УДК 532.595

Узагальнена задача Фарадея про рух резервуара з рідиною

Олександр Константінов[1], Олег Лимарченко[2]

[1] к. ф.-м. н., с. н. с., Інститут математики НАН України, вул. Терещенківська, 3, Київ, e-mail: akonst.im@mail.ru
[2] д. т. н, професор, КНУ імені Тараса Шевченка, проспект академіка Глушкова, 4е, Київ, e-mail: olelim2010@yahoo.com

У роботі в аналітичному вигляді отримано умови виходу на режим параметричного резонансу механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» в узагальненій задачі Фарадея. На відміну від класичної задачі Фарадея, в якій резервуар рухається лише вертикально за заданим гармонічним законом, досліджується узагальнена задача Фарадея, коли в систему «резервуар – рідина з вільною поверхнею» внесено додаткову ступінь вільності — можливість поступального руху резервуара в горизонтальній площині внаслідок коливань вільної поверхні рідини під час збурення системи вертикальною силою, що змінюється в часі за гармонічним законом. Показано, що співвідношення мас рідини та резервуара стає ключовим фактором, який визначає границі зон стійкості та нестійкості параметричних коливань у разі виникнення параметричного резонансу в системі.

Ключові слова: задача Фарадея, параметричний резонанс, додаткова ступінь вільності, зони нестійкості.

Вступ. Параметричний резонанс у механічній системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею» вперше експериментально досліджував Фарадей у 1831 році [1]. Частково заповнений водою циліндричний резервуар був встановлений на спеціальному лабораторному устаткуванні та мав можливість рухатись у вертикальній площині за заданим гармонічним законом. Результатом експерименту було встановлення Фарадеєм того факту, що перший резонанс виникає, коли резонансна частота вільної поверхні рідини дорівнює половині частоти збурення резервуара. Оскільки резервуар рухається тільки вертикально за заданим законом, коливання рідини ніяк не впливають на характер його руху. Узагальнення задачі Фарадея проводилося в таких напрямках. По-перше, в системі передбачається додатковий ступінь вільності: можливості поступального руху резервуара в горизонтальній площині внаслідок антисиметричних коливань вільної поверхні рідини; по-друге, збудження руху системи відбувалося за рахунок вертикально спрямованої сили, яка змінюється гармонічно з часом. Подальший аналіз показав, що одним із головних факторів, які впливають на характер динамічних процесів у системі, стає співвідношення мас резервуара та рідини. Якщо маса резервуара значно перевершує масу рідини, то результати узагальненої задачі Фарадея близькі до класичної, і навпаки, за малої відносної маси резервуара рухомість рідини суттєво впливає на умови та характер виходу системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» на режим параметричного резонансу.

1. Дискретна модель механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею»

Розглянемо задачу про коливання механічної системи, яка складається з двох взаємодіючих компонентів: циліндричного резервуара та рідини з вільною поверхнею. Резервуар вважаємо абсолютно твердим тілом, який може рухатися поступально під дією активних зовнішніх сил або за заданим законом. Рідину вважаємо ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух — безвихровим. Система розглядається в умовах наземної гравітації, дією сил поверхневого натягу на вільній поверхні рідини нехтуємо.

На основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського, методу модальної декомпозиції та способу, який дозволяє повністю виключити кінематичні граничні умови на вільній поверхні рідини [2], отримаємо дискретну модель механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» відносно незалежних параметрів a_i — коефіцієнтів розкладу в ряд збурення вільної поверхні рідини ξ за формами коливань вільної поверхні ψ_i та ε_i — компонент вектора переміщення точки O — центру незбуреної вільної поверхні рідини

$$\sum_i \ddot{a}_i \left(\beta_{ri}^q + \sum_j a_j \gamma_{rij}^q + \sum_{i,j} a_i a_j \delta_{rijk}^q \right) +$$
$$+\ddot{\vec{\varepsilon}} \left(\vec{B}_r^1 + \sum_i a_i \vec{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{B}_{rijk}^4 \right) =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \left(\gamma_{ijr}^q - 2\gamma_{rij}^q \right) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \left(\delta_{ijkr}^q - 2\delta_{rijk}^q \right) - \frac{1}{2} g \alpha_r^s - g N_r a_r +$$
$$+\dot{\vec{\varepsilon}} \left[\vec{B}_r^1 + \sum_i a_i \left(\vec{B}_{ir}^2 - \vec{B}_{ri}^2 \right) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j 2 \left(\vec{B}_{ijr}^3 - \vec{B}_{rij}^3 \right) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k 3 \left(\vec{B}_{ijkr}^4 - \vec{B}_{rijk}^4 \right) \right], \quad (1)$$

$$\frac{\rho}{\left(M_F + M_T \right)} \left[\sum_i \ddot{a}_i \left(\vec{B}_i^1 + \sum_j a_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right) \right] + \ddot{\vec{\varepsilon}} =$$
$$= \frac{\vec{F}}{\left(M_F + M_T \right)} - g\vec{k} - \frac{\rho}{\left(M_F + M_T \right)} \left(\sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k 2 \vec{B}_{ijk}^3 \right), \quad (2)$$

де ρ — щільність рідини; σ — коефіцієнт поверхневого натягу на вільній поверхні рідини; g — прискорення гравітаційних сил; θ_1 — контактний кут; M_F та M_T — маси рідини та резервуара відповідно.

Система (1), (2) містить $N+3$ рівняння (N — кількість форм коливань рідини, що розглядаються) і описує динаміку сумісного руху системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» за наявності активних зовнішніх сил $\vec{F}$. Рівняння (1) описують динаміку форм коливань вільної поверхні рідини, а рівняння (2) — динаміку квазітвердого поступального руху резервуара, однак ці рівняння взаємозалежні та містять сили взаємодії між резервуаром і рідиною.

Сукупність коефіцієнтів, які входять до системи рівнянь (1), (2), у рамках прийнятої моделі визначає властивості механічної системи, яка розглядається, та особливості прояву в ній внутрішніх лінійних і нелінійних механізмів взаємодії. Ці коефіцієнти визначаються через квадратури від розв'язку крайової задачі з визначення форм коливань вільної поверхні рідини. При цьому коефіцієнти β_{ir}^{q}, γ_{ijr}^{q}, δ_{rijk}^{q}, α_{r}^{s}, N_r, α_{r}^{k}, β_{ir}^{k}, γ_{ijr}^{k}, δ_{rijk}^{k}, λ_r відповідають випадку коливань рідини у нерухомому резервуарі, а коефіцієнти $\vec{B}_{r}^{1}, \vec{B}_{ri}^{2}, \vec{B}_{rij}^{3}, \vec{B}_{rijk}^{4}$ відображають взаємозв'язок коливань рідини та поступального руху резервуара.

Відповідно до методики роботи [2], рівняння вільної поверхні рідини ξ подаємо у вигляді

$$\xi = \sum_{i} a_i(t)\psi_i\left(r,\theta\right),$$

де для чисельної реалізації прийнято такий набір координатних функцій

$$\psi_{1,2}(r,\theta) = J_1\left(\frac{\kappa_1^{(1)}}{R}r\right)\begin{matrix}\sin(\theta),\\ \cos(\theta),\end{matrix} \qquad \psi_{7,8}(r,\theta) = J_3\left(\frac{\kappa_3^{(1)}}{R}r\right)\begin{matrix}\sin(3\theta),\\ \cos(3\theta),\end{matrix}$$

$$\psi_{3}(r,\theta) = J_0\left(\frac{\kappa_0^{(1)}}{R}r\right), \qquad \psi_{9,10}(r,\theta) = J_1\left(\frac{\kappa_1^{(2)}}{R}r\right)\begin{matrix}\sin(\theta),\\ \cos(\theta),\end{matrix}$$

$$\psi_{4,5}(r,\theta) = J_2\left(\frac{\kappa_2^{(1)}}{R}r\right)\begin{matrix}\sin(2\theta),\\ \cos(2\theta),\end{matrix} \qquad \psi_{11,12}(r,\theta) = J_1\left(\frac{\kappa_1^{(3)}}{R}r\right)\begin{matrix}\sin(\theta),\\ \cos(\theta),\end{matrix}$$

$$\psi_{6}(r,\theta) = J_0\left(\frac{\kappa_0^{(2)}}{R}r\right).$$

У класичній задачі Фарадея (рис. 1*а*) резервуар може здійснювати вертикальні рухи за заданим гармонічним законом $\varepsilon_z = H_z \sin pt$, тому отриману дискретну модель у вигляді рівнянь (1), (2) необхідно спростити. В рівняннях (1) доданки з $\ddot{\varepsilon}_x$, $\dot{\varepsilon}_x$, $\ddot{\varepsilon}_y$ та $\dot{\varepsilon}_y$ необхідно виключити, а доданок з $\ddot{\varepsilon}_z$ перенести у праву частину як відомий. Рівняння (2) квазітвердого руху резервуара взагалі необхідно виключити як надлишкові. Внаслідок цих перетворень отримаємо дискретну модель системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею», яка здійснює рухи вздовж вертикальної осі OZ за заданим законом

$$\sum_{i}\ddot{a}_i\left(\beta_{ri}^{q} + \sum_{j} a_j\gamma_{rij}^{q} + \sum_{i,j} a_i a_j \delta_{rijk}^{q}\right) =$$

$$= -\ddot{\varepsilon}_z\left(B_r^{1z} + \sum_{i} a_i B_{ri}^{2z} + \sum_{i,j} a_i a_j B_{rij}^{3z} + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k B_{rijk}^{4z}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\dot{a}_i\dot{a}_j\left(\gamma^q_{ijr}-2\gamma^q_{rij}\right)+\sum_{i,j,k}\dot{a}_i\dot{a}_j a_k\left(\delta^q_{ijkr}-2\delta^q_{rijk}\right)-\frac{1}{2}g\alpha^s_r-gN_r a_r+$$
$$+\dot{\varepsilon}_z\left[B^{1z}_r+\sum_i a_i\left(B^{2z}_{ir}-B^{2z}_{ri}\right)+\sum_{i,j}\dot{a}_i a_j 2\left(B^{3z}_{ijr}-B^{3z}_{rij}\right)+\sum_{i,j,k}\dot{a}_i a_j a_k 3\left(B^{4z}_{ijkr}-B^{4z}_{rijk}\right)\right].(3)$$

В узагальненій задачі Фарадея (рис. 1*б*) будемо вважати, що резервуар здійснює вертикальні рухи за заданим гармонічним законом $\varepsilon_z = H_z\sin(pt)$, а також може здійснювати переміщення ε_y у горизонтальній площині вздовж осі OY. Здійснюючи відповідні спрощення повної дискретної моделі (1), (2), отримаємо дискретну модель системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» для узагальненої задачі Фарадея, коли резервуар має додатковий ступінь вільності (можливість горизонтального руху)

$$\sum_i \ddot{a}_i\left(\beta^q_{ri}+\sum_j a_j\gamma^q_{rij}+\sum_{i,j}a_i a_j\delta^q_{rijk}\right)+$$
$$+\ddot{\varepsilon}_y\left(B^{1y}_r+\sum_i a_i B^{2y}_{ri}+\sum_{i,j}a_i a_j B^{3y}_{rij}+\sum_{i,j,k}a_i a_j a_k B^{4y}_{rijk}\right)=$$
$$=-\ddot{\varepsilon}_z\left(B^{1z}_r+\sum_i a_i B^{2z}_{ri}+\sum_{i,j}a_i a_j B^{3z}_{rij}+\sum_{i,j,k}a_i a_j a_k B^{4z}_{rijk}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_i a_j\left(\gamma^q_{ijr}-2\gamma^q_{rij}\right)+\sum_{i,j,k}\dot{a}_i\dot{a}_j a_k\left(\delta^q_{ijkr}-2\delta^q_{rijk}\right)-\frac{1}{2}g\alpha^s_r-gN_r a_r+$$
$$+\dot{\varepsilon}_y\left[B^{1y}_r+\sum_i a_i\left(B^{2y}_{ir}-B^{2y}_{ri}\right)+\sum_{i,j}\dot{a}_i a_j 2\left(B^{3y}_{ijr}-B^{3y}_{rij}\right)+\sum_{i,j,k}\dot{a}_i a_j a_k 3\left(B^{4y}_{ijkr}-B^{4y}_{rijk}\right)\right]+$$

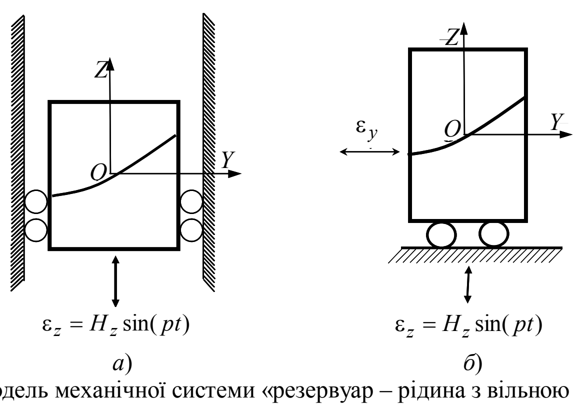

Рис. 1. Модель механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» в класичній (*а*) та узагальненій (*б*) задачі Фарадея

$$+\dot{\varepsilon}_z\left[B_r^{1z}+\sum_i a_i\left(B_{ir}^{2z}-B_{ri}^{2z}\right)+\sum_{i,j}\dot{a}_i a_j 2\left(B_{ijr}^{3z}-B_{rij}^{3z}\right)+\sum_{i,j,k}\dot{a}_i a_j a_k 3\left(B_{ijkr}^{4z}-B_{rijk}^{4z}\right)\right], \quad (4)$$

$$\frac{\rho}{\left(M_F+M_T\right)}\left[\sum_i \ddot{a}_i\left(B_i^{1y}+\sum_j a_j B_{ij}^{2y}+\sum_{j,k} a_j a_k B_{ijk}^{3y}\right)\right]+\ddot{\varepsilon}_y=$$

$$=\frac{F_y}{\left(M_F+M_T\right)}-\frac{\rho}{\left(M_F+M_T\right)}\left(\sum_{i,j}\dot{a}_i\dot{a}_j B_{ij}^{2y}+\sum_{i,j,k}\dot{a}_i\dot{a}_j a_k 2B_{ijk}^{3y}\right). \quad (5)$$

2. Побудова границь нестійкості та отримання умов виходу системи на режим параметричного резонансу

Рівняння (3) або (4), (5) описують процес розвитку параметричних коливань у механічній системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею», коли система рухається вертикально за заданим гармонічним законом $\varepsilon_z = H_z \sin(pt)$. Як відомо з теорії параметричних коливань [1, 3], існують області в площині параметрів $\left(p, H_z\right)$, коли розв'язки рівнянь (3) або (4), (5) будуть необмежено зростати, тобто області динамічної нестійкості. Побудова областей нестійкості буде відповіддю на питання: за яких значень параметрів зовнішнього силового збурення резервуара $\left(p, H_z\right)$ система «резервуар – рідина з вільною поверхнею» за наявності будь-якого малого початкового збурення вільної поверхні рідини вийде на режим параметричного резонансу.

Знайдемо спочатку рівняння границь області нестійкості для системи рівнянь (3) або, іншими словами, для класичної задачі Фарадея. Відомо з теорії [3, 4], що дослідження нестійкості ведеться на основі лінеаризованих рівнянь руху та, практично для всіх випадків руху, в околі першого (нижчого) резонансу.

Запишемо лінеаризоване рівняння для форми з нижчою частотою — першої антисиметричної форми a_1 — за наявності зовнішнього вертикального збурення резервуара $\varepsilon_z = H_z \sin(pt)$ у вигляді

$$\ddot{a}_1\beta_{11}^q + B_{11}^{2z}\ddot{\varepsilon}_z a_1 + gN_1 a_1 = 0,$$

та перепишемо його в класичній формі рівняння Мат'є, тобто

$$\ddot{a}_1 + \omega_1^2\left(1-\nu H_z p^2\cos(pt)\right)a_1 = 0, \quad (6)$$

де $\nu = B_{11}^{2z}/\left(gN_1\right)$, $\omega_1 = gN_1/\beta_{11}^q$ — власна частота першої антисиметричної форми a_1.

Область дійсних характеристичних чисел рівняння (6) співпадає з областю розв'язків, які необмежено зростають. З іншого боку, область комплексних характеристичних чисел відповідає обмеженим (майже періодичним) розв'язкам. Границям, які розділяють області дійсних і комплексних коренів, відповідають кратні корені, які мають значення 1 або –1. У випадку значення 1 характеристичного кореня розв'язок диференціального рівняння буде періодичним із періодом $T = 2\pi/\omega_1$, а у випадку значення -1 воно буде мати період $2T$.

Таким чином, області необмежено зростаючих розв'язків відокремлюються від областей стійкості періодичними рішеннями з періодом T або $2T$. А саме, два розв'язки одного періоду обмежують область нестійкості, два розв'язки різних періодів — область стійкості. Строге доведення цієї теореми наведено у роботі [4]. З наведеної теореми випливає, що визначення границь областей нестійкості можна звести до пошуку умов, за яких диференціальне рівняння (6) має періодичні розв'язки з періодами T або $2T$.

Оскільки існування періодичних розв'язків і можливість їх розкладу у ряд Фур'є є фактом відомим, будемо шукати періодичний розв'язок у вигляді

$$a_1 = \frac{B_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{kpt}{2} + B_k \sin\frac{kpt}{2} \right), \tag{7}$$

де парним значенням $k = 2,4,...$ відповідають періодичні періоду T, а непарним $k = 1,3,...$ — періодичні розв'язки періоду $2T$, причому номер k, яким ми обмежуємося у розкладі (7), означає номер зони відповідного параметричного резонансу (зони нестійкості).

Для пошуку границь зони першого параметричного резонансу ($k = 1$) шукаємо періодичний розв'язок періоду $2T$ у вигляді

$$a_1 = A_1 \cos\frac{pt}{2} + B_1 \sin\frac{pt}{2}. \tag{8}$$

Підставляємо співвідношення (8) у рівняння (6) і скористаємося методом Гальоркіна, а саме: множимо рівняння (6) спочатку на $\cos(pt/2)$, потім на $\sin(pt/2)$, й отримані вирази інтегруємо за періодом $2T$. У результаті отримуємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь стосовно значень амплітуд A_1 та B_1, яка, як відомо з лінійної алгебри, має відмінні від нуля розв'язки тільки у випадку, коли детермінант, складений із коефіцієнтів цієї системи, дорівнює нулю. Розкриваючи детермінант, отримаємо рівняння границь області першого параметричного резонансу в класичній задачі Фарадея

$$p = \frac{2\omega_1}{\sqrt{1 - 2\omega_1^2 \nu H_z}} \quad \text{та} \quad p = \frac{2\omega_1}{\sqrt{1 + 2\omega_1^2 \nu H_z}}.$$

Для побудови границь зони другого параметричного резонансу шукаємо періодичний розв'язок періоду T у вигляді

$$a_1 = B_0/2 + B_2 \cos(pt) + A_2 \sin(pt) + A_4 \sin(2pt),$$

і, скориставшись знову методом Гальоркіна, отримаємо відповідні рівняння границь

$$p = \frac{\sqrt{-1 + \sqrt{1 + 2\omega_1^4 \nu^2 H_z^2}}}{\omega_1 \nu H_z} \quad \text{та} \quad p = \omega_1 \sqrt{\frac{2(5 + \sqrt{9 + \omega_1^4 \nu^2 H_z^2}}{16 - \omega_1^4 \nu^2 H_z^2}}.$$

Рівняння границь зони третього параметричного резонансу для періодичного розв’язку періоду $2T$

$$a_1 = A_1 \sin\frac{pt}{2} + B_1 \cos\frac{pt}{2} + A_3 \sin\frac{3pt}{2} + B_3 \cos\frac{3pt}{2}$$

на основі методу Гальоркіна отримуємо у вигляді

$$p = 2\omega_1 \sqrt{\frac{\omega_1^2 \nu H_z + 5 - \sqrt{5\omega_1^4 \nu^2 H_z^2 - 8\omega_1^2 \nu H_z + 16}}{4\omega_1^4 \nu^2 H_z^2 - 18\omega_1^2 \nu H_z - 9}} \quad \text{та}$$

$$p = 2\omega_1 \sqrt{\frac{-\omega_1^2 \nu H_z + 5 - \sqrt{5\omega_1^4 \nu^2 H_z^2 + 8\omega_1^2 \nu H_z + 16}}{4\omega_1^4 \nu^2 H_z^2 + 18\omega_1^2 \nu H_z - 9}} \, .$$

Розподіл першої та другої зони параметричного резонансу у класичній задачі Фарадея в площині $\left(\omega/\omega_1 , H_z/R\right)$ показано на рис. 2. Аналіз результатів, поданих на рисунку, показує, що в зоні першого параметричного резонансу будь-яка мала амплітуда коливання резервуара H_z із часом виведе систему на режим параметричного резонансу. З іншого боку, «спіймати» в системі другий параметричний резонанс практично неможливо, оскільки це може відбуватися в дуже вузькому діапазоні частот для великих амплітуд збурення резервуара H_z.

Для побудови зон параметричного резонансу в узагальненій задачі Фарадея лінеаризуємо рівняння (4), (5) і запишемо їх знову тільки для першої антисиметричної форми a_1 із можливістю горизонтального руху за координатою ε_y

$$\ddot{a}_1 \beta_{11}^q + B_1^{1y} \ddot{\varepsilon}_y + B_{11}^{2z} \ddot{\varepsilon}_z a_1 + g N_1 a_1 = 0 , \quad \frac{\rho}{M_T + M_F} B_1^{1y} \ddot{a}_1 + \ddot{\varepsilon}_y = 0 ,$$

і, з урахуванням позначень $\nu = B_{11}^{2z} / \left(g N_1\right)$, $\lambda_1 = B_1^{1y} / \beta_{11}^q$, $\lambda_2 = \rho B_1^{1y} / \left(M_T + M_F\right)$, подамо далі у канонічному вигляді

$$\ddot{a}_1 + \lambda_1 \ddot{\varepsilon}_y + \omega_1^2 (1 - \nu H_z p^2 \cos pt) a_1 = 0 , \tag{9}$$

$$\lambda_2 \ddot{a}_1 + \ddot{\varepsilon}_y = 0 . \tag{10}$$

Для побудови границь зони першого параметричного резонансу в узагальненій задачі Фарадея шукаємо періодичні розв’язки періоду $2T$ системи рівнянь (9), (10) у формі

$$a_1 = A_1 \cos\frac{pt}{2} + B_1 \sin\frac{pt}{2} , \qquad \varepsilon = A_2 \cos\frac{pt}{2} + B_2 \sin\frac{pt}{2} ,$$

та за допомогою методу Гальоркіна отримаємо відповідні рівняння границь

$$p = \frac{2\omega_1}{\sqrt{1 - 2\omega_1^2 \nu H_z - \lambda_1 \lambda_2}} \quad \text{та} \quad p = \frac{2\omega_1}{\sqrt{1 + 2\omega_1^2 \nu H_z - \lambda_1 \lambda_2}} .$$

Для побудови границь зони другого параметричного резонансу в узагальненій задачі Фарадея шукаємо періодичне рішення періоду T у вигляді

$$a_1 = B_{10} + B_{11}\cos(pt) + A_{11}\sin(pt) + A_{12}\sin(2pt),$$
$$\varepsilon = B_{21}\cos(pt) + A_{21}\sin(pt) + A_{22}\sin(2pt),$$

і, скориставшись знову методом Гальоркіна, отримаємо відповідні рівняння границь

$$p = \frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2 - 1 + \sqrt{(\lambda_1\lambda_2 - 1)^2 + 2\omega_1^4\nu^2 H_z^2}}}{\omega_1 \nu H_z},$$
$$p = \sqrt{2}\omega_1\sqrt{\frac{5(1-\lambda_1\lambda_2) + \sqrt{9(\lambda_1\lambda_2 - 1)^2 + \omega_1^4\nu^2 H_z^2}}{16(\lambda_1\lambda_2 - 1)^2 - \omega_1^4\nu^2 H_z^2}}.$$

Рівняння границь зони третього параметричного резонансу в узагальненій задачі Фарадея для періодичного розв'язку періоду $2T$

$$a_1 = A_1\sin\frac{pt}{2} + B_1\cos\frac{pt}{2} + A_3\sin\frac{3pt}{2} + B_3\cos\frac{3pt}{2},$$
$$\varepsilon = C_1\sin\frac{pt}{2} + P_1\cos\frac{pt}{2} + C_3\sin\frac{3pt}{2} + P_3\cos\frac{3pt}{2},$$

на основі методу Гальоркіна отримуємо у вигляді

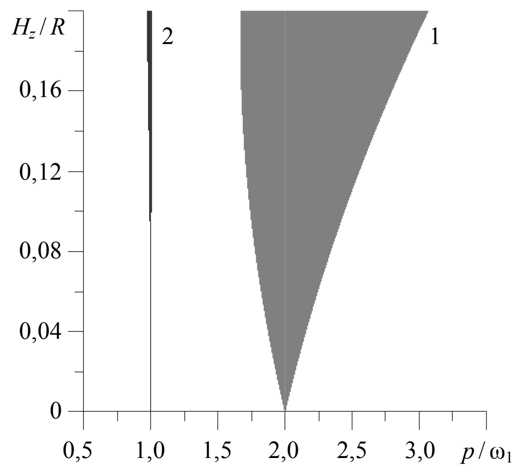

Рис. 2. Зони першого (1) і другого (2) резонансу в класичній задачі Фарадея

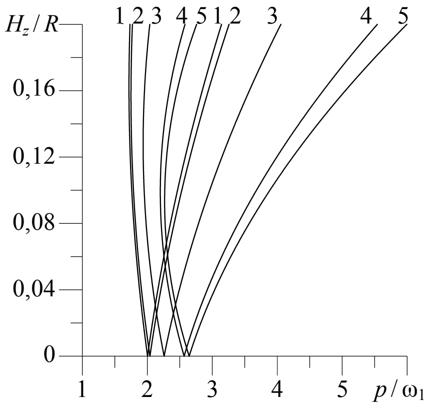

Рис. 3. Зони першого резонансу в узагальненій задачі Фарадея

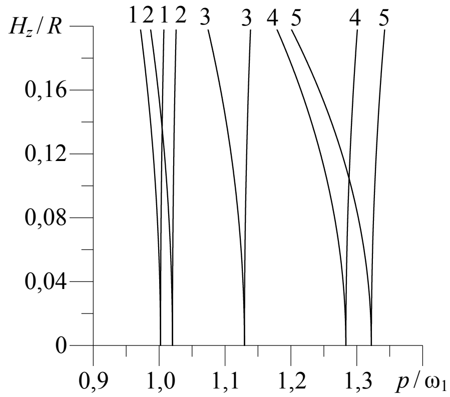

Рис. 4. Зони другого резонансу в узагальненій задачі Фарадея

$$p = 2\omega_1 \sqrt{\frac{5(1-\lambda_1\lambda_2) + \omega_1^2 \nu H_z - \sqrt{5\omega_1^4 \nu^2 H_z^2 + 8\omega_1^2 \nu H_z (\lambda_1\lambda_2 - 1) + 16(\lambda_1\lambda_2 - 1)^2}}{4\omega_1^4 \nu^2 H_z^2 + 18\omega_1^2 \nu H_z (\lambda_1\lambda_2 - 1) - 9(\lambda_1\lambda_2 - 1)^2}},$$

$$p = 2\omega_1 \sqrt{\frac{5(1-\lambda_1\lambda_2) - \omega_1^2 \nu H_z - \sqrt{5\omega_1^4 \nu^2 H_z^2 - 8\omega_1^2 \nu H_z (\lambda_1\lambda_2 - 1) + 16(\lambda_1\lambda_2 - 1)^2}}{4\omega_1^4 \nu^2 H_z^2 - 18\omega_1^2 \nu H_z (\lambda_1\lambda_2 - 1) - 9(\lambda_1\lambda_2 - 1)^2}}.$$

Розподіл першої та другої зони параметричного резонансу в узагальненій задачі Фарадея в площині $(\omega/\omega_1, H_z/R)$ для різних співвідношень мас (1 — $M_F/M_T = 100$, 2 — $M_F/M_T = 10$, 3 — $M_F/M_T = 1$, 4 — $M_F/M_T = 0{,}1$, 5 – $M_F/M_T = 0{,}01$) показано на рис. 3 та 4 відповідно.

Наявність додаткового ступеня вільності призводить до підвищення частоти параметричного резонансу (див. рис. 3, 4), при цьому вона тим вища, чим менша маса резервуара стосовно маси рідини, тобто чим більший вплив рухомості рідини. Окрім того, чим менша маса резервуара стосовно маси рідини, тим ширшою стає зона параметричного резонансу за збільшення амплітуди зовнішнього збурення H_z.

Висновки. Розглянуто узагальнення класичної задачі Фарадея внаслідок збудження руху системи вертикальною силою, що змінюється в часі за гармонічним законом, а також за припущенням, що резервуар може здійснювати рухи в горизонтальному напрямку через збудження антисиметричних форм коливань. Побудовано ефективну нелінійну аналітичну модель сумісного руху циліндричного резервуара з рідиною з вільною поверхнею. На основі лінеаризованої постановки аналітично знайдено границі області прояву параметричного резонансу залежно від співвідношення мас рідини та резервуара. Показано, що внесення в механічну систему «резервуар – рідина з вільною поверхнею» додаткового ступеня вільності,

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2012, вип. 16, 76-85

яка зумовлена можливістю горизонтального руху резервуара, призводить до підвищення частоти параметричного резонансу, причому вона тим вища, чим менша маса резервуара стосовно маси рідини.

Література

[1] *Faraday M.* On the forms and states assumed by fluids in contact vibrating elastic surfaces // Phil. Trans. of the Royal Society of London. — 1831. — Vol. 121. — P. 319-346.

[2] *Лимарченко О. С., Ясинский В. В.* Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. — Киев: НТТУ «КПИ», 1997. — 338 с.

[3] *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. — Москва: ГИТТЛ, 1956. — 600 с.

[4] *Стретт М. Д.* Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике. — ДНТВУ, 1935. — 400 с.

The generalized Faraday problem about motion of reservoir with liquid

Oleksandr Konstantinov, Oleg Limarchenko

The conditions of the attainment to mode of parametric resonance for the mechanical system «reservoir – liquid with free surface» in the generalized Faraday problem are obtained in the analytical form. In contrast to the classical Faraday problem, when the reservoir moves only vertically by the prescribed harmonic law, we investigate the generalized Faraday problem, when supplementary degree of freedom is implemented into the system, namely, potential of translational movement of the reservoir in the horizontal plane due to oscillations of a free surface of liquid under system disturbance by vertical force, which changes in time according to harmonic law. It was shown, that ratio of masses of liquid and the reservoir tank becomes the key factor, which defines boundaries of the domain of stability and instability of the parametric oscillations on origination of parametric resonance in the system.

Обобщенная задача Фарадея о движении резервуара с жидкостью

Александр Константинов, Олег Лимарченко

В работе в аналитическом виде получены условия выхода на режим параметрического резонанса механической системы «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» в обобщенной задаче Фарадея. В отличие от классической задачи Фарадея, когда резервуар двигается только вертикально по заданному гармоническому закону, исследуется обобщенная задачи Фарадея, когда в систему «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» внесена дополнительная степень свободы — возможность поступательного движения резервуара в горизонтальной плоскости за счет колебаний свободной поверхности жидкости при возбуждении системы вертикальной силой, изменяющейся во времени по гармоническому закону. Показано, что соотношение масс жидкости и резервуара становится ключевым фактором, который определяет границы областей устойчивости и неустойчивости параметрических колебаний при возникновении параметрического резонанса в системе.

Представлено доктором технічних наук Я. П'янилом

Отримано 07.11.12