial c_1}{\partial z}\bigg|_{z=z_l+h_{l1}-0} = \rho_0 d_0 \frac{\partial c_0}{\partial z}\bigg|_{z=z_l+h_{l1}+0}, \qquad (4)$$

де k_j — коефіцієнт концентраційної залежності хімічного потенціалу у фазі *j* [12], z_l — випадкова координата «верхньої» межі розташування області Ω_{i1} (рис. 1), h_{l1} — товщина підшару Ω_{i1}.

Зазначимо, що за такої постановки задачі випадковими величинами є границі контакту $z = z_l$ і $z = z_l + h_{l1}$, тобто межі областей Ω_0 та Ω_1, які є внутрішніми для тіла. Це, своєю чергою, призводить до стохастичності поля концентрації домішкової речовини, яка мігрує в тілі.

2. Інтегро-диференціальне рівняння, еквівалентне вихідній задачі

Розв'язок сформульованої контактно-крайової задачі (1)-(4) шукаємо у вигляді інтегрального ряду Неймана [10, 13], оскільки таке подання випадкових полів є зручним для проведення процедури усереднення за ансамблем конфігурацій фаз. Для цього введемо у розгляд випадкову функцію просторової координати $c(z,t)$, яка описує концентрацію в усьому тілі:

$$c(z,t) = \begin{cases} c_j(z,t) - \text{розв'язок рівняння (1)}, \quad z \in \Omega_j, \; j = \overline{0,1}; \\ \text{контактні умови (3)}, \quad z = z_l; \quad l = \overline{1, n_l}; \\ \text{контактні умови (4)}, \quad z = z_l + h_{l1}; \; l = \overline{1, n_l}. \end{cases} \qquad (5)$$

Враховуючи формули диференціювання розривних функцій [14], означеність коефіцієнтів $\rho(z)$ і $d(z)$ у відкритих областях Ω_0 і Ω_1

$$\rho(z)=\sum_{i=1}^{n_1}\{\rho_0\}_{z\in\Omega_{i0}}+\sum_{i=1}^{n_1}\{\rho_1\}_{z\in\Omega_{i1}}, \quad d(z)=\sum_{i=1}^{n_1}\{d_0\}_{z\in\Omega_{i0}}+\sum_{i=1}^{n_1}\{d_1\}_{z\in\Omega_{i1}},$$

а також стрибок шуканої функції та її похідної на границях контакту $z=z_l$ і $z=z_l+h_{l1}$, отримуємо рівняння дифузії для тіла в цілому у вигляді

$$\rho(z)\frac{\partial c}{\partial t}=d(z)\left[\left\{\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right\}+\sum_{l=1}^{n_1}\left(\left[\frac{\partial c}{\partial z}\right]_{z=z_l}\delta(z-z_l)+\left[c(z,t)\right]_{z=z_l}\delta'(z-z_l)\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{l=1}^{n_1}\left(\left[\frac{\partial c}{\partial z}\right]_{z=z_l+h_{l1}}\delta\big(z-(z_l+h_{l1})\big)+\left[c(z,t)\right]_{z=z_l+h_{l1}}\delta'\big(z-(z_l+h_{l1})\big)\right)\right]. \tag{6}$$

Тут $\{\ldots\}_{z\in\Omega_{ij}}$ — області неперервності функції, $[\ldots]_{z=z_l}$ — стрибок функції І-го роду в точці $z=z_l$, $\delta(z)$ — дельта-функція Дірака, $\delta'(z)$ — її похідна.

Зауважимо, що функції $\rho(z)$ і $d(z)$ є випадковими функціями просторової координати з рівномірним розподілом.

Вводимо в розгляд випадкову функцію просторової координати («функцію структури») [13]

$$\eta_{ij}(z)=\begin{cases}1, & z\in\Omega_{ij};\\ 0, & z\notin\Omega_{ij},\end{cases} \qquad \sum_{j,i}\eta_{ij}(z)=1, \tag{7}$$

і коефіцієнти рівняння (6) подаємо через функцію (7)

$$\rho(z)=\sum_{j=0}^{1}\sum_{i=1}^{n_j}\rho_j\eta_{ij}(z), \quad d(z)=\sum_{j=0}^{1}\sum_{i=1}^{n_j}d_j\eta_{ij}(z), \tag{8}$$

таке подання (8) підставляємо в рівняння (6). Тоді з використанням умови суцільності тіла (7) маємо

$$\sum_{j=0}^{1}\sum_{i=1}^{n_j}\rho_j\eta_{ij}(z)\left\{\frac{\partial c)}{\partial t}\right\}=\sum_{j=0}^{1}\sum_{i=1}^{n_j}d_j\eta_{ij}(z)\left[\left\{\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right\}+\sum_{l=1}^{n_1}\left(\left[\frac{\partial c}{\partial z}\right]_{z=z_l}\delta(z-z_l)+[c(z,t)]_{z=z_l}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\delta'\big(z-z_l\big)\right)+\sum_{l=1}^{n_1}\left(\left[\frac{\partial c)}{\partial z}\right]_{z=z_l+h_{l1}}\delta\big(z-(z_l+h_{l1})\big)+[c(z,t)]_{z=z_l+h_{l1}}\delta'\big(z-(z_l+h_{l1})\big)\right)\right]. \tag{9}$$

Якщо позначити оператор рівняння (9) через $L(z,t)$, тобто

$$L(z,t) \equiv \sum_{j,i} \rho_j \eta_{ij}(z) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \right\} - \sum_{j,i} \left[d_j \eta_{ij}(z) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} + \sum_{l=1}^{n_1} \left(\left[\frac{\partial}{\partial z} \right]_{z=z_l} \delta\left(z - z_l\right) + [\ ]_{z=z_l} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \delta'\left(z - z_l\right)\right) + \sum_{l=1}^{n_1} \left(\left[\frac{\partial}{\partial z} \right]_{z=z_l+h_{l1}} \delta\left(z - \left(z_l + h_{l1}\right)\right) + [\ ]_{z=z_l+h_{l1}} \delta'\left(z - \left(z_l + h_{l1}\right)\right) \right) \right], \quad (10)$$

тоді рівняння (9) можна подати у вигляді

$$L(z,t)c(z,t) = 0. \quad (11)$$

У рівнянні (11) додамо та віднімемо детермінований оператор дифузії $L_0(z,t) = \rho_0\, \partial/\partial t - d_0\, \partial^2/\partial z^2$, коефіцієнти якого є характеристиками матеріалу фази Ω_0. Отже маємо

$$L_0(z,t)c(z,t) = L_s(z,t)c(z,t), \quad (12)$$

де $L_s(z,t) = L_0(z,t) - L(z,t)$.

Вважаємо праву частину рівняння (12) джерелом. Тоді розв’язок крайової задачі (12), (2) можна подати у вигляді

$$c(z,t) = c_0(z,t) + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z,z',t,t') L_s(z',t') c(z',t') dz'dt'. \quad (13)$$

Тут $c_0(z,t)$ — розв’язок однорідного рівняння з умовами (2), тобто [15]

$$c_0(z,t) = c_*\left(1 - z/z_0\right) - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} c_* \exp\left(-d_0 y_n^2 t / \rho_0\right) \sin(y_n z) \Big/ y_n, \quad (14)$$

де $y_n = n\pi/z_0$; $G\left(z,z',t,t'\right)$ — функція Гріна задачі (12), (2), а саме [16]

$$G\left(z,z',t,t'\right) = \frac{2\theta\left(t-t'\right)}{z_0\rho_0} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-d_0 y_n^2 \left(t-t'\right)/\rho_0\right) \sin\left(y_n z\right) \sin\left(y_n z'\right). \quad (15)$$

Тут $\theta\left(t-t'\right)$ — одинична сходинкова функція Гевісайда [11].

Таким чином ми побудували інтегро-диференціальне рівняння (13), еквівалентне вихідній контактно-крайовій задачі.

3. Ряд Неймана. Усереднення поля концентрації за ансамблем конфігурацій фаз

Розв’язок інтегро-диференціального рівняння (13) шукаємо у вигляді ряду Неймана [13] ітеруванням співвідношення (13). У результаті отримаємо подання випадкового поля концентрації у вигляді ряду Неймана [17]

$$c(z,t) = c_0(z,t) + \int_0^t \int_0^{z_0} G\left(z,z',t,t'\right) L_s\left(z',t'\right) c_0\left(z',t'\right) dz'dt' + \ldots +$$

$$+\int_0^t\int_0^{z_0} G\left(z,z',t,t'\right)L_s\left(z',t'\right)\int_0^{t'}\int_0^{z_0} G\left(z',z'',t',t''\right)L_s\left(z'',t''\right)\times\ldots\times$$
$$\times\int_0^{t^{(n-2)}}\int_0^{z_0} G\left(z^{(n-2)},z^{(n-1)},t^{(n-2)},t^{(n-1)}\right)L_s\left(z^{(n-1)},t^{(n-1)}\right)\times$$
$$\times c_0\left(z^{(n-1)},t^{(n-1)}\right)dz^{(n-1)}dt^{(n-1)}\ldots dz'dt'+\ldots. \qquad (16)$$

Зазначимо, якщо густини ρ_0, ρ_1 і коефіцієнти дифузії d_0, d_1 є обмежені та $\rho_0 \neq 0$, $d_0 \neq 0$, то ряд (16) є абсолютно та рівномірно збіжний [17].

Для знаходження середнього поля концентрації домішкової речовини обмежимося першими двома членами ряду (16)

$$c(z,t)\approx c_0(z,t)+\int_0^t\int_0^{z_0} G\left(z,z',t,t'\right)\sum_{i=1}^{n_1}\left[\left(\rho_0-\rho_1\right)\frac{\partial c_0\left(z',t'\right)}{\partial t'}-\right.$$
$$\left.-\left(d_0-d_1\right)\frac{\partial^2 c_0\left(z',t'\right)}{\partial z'^2}\right]\eta_{i1}\left(z'\right)dz'dt'. \qquad (17)$$

Врахуємо, що $c_0(z,t)$ є невипадковою функцією, в підінтегральному виразі співвідношення (17) від випадкових величин (координат границь контакту z_i, $i=\overline{1,n_1}$) залежить тільки функція $\eta_{i1}\left(z'\right)$, що немає інших членів з індексом i, а також властивості функції $\eta_{i1}\left(z'\right)$, тоді одержимо формулу для усередненого за ансамблем конфігурацій фаз поля концентрації частинок, що мігрують у двофазній шаруватій смузі за рівномірного розподілу фаз [17].

$$\left\langle c(z,t)\right\rangle_{conf}=c_0(z,t)+\int_0^t\left[\int_0^h G\left[\left(\rho_0-\rho_1\right)\frac{\partial c_0\left(z',t'\right)}{\partial t'}-\left(d_0-d_1\right)\frac{\partial^2 c_0\left(z',t'\right)}{\partial z'^2}\right]\frac{v_1 z'}{h}dz'+\right.$$
$$\left.+\int_h^{z_0-h} G\left[\left(\rho_0-\rho_1\right)\frac{\partial c_0\left(z',t'\right)}{\partial t'}-\left(d_0-d_1\right)\frac{\partial^2 c_0\left(z',t'\right)}{\partial z'^2}\right]v_1 dz'\right]dt'. \qquad (18)$$

Підставляючи у співвідношення (18) вирази для концентрації домішки в однорідному шарі (14) і функції Гріна (15), отримаємо розрахункову формулу для усередненого поля концентрації

$$\frac{\left\langle c(z,t)\right\rangle}{c_*}\approx 1-\frac{z}{z_0}-\frac{2}{z_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{y_n}e^{-d_0 y_n^2 t/\rho_0}\sin\left(y_n z\right)+\frac{4v_1}{z_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(y_n z\right)\times\right.$$
$$\left.\times e^{-\frac{d_0 y_n^2 t}{\rho_0}}\left[\frac{d_0 R_n t}{8\rho_0 y_n}\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)+\sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty}\frac{A_{mn}y_m}{y_n^2-y_m^2}\left(\frac{d_1}{d_0}-\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)\left(e^{-\frac{d_0 y_m^2 t}{\rho_0}}-e^{-\frac{d_0 y_n^2 t}{\rho_0}}\right)\right]\right], \qquad (19)$$

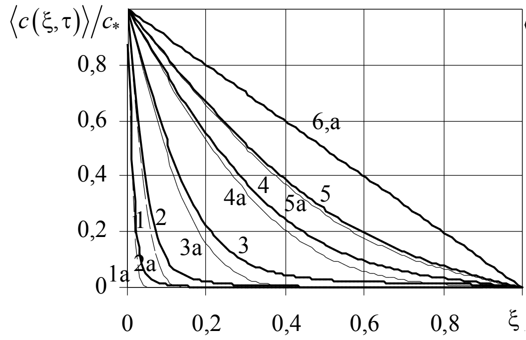

Рис. 2. Характерні розподіли усередненої концентрації в різні моменти часу

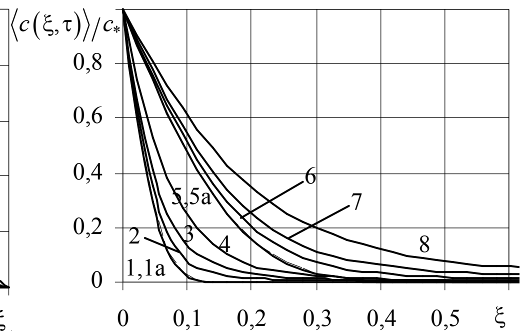

Рис. 3. Залежність усередненого поля концентрації від різних значень кінетичних коефіцієнтів переносу

де

$$R_n = 1 - 4h + 2h^2 y_n^2 + 2\left(1 - 4hy_n\right)\sin\left(2y_n h\right) - \cos\left(2y_n h\right);$$

$$A_{mn} = 2\sin\left(hy_n\right)\sin\left(hy_m\right)/h + \sin\left(h\left(y_n - y_m\right)\right)\left[2\left(y_n - y_m\right)^2 - 1\right]\Big/\left(y_n - y_m\right) +$$

$$+\sin\left(h\left(y_n + y_m\right)\right)\left[1 - 2\left(y_n + y_m\right)^2\right]\Big/\left(y_n + y_m\right), \quad y_m = m\pi/z_0 .$$

Зазначимо, що неоднорідна частина розв’язку (19) прямо пропорційна об’ємній частці включень v_1.

Характерні розподіли усередненої концентрації подані на рис. 2 і 3. Числові розрахунки проводились у безрозмірних змінних [15] $\tau = d_0 t/z_0$, $\xi = z/z_0$. При цьому за базові приймалися такі значення коефіцієнтів: $d_1/d_0 = 0{,}01$; $\rho_1/\rho_0 = 1{,}3$; $v_1 = 0{,}2$; $\overline{h} = h/z_0 = 0{,}0001$. На рис. 2 наведені розподіли усередненої концентрації в різні моменти безрозмірного часу $\tau = 0{,}0001$; 0,001; 0,01; 0,05; 0,1; 0,6 (криві 1-6) для $d_1/d_0 = 25$. Рис. 3 ілюструє поведінку усередненого поля концентрації залежно від різних значень відношення кінетичних коефіцієнтів переносу у включеннях і матриці: $d_1/d_0 = 0{,}01$; 25; 50; 100 (криві 1-4) для $\tau = 0{,}001$ і $d_1/d_0 = 0{,}01$; 25; 50; 100 (криві 5-8) для $\tau = 0{,}01$.

Зазначимо, що наявність в тілі випадково розташованих прошарків з відмінними від матриці характеристиками впливає на поведінку поля концентрації домішкових частинок, якщо його кінетичний коефіцієнт дифузії є більшим, ніж у матриці (рис. 2). При цьому значення усередненої концентрації в багатошаровій смузі є більшою, ніж в однорідному шарі. У протилежному випадку, якщо $d_1 < d_0$, різниця між значенями концентрації домішкової речовини в однорідному та неоднорідному тілі є незначна, відміність спостерігається у третій значимій цифрі. Також відзначимо, що чим більшим є відношення кінетичних коефіцієнтів дифузії d_1/d_0, тим більшою є концентрація домішкових частинок в шарі (рис. 3). Зі зменшенням товщини випадкових прошарків усереднена концентрація домішки наближається до концентрації цієї ж речовини в однорідному шарі.

4. Дисперсія випадкового поля концентрації та двоточкова функція кореляції

За означенням [18] дисперсією випадкової величини називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання, тобто середнього значення. Дисперсія є центральним моментом другого порядку і є мірою відхилення значень випадкової величини від центру розподілу.

Для поля концентрації мігруючої речовини дисперсія поля σ_c^2 за означенням дорівнює

$$\sigma_c^2(z,t)=\left\langle c^2(z,t)\right\rangle-\left\langle c(z,t)\right\rangle^2 .$$

Для середнього від добутку полів концентрації справедливе співвідношення [19]

$$\left\langle c\left(z_1,t_1\right)c\left(z_2,t_2\right)\right\rangle=\left\langle c\left(z_1,t_1\right)\right\rangle\left\langle c\left(z_2,t_2\right)\right\rangle+\psi_c\left(z_1,t_1,z_2,t_2\right),$$

де $\psi_c\left(z_1,t_1,z_2,t_2\right)$ — функція кореляції (автокореляції) поля концентрації $c(z,t)$ в точках $\left(z_1,t_1\right)$ і $\left(z_2,t_2\right)$ [13]. Звідси можемо визначити функцію кореляції поля $\psi_c(z,t,z,t)$ в точці (z,t)

$$\psi_c(z,t,z,t)=\left\langle c^2(z,t)\right\rangle-\left\langle c(z,t)\right\rangle\left\langle c(z,t)\right\rangle . \tag{20}$$

Тоді середнє від квадрату поля можемо записати як суму добутків середніх і відповідної функції кореляції

$$\left\langle c^2(z,t)\right\rangle=\left\langle c(z,t)c(z,t)\right\rangle=\left\langle c(z,t)\right\rangle\left\langle c(z,t)\right\rangle+\psi_c(z,t,z,t) .$$

Якщо ми визначимо функцію кореляції поля концентрації $\psi_c(z,t,z,t)$ в точці (z,t), тоді знайдемо і дисперсію поля в тілі.

Підставимо у формулу (20) вираз для поля $c(z,t)$ у вигляді ряду Неймана (16) і обмежимося першими чотирма членами розкладу, тобто враховуємо не більше, ніж парний взаємовплив підшарів, з яких складене тіло

$$\begin{aligned}\left\langle c^2(z,t)\right\rangle &\approx c_0^2(z,t)+2c_0(z,t)\left\langle\int_0^t\int_0^{z_0}G\left(z,z',t,t'\right)L_s\left(z',t'\right)c_0\left(z',t'\right)dz'dt'\right\rangle+\\&+2c_0(z,t)\left\langle\int_0^t\int_0^{z_0}G\left(z,z',t,t'\right)L_s\left(z',t'\right)\int_0^{t'}\int_0^{z_0}G\left(z',z'',t',t''\right)L_s\left(z'',t''\right)c_0\left(z'',t''\right)dz''dt''dz'dt'\right\rangle+\\&+\left\langle\int_0^t\int_0^{z_0}G\left(z,z',t,t'\right)L_s\left(z',t'\right)c_0\left(z',t'\right)dz'dt'\int_0^{t'}\int_0^{z_0}G\left(z,z',t,t'\right)L_s\left(z',t'\right)c_0\left(z',t'\right)dz'dt'\right\rangle .\end{aligned}$$

Також з урахуванням подання поля концентрації у вигляді ряду Неймана запишемо формулу для квадрата від середнього поля концентрації домішки, а саме

$$\langle c(z,t)\rangle^2 = \Bigg\langle c_0(z,t) + \int_0^t\int_0^{z_0} G(z,z',t,t')L_s(z',t')c_0(z',t')dz'dt' +$$

$$+\int_0^t\int_0^{z_0} G(z,z',t,t')L_s(z',t')\int_0^{t'}\int_0^{z_0} G(z',z'',t',t'')L_s(z'',t'')c_0(z'',t'')dz''dt''dz'dt' + \ldots\Bigg\rangle \times$$

$$\times\Bigg\langle c_0(z,t) + \int_0^t\int_0^{z_0} G(z,z',t,t')L_s(z',t')c_0(z',t')dz'dt' +$$

$$+\int_0^t\int_0^{z_0} G(z,z',t,t')L_s(z',t')\int_0^{t'}\int_0^{z_0} G(z',z'',t',t'')L_s(z'',t'')c_0(z'',t'')dz''dt''dz'dt' + \ldots\Bigg\rangle. \quad (21)$$

Перемножимо два усереднені ряди, що входять у співвідношення (21), і також враховуємо тільки парний взаємовплив підшарів, тоді отримаємо

$$\langle c(z,t)\rangle^2 \approx c_0^2(z,t) + 2c_0(z,t)\left\langle \int_0^t\int_0^{z_0} G(z,z',t,t')L_s(z',t')c_0(z',t')dz'dt' \right\rangle +$$

$$+2c_0(z,t)\left\langle \int_0^t\int_0^{z_0} G(z,z',t,t')L_s(z',t')\int_0^{t'}\int_0^{z_0} G(z',z'',t',t'')L_s(z'',t'')c_0(z'',t'')dz''dt''dz'dt' \right\rangle +$$

$$+\left\langle \int_0^t\int_0^{z_0} G(z,z',t,t')L_s(z',t')c_0(z',t')dz'dt' \right\rangle\left\langle \int_0^t\int_0^{z_0} G(z,z',t,t')L_s(z',t')c_0(z',t')dz'dt' \right\rangle.$$

Подамо одноточкову функцію кореляції поля концентрації $\psi_c(z, t, z, t)$ з урахуванням подання $c(z, t)$ у вигляді ряду Неймана. В результаті отримаємо

$$\psi_c(z,t,z,t) = \left\langle \left(\int_0^t\int_0^{z_0} G(z,z',t,t')L_s(z',t')c_0(z',t')dz'dt' \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int_0^t\int_0^{z_0} G(z,z',t,t')L_s(z',t')c_0(z',t')dz'dt' \right) \right\rangle -$$

$$-\left\langle \int_0^t\int_0^{z_0} G(z,z',t,t')L_s(z',t')c_0(z',t')dz'dt' \right\rangle \times$$

$$\times\left\langle \int_0^t\int_0^{z_0} G(z,z',t,t')L_s(z',t')c_0(z',t')dz'dt' \right\rangle. \quad (22)$$

Врахуємо неперервність функції $c_0(z, t)$. Тоді дію на неї оператора $L_s(z, t)$ можна подати у вигляді

$$L_s(z,t)c_0(z,t) = \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(z)\overline{L}_s(z,t)c_0(z,t), \quad (23)$$

де $\overline{L}_s(z,t)c_0(z,t) = (\rho_0 - \rho_1)\dfrac{\partial c_0(z,t)}{\partial t} - (d_0 - d_1)\dfrac{\partial^2 c_0(z,t)}{\partial z^2}$. Відповідно, співвідношення (22) можемо переписати у вигляді

$$\psi_c(z,t,z,t) = \left\langle \left(\int_0^t \int_0^{z_0} G(z,z',t,t') \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(z') \overline{L}_s(z',t') c_0(z',t') dz'dt' \right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\int_0^t \int_0^{z_0} G(z,z',t,t') \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(z') \overline{L}_s(z',t') c_0(z',t') dz'dt' \right) \right\rangle -$$
$$- \left\langle \int_0^t \int_0^{z_0} G(z,z',t,t') \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(z') \overline{L}_s(z',t') c_0(z',t') dz'dt' \right\rangle \times$$
$$\times \left\langle \int_0^t \int_0^{z_0} G(z,z',t,t') \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(z') \overline{L}_s(z',t') c_0(z',t') dz'dt' \right\rangle . \tag{24}$$

Врахуємо, що функція Гріна $G(z,z',t,t')$, оператор $\overline{L}_s(z,t)$ і поле концентрації домішки в однорідному тілі $c_0(z, t)$ є детермінованими, а отже є детермінованим вираз $\overline{L}_s(z,t)c_0(z,t)$; що усереднення проводимо за ансамблем конфігурацій фаз, тобто випадковою величиною є координата «верхньої» межі включень z_{i1}; що під інтегралами у формулі (24) немає інших членів з індексом i, а також, що добуток двох двократних інтегралів можна подати у вигляді одного чотирикратного інтеграла. Тоді співвідношення (24) можна подати так

$$\psi_c(z,t,z,t) = \int_0^t \int_0^{z_0} \int_0^t \int_0^{z_0} G(z,z',t,t') G(z,\overline{z}',t,\overline{t}') \overline{L}_s(z',t') c_0(z',t') \times$$
$$\times \left\langle \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(z') \sum_{k=1}^{n_1} \eta_{k1}(\overline{z}') \right\rangle d\overline{z}'d\overline{t}'dz'dt' - \left(\int_0^t \int_0^{z_0} G(z,z',t,t') \overline{L}_s(z',t') c_0(z',t') \times \right.$$
$$\left. \times \left\langle \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(z') \right\rangle dz'dt' \right) \left(\int_0^t \int_0^{z_0} G(z,\overline{z}',t,\overline{t}') \overline{L}_s(\overline{z}',\overline{t}') c_0(\overline{z}',\overline{t}') \left\langle \sum_{k=1}^{n_1} \eta_{k1}(\overline{z}') \right\rangle dz'dt' \right) =$$
$$= \int_0^t \int_0^{z_0} \int_0^t \int_0^{z_0} G(z,z',t,t') G(z,\overline{z}',t,\overline{t}') \overline{L}_s(z',t') c_0(z',t') \overline{L}_s(\overline{z}',\overline{t}') c_0(\overline{z}',\overline{t}') \times$$
$$\times \left\langle \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(z') \sum_{k=1}^{n_1} \eta_{k1}(\overline{z}') \right\rangle d\overline{z}'d\overline{t}'dz'dt' - \int_0^t \int_0^{z_0} \int_0^t \int_0^{z_0} G(z,z',t,t') G(z,\overline{z}',t,\overline{t}') \times$$
$$\times \overline{L}_s(z',t') c_0(z',t') \overline{L}_s(\overline{z}',\overline{t}') c_0(\overline{z}',\overline{t}') \left\langle \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(z') \right\rangle \left\langle \sum_{k=1}^{n_1} \eta_{k1}(\overline{z}') \right\rangle d\overline{z}'d\overline{t}'dz'dt' .$$

Оскільки

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(z') \sum_{k=1}^{n_1} \eta_{k1}(\overline{z}') \right\rangle = \sum_{i,k=1}^{n_1} \left\langle \eta_{i1}(z') \eta_{k1}(\overline{z}') \right\rangle =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n_1} \left(\left\langle \eta_{i1}(z') \right\rangle \left\langle \eta_{k1}(\overline{z}') \right\rangle + \psi_{\eta}(z', \overline{z}') \right), \tag{25}$$

де $\psi_{\eta}(z', \overline{z}')$ — функція кореляції фаз, то

$$\psi_c(z,t,z,t) = \int_0^t \int_0^{z_0} \int_0^t \int_0^{z_0} G(z,z',t,t') G(z,\overline{z}',t,\overline{t}') \overline{L}_s(z',t') c_0(z',t') \times$$

$$\times \overline{L}_s(\overline{z}', \overline{t}') c_0(\overline{z}', \overline{t}') \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_1} \psi_{\eta}(z', \overline{z}') d\overline{z}' d\overline{t}' dz' dt' .$$

І остаточно одержимо

$$\psi_c(z,t,z,t) = \int_0^t \int_0^{z_0} \int_0^t \int_0^{z_0} G(z,z',t,t') G(z,\overline{z}',t,\overline{t}') \overline{L}_s(z',t') c_0(z',t') \times$$

$$\times \overline{L}_s(\overline{z}', \overline{t}') c_0(\overline{z}', \overline{t}') n_1^2 \psi_{\eta}(z', \overline{z}') d\overline{z}' d\overline{t}' dz' dt' . \tag{26}$$

Таким чином ми отримали вираз (26) для функції кореляції поля концентрації домішкової речовини в двофазному багатошаровому шарі в точці (z,t), який поданий через функцію кореляції фаз.

Аналогічним чином можемо знайти функцію кореляції (автокореляції) поля концентрації домішкової речовини у шаруватій смузі у двох точках тіла (z_1,t_1) і (z_2,t_2)

$$\left\langle c(z_1,t_1) c(z_2,t_2) \right\rangle = \left\langle c(z_1,t_1) \right\rangle \left\langle c(z_2,t_2) \right\rangle + \psi_c(z_1,t_1,z_2,t_2).$$

Звідси

$$\psi_c(z_1,t_1,z_2,t_2) = \left\langle c(z_1,t_1) c(z_2,t_2) \right\rangle - \left\langle c(z_1,t_1) \right\rangle \left\langle c(z_2,t_2) \right\rangle . \tag{27}$$

Якщо у співвідношенні (27) поле концентрації в точках (z_1,t_1) і (z_2,t_2) подамо у вигляді ряду Неймана, обмежимось врахуванням парного взаємовпливу фаз, використаємо вираз (23) і (25), тоді отримаємо функцію кореляції поля концентрації в точках (z_1,t_1) і (z_2,t_2) для процесу дифузії домішкової речовини у двофазному випадково неоднорідному шаруватій смузі

$$\psi_c(z_1,t_1,z_2,t_2) = \int_0^t \int_0^{z_0} \int_0^{t_1} \int_0^{z_0} G(z_1,z_1',t_1,t_1') G(z_2,z_2',t_2,t_2') \overline{L}_s(z_1',t_1') c_0(z_1',t_1') \times$$

$$\times \overline{L}_s(z_2',t_2') c_0(z_2',t_2') n_1^2 \psi_{\eta}(z_1',z_2') dz_2' dt_2' dz_1' dt_1' . \tag{28}$$

Таким чином отримано формулу для двоточкової функції кореляції поля концентрації частинок для двофазної шаруватої смуги у вигляді чотирикратного інтеграла, підінтегральна функція якого як множник містить функцію кореляції фаз і пропорційна квадрату кількості включень.

5. Розрахункові формули для дисперсії поля концентрації у смузі з рівномірним розподілом включень та двоточкової функції кореляції

Ми прийняли, що включення в шарі розташовані за рівномірним розподілом (рис. 1). Функцію кореляції фаз для рівномірного розподілу знаходимо за формулою [20]

$$\psi_\eta\left(z_i, z_j\right) = \iint\limits_{(V)^2} z_i z_j w_2\left(z_i, z_j\right) dz_i dz_j \ , \tag{29}$$

де $w_2\left(z_i, z_j\right)$ — двовимірний спільний розподіл випадкових величин z_i та z_j [19].

Зазначимо, що функцією $w_2\left(z_i, z_j\right)$ можна подати у вигляді [20].

$$w_2\left(z_i, z_j\right) = w_1\left(z_i\right) v\left(z_j \middle| z_i\right),$$

де $w_1\left(z_i\right)$ — густина функції розподілу величини z_i, $v\left(z_j \middle| z_i\right) dz_j$ — умовна ймовірність, тобто ймовірність того, що величина z_j попадає в інтервал $\left(z_j, z_j + dz_j\right)$ за умови, що величина z_i попадає в інтервал $\left(z_i,\, z_i + dz_i\right)$, $v\left(z_j \middle| z_i\right)$ — густина умовної ймовірності [20].

Якщо відома густина умовної ймовірності, то функцію кореляції фаз (29) можна подати у вигляді

$$\psi_\eta\left(z_i, z_j\right) = \int\limits_{(V)} z_i w_1\left(z_i\right) \int\limits_{(V)} z_j v\left(z_j \middle| z_i\right) dz_j dz_i \ . \tag{30}$$

Внутрішній інтеграл є умовним середнім від z_j. Позначивши його $\bar{z}_j\left(z_j \middle| z_i\right)$, можна записати

$$\psi_\eta\left(z_i, z_j\right) = \int\limits_{(V)} z_i \bar{z}_j\left(z_j \middle| z_i\right) dz_i \ .$$

У випадку рівномірного розподілу фаз в шаруватій смузі знайдемо функцію кореляції фаз за формулою (29). Враховуючи, що випадковими величинами є верхні межі підшарів, з яких складене тіло, тобто $z_i,\, z_j \in (0;\, z_0 - h)$, маємо

$$\psi_\eta(z_i, z_j) = \int\limits_0^{z_0 - h} \int\limits_0^{z_0 - h} z_i z_j w_2(z_i, z_j) dz_i dz_j \ ,$$

де $w_2\left(z_i, z_j\right)$ — густина двовимірного рівномірного розподілу, яка в загальному випадку має вигляд [19]

$$w_2\left(z_i, z_j\right) = \begin{cases} 1/\operatorname{mes} S, & \left(z_i, z_j\right) \in S; \\ 0, & \left(z_i, z_j\right) \notin S. \end{cases} \tag{31}$$

Тут S — обмежена борелівська множина в R^2, $\operatorname{mes} S$ — двовимірна міра Лебега множини S.

У нашому випадку функція (31) зводиться до вигляду

$$w_2\left(z_i, z_j\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{V^2} = z_0^{-2}, & \left(z_i, z_j\right) \in (V)^2 = [0,\, z_0] \times [0,\, z_0]; \\ 0, & \left(z_i, z_j\right) \notin (V)^2 = [0,\, z_0] \times [0,\, z_0]. \end{cases}$$

Тоді функція кореляції фаз для рівномірно розподілу має вигляд

$$\psi_\eta\left(z_i, z_j\right) = \int_0^{z_0-h}\int_0^{z_0-h} z_i z_j \frac{1}{V^2} dz_i dz_j = \frac{\left(z_0 - h\right)^4}{4V^2}. \tag{32}$$

Зазначимо, що об’єм тіла є обмеженим: $V < \infty$, що у випадку смуги це обмеження зводиться до обмеження на її товщину.

Підставляючи функцію кореляції фаз (32) у співвідношення (26), отримаємо формулу для дисперсії поля концентрації домішки в смузі з рівномірним розподілом включень

$$\sigma_c^2(z,t) = \frac{\left(z_0 - h\right)^4 v_1^2}{4h^2}\left[\int_0^t\int_0^{z_0} G(z,z',t,t')\overline{L}_s(z',t')c_0(z',t')dz'dt'\right]^2. \tag{33}$$

Врахуємо у формулі (33) вираз для функції Гріна (15), дію оператора $\overline{L}_s\left(z', t'\right)$ на функцію концентрації домішки в однорідному шарі (14), тоді отримаємо розрахункову формулу для дисперсії поля концентрації домішки у смузі з рівномірним розподілом включень

$$\sigma_c^2(z,t) = \left(\frac{\left(z_0 - h\right)^2 A v_1}{2h}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(y_n z\right)e^{-\tilde{d}y_n^2 t} z_0 t\right)^2, \tag{34}$$

де $A = \dfrac{2c_*}{z_0^2\rho_0}\left[\left(\rho_0 - \rho_1\right)\tilde{d} - \left(d_0 - d_1\right)\right]$; $\tilde{d} = d_0/\rho_0$.

Якщо підставимо функцію кореляції фаз (32) у співвідношення (28), тоді отримаємо формулу для двоточкової функції кореляції поля концентрації частинок у смузі з рівномірним розподілом включень

$$\psi_c\left(z_1,t_1,z_2,t_2\right)=\frac{\left(z_0-h\right)^4 v_1^2}{4h^2}\int_0^{t_1}\int_0^{z_0}\int_0^{t_2}\int_0^{z_0} G\left(z_1,z_1',t_1,t_1'\right)G\left(z_2,z_2',t_2,t_2'\right)\times$$
$$\times\overline{L}_s\left(z_1',t_1'\right)c_0\left(z_1',t_1'\right)\overline{L}_s\left(z_2',t_2'\right)c_0\left(z_2',t_2'\right)dz_2'dt_2'dz_1'dt_1' . \qquad (35)$$

Врахувавши у формулі (35) вираз для функції Гріна (15), дію оператора $\overline{L}_s\left(z',t'\right)$ на функцію концентрації домішки в однорідному шарі (14), отримаємо розрахункову формулу для кореляції (автокореляції) поля концентрації домішки в смузі з рівномірним розподілом включень

$$\psi_c\left(z_1,t_1,z_2,t_2\right)=\left[\frac{\left(z_0-h\right)^2 Av_1}{2h}\right]^2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(y_n z_1\right)e^{-\tilde{d}y_n^2 t_1} z_0 t_1\right]\times$$
$$\times\sum_{u=1}^{\infty}\left[\sin\left(y_u z_2\right)e^{-\tilde{d}y_u^2 t_2} z_0 t_2\right]. \qquad (36)$$

Тут y_u є виразом для y_n, в якому n міняється на u.

Коефіцієнт кореляції поля концентрації K_c визначається так [13]

$$K_c=\psi_c\left(z_1,t_1,z_2,t_2\right)\big/\sigma_c^2\left(z,t\right).$$

Тоді з урахуванням співвідношень (34) і (36) отримаємо два випадки для коефіцієнта кореляції залежно від точки (z,t), для якої знайдена дисперсія поля $c(z,t)$

1. $\sigma_c^2=\sigma_c^2\left(z_1,t_1\right)$

$$K_c^{(1)}=\frac{\sum_{u=1}^{\infty}\left[\sin\left(y_u z_2\right)e^{-\tilde{d}y_u^2 t_2} z_0 t_2\right]}{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(y_n z_1\right)e^{-\tilde{d}y_n^2 t_1} z_0 t_1\right]},$$

2. $\sigma_c^2=\sigma_c^2\left(z_2,t_2\right)$

$$K_c^{(2)}=\frac{\sum_{u=1}^{\infty}\left[\sin\left(y_u z_1\right)e^{-\tilde{d}y_u^2 t_1} z_0 t_1\right]}{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(y_n z_2\right)e^{-\tilde{d}y_n^2 t_2} z_0 t_2\right]}.$$

При цьому коефіцієнти кореляції $K_c^{(1)}$ і $K_c^{(2)}$ є обернено пропорційні, тобто $K_c^{(1)}=1\big/K_c^{(2)}$.

Зазначимо, що формули для дисперсії (33) та двоточкової функції кореляції поля концентрації (35), як і співвідношення для усереднених полів концентрації (17), є справедливими для довільних крайових умов.

Висновки. Таким чином із використанням апарату теорії узагальнених функцій контактну задачу дифузії домішкової речовини в двофазній випадково неоднорідній шаруватій смузі зведено до рівнняння масопереносу частинок у всьому тілі. Побудоване інтегро-диференціальне рівняння розв'язано шляхом ітерування. Розв'язок отримано у вигляді ряду Неймана. Зауважимо, що під час спрямування часової змінної до безмежності ряд Неймана стає розбіжним, і тому стаціонарний випадок потребує окремого розгляду. Усереднення поля концентрації проведено за ансамблем конфігурацій фаз із рівномірною функцією розподілу включень. Одержано в загальному випадку формулу для визначення усередненого поля концентрації в такому тілі та наведено розрахункові формули. Отримано формулу для двоточкової функції кореляції поля концентрації частинок для двофазній шаруватій смузі. Знайдено співвідношення для дисперсії поля концентрації мігруючих частинок і відповідні коефіцієнти кореляції у випадку рівномірного розподілу шаруватих включень у двофазній смузі.

Література

[1] *Белоненко М. Б.*, *Лебедев Н. Г.*, *Судоргин С. А.* Коэффициенты диффузии и проводимости полупроводниковых углеродных нанотрубок во внешнем электрическом поле // Физика твердого тела. — 2011. — Т. 53, вып. 9. — С. 1841-1844.

[2] *Харрис П.* Углеродные нанотрубы и родственные структуры. Новые материалы XXI века. — Москва: Техносфера, 2003. — 336 с.

[3] *Дьячков П. Н.* Углеродные нанотрубки: строение, свойства, применения. — Москва: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2006. — 293 с.

[4] *Бекман И. Н.*, *Романовский И. П.* Феноменологическая теория диффузии в гетерогенных средах и ее применение для описания процессов мембранного разделения // Успехи химии. — 1988. — Т. LVII(57), № 6. — С. 944-957.

[5] Модификация полимерных материалов / *А. Э. Крейтус*, *А. Е. Чалых*, *Э. Ф. Вятере*, *А. Ю. Вархалис*. — Рига: Изд-во РПИ, 1978. — 35 с.

[6] *Beckman I. N., Bessarabov D.G., Teplyakov V. V.* The selective membrane valve for ternary gas mixtures separation: Model of mass transfer and experimental test // Industrial and engineering chemistry research. — 1993. — Vol. 32, No 9. — P. 2017-2022.

[7] *Кляцкин В. И.* Статистика и реальность в стохастических динамических системах; Нелинейные волны 2004. — Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2005. — С. 256-286.

[8] *Keller J.B.* Flow in random porous media // Transport in Porous Media. — 2001. — Vol. 43. — P. 395-406.

[9] *Zhu Y., Fox P.J.* Smoothed particle hydrodynamics model for diffusion through porous media // Transport in Porous Media. — 2001. — Vol. 43. — P. 441-471.

[10] *Краснов М. Л.* Интегральные уравнения. — Москва: Наука, 1975. — 300 с.

[11] *Чапля Є. Я.*, *Чернуха О. Ю.* Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах. — Київ: Наукова думка, 2009. — 302 с.

[12] *Мюнстер А.* Химическая термодинамика. — Москва: Мир, 1971. — 295 с.

[13] *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. — Москва: Наука, 1978. — 436 с.

[14] *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — Москва: Наука, 1976. — 527 с.

[15] *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. — Москва: Высшая школа, 1978. — 463 с.

[16] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — Москва: Наука, 1972. — 735 с.

[17] *Chaplya Y. Y., Chernukha O. Y., Bilushchak Y. I.* Contact initial boundary value problem of the diffusion of admixture particles in a two-phase stochastically inhomogeneous stratified strip // J. Mathematical Sciences. — 2012. — Vol. 183, No 1. — P. 83-99.

[18] *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. — Москва: Наука, 1977. — 568 с.
[19] Справочник по теории вероятности и математической статистике / *В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин.* — Москва: Наука, 1985. — 640 с.
[20] *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. I. Случайные процессы. — Москва, 1976. — 494 с.

Two-point function of correlation and dispersion of random diffusion field of concentration in a strip with uniform distribution of layered inclusions

Yuriy Bilushchak, Yevhen Chaplya, Olha Chernukha

In the paper processes of admixture diffusion are studied in a two-phase randomly nonhomogeneous stratified strip taking into account the conditions of non-ideal mass contact on the interfaces. The contact problem is reduced to the equation of mass transfer in the whole body. The equivalent integrodifferential equation is formulated. Its solution is obtained in the form of integral Neumann series. Averaging the obtained solution is carried out over the ensemble of phase configurations with the function of uniform distribution. Influence of material characteristics on behaviour and values of the averaged field of admixture particle concentration is established. Dispersion of the field of particle concentration is defined as well as a two-point function of field correlation (self-correlation) for the diffusion process in the stratified strip with uniform distribution of inclusions. The formulae for the correlation coefficient of concentration field are obtained.

Двухточечная функция корреляции и дисперсия случайного диффузионного поля концентрации в полосе с равномерным распределением слоистых включений

Юрий Билущак, Евгений Чапля, Ольга Чернуха

В работе исследованы процессы диффузии примесного вещества в двухфазной случайно неоднородной слоистой полосе с учетом условий неидеального массового контакта на межфазных границах. Контактная задача диффузии сведена к уравнению массопереноса во всей области тела. Сформулировано эквивалентное интегро-дифференциальное уравнение, решение которого построено в виде интегрального ряда Неймана. Усреднение полученного решения проведено по ансамблю конфигураций фаз с равномерной функцией распределения. Определено влияние характеристик материала на поведение и величину усредненного поля концентрации примесных частиц. Найдена дисперсия поля концентрации частиц и двухточечная функция корреляции (автокорреляции) поля для процесса диффузии в слоистой полосе с равномерным распределением фаз. Получены формулы для коэффициента корреляции поля концентрации.

Отримано 8.11.12