

## Ефективна швидкість поздовжньої хвилі у пружному середовищі з дисковими включеннями слабої контрастності

Віктор Михаськів<sup>1</sup>, Ярослав Кунець<sup>2</sup>, Валерій Матус<sup>3</sup>

<sup>1</sup> д. ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, e-mail: tex@iapmm.lviv.ua

<sup>2</sup> д. ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, e-mail: kunets@iapmm.lviv.ua

<sup>3</sup> к. ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, e-mail: matus@iapmm.lviv.ua

*Запропоновано метод дослідження ефективної швидкості поширення поздовжньої хвилі у необмеженому ізотропному пружному середовищі з масивом випадково розподілених тонких дискових пружних включень змінної товщини. Припускається, що включення слабої контрастності, тобто механічні параметри складових композиту несуттєво відрізняються між собою порівняно з малою відносною товщиною неоднорідностей. Розглянуто випадки впорядкованої та хаотичної орієнтації включень у просторі. Усереднені динамічні параметри композиту визначено за допомогою дисперсійного співвідношення Фолді із залученням розв'язку задачі розсіяння пружних хвиль відповідною локальною перешкодою. Проаналізовано вплив форми неоднорідностей і механічних властивостей композиту на швидкість поширення у ньому поздовжньої хвилі.*

**Ключові слова:** матричний композит, стохастично розподілені дискові включення, неоднорідності слабої контрастності, дисперсійні співвідношення, ефективна швидкість поздовжньої хвилі.

**Вступ.** Поява у пружних матеріалах множинних тонкостінних неоднорідностей призводить, зазвичай, до деградації їх фізичних властивостей [1, 2]. Цю обставину необхідно враховувати в інженерній практиці за розробки сучасних методів неруйнівного контролю пружних середовищ засобами ультразвукового сканування, інтерпретації експериментальних геофізичних даних тощо. Окрім цього, тонкостінні включення часто виконують роль наповнювачів різних композитних структур. У зв'язку з цим, важливою проблемою є розробка методів визначення ефективних (усереднених) динамічних параметрів середовищ із масивами випадково розподілених тонкостінних елементів. Огляд існуючих підходів та їх порівняльний аналіз наведено, наприклад, у роботах [3, 4]. Для композитів із малою концентрацією наповнювачів, коли їх взаємодією можна знехтувати, ефективним є метод гомогенізації, базований на апроксимаційних співвідношеннях Фолді [5]. За його допомогою досліджувались, в основному, випадки тонких неоднорідностей великої та малої жорсткостей, стохастично розміщених у пружній матриці [6-8].

Визначення динамічних властивостей гомогенізованих структур ґрунтується на розв'язках задач розсіяння пружних хвиль відповідними локальними тонкими розсіювачами. При цьому розглядалися, в основному, розсіювачі великої контрастності [9-11]. Важливими у технічних застосуваннях є тонкі неоднорідності слабкої контрастності, коли пружні властивості включення та матриці незначно відрізняються між собою порівняно з малою відносною товщиною неоднорідності. Нижче, на основі асимптотично точної моделі динамічної поведінки слабкоконтрастного включення [12, 13] і співвідношення Фолді запропоновано алгоритм дослідження ефективних швидкостей поширення поздовжніх хвиль у необмеженому ізотропному пружному середовищі з масивом випадково розподілених тонких дискових пружних включень змінної товщини.

### 1. Розсіяння поздовжніх хвиль локальним тонкостінним включенням

Нехай в однорідному пружному необмеженому середовищі з модулями Ламе  $\lambda$ ,  $\mu$  та густиною  $\rho$  в умовах ідеального механічного контакту знаходиться тонкостінне дискове пружне включення з параметрами  $\lambda_0$ ,  $\mu_0$ ,  $\rho_0$ . Середина поверхня неоднорідності  $W_0$  — круг радіуса  $a$ , що лежить у площині  $x_3 = 0$ , з центром у початку декартової системи координат  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , а її товщина визначається функцією  $h(|\mathbf{x}|)$ ,  $\mathbf{x} \in W_0$ . Нижче розглянемо включення слабкої контрастності, коли на механічні та геометричні параметри пружної системи накладено обмеження [12]

$$\varepsilon \leq \max(\lambda, \mu) / \max(\lambda_0, \mu_0) \leq 1 / \varepsilon, \quad \varepsilon = a^{-1} \max_{\mathbf{x} \in W_0} h(|\mathbf{x}|), \quad (1)$$

де  $\varepsilon$  — малий безрозмірний параметр, що характеризує відносну товщину тонкої неоднорідності. Співвідношення (1) забезпечує широкий діапазон зміни пружних параметрів розглянутої композитної структури.

Задачу розглядаємо у стаціонарній постановці, тому часовий множник  $\exp(-i\omega t)$  ( $t$  — час,  $\omega$  — кругова частота коливань) виключаємо з розв'язку, звівши його до відшукування лише амплітудних значень. Вектори переміщень у матриці й області включення  $W_\varepsilon$  за гармонічних коливань задовольняють рівняння Ламе [14]

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}^{sc}(\mathbf{x}) + \mu \Delta \mathbf{u}^{sc}(\mathbf{x}) + \omega^2 \rho \mathbf{u}^{sc}(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus W_\varepsilon, \\ (\lambda_0 + \mu_0) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \mu_0 \Delta \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \omega^2 \rho_0 \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in W_\varepsilon \end{aligned} \quad (2)$$

та граничні умови ідеального контакту на поверхні розділу матеріалів

$$\mathbf{u}^{sc} + \mathbf{u}^{in} = \mathbf{u}^0, \quad \sum_{j=1}^3 (\sigma_{lj}^{sc} + \sigma_{lj}^{in} - \sigma_{lj}^0) n_j = 0, \quad l = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in \partial W_\varepsilon. \quad (3)$$

У співвідношеннях (2), (3)  $\mathbf{u}^{sc}(\mathbf{x})$  і  $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$  — переміщення у дифрагованому неоднорідністю полі та включенні відповідно; пружна система збудовується заданою

поздовжньою хвилею  $\mathbf{u}^{in}(\mathbf{x})$ ;  $\sigma_{ij}^{sc}$ ,  $\sigma_{ij}^{in}$ ,  $\sigma_{ij}^0$  — компоненти тензорів напружень, що відповідають переміщенням  $\mathbf{u}^{sc}$ ,  $\mathbf{u}^{in}$  та  $\mathbf{u}^0$ ;  $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$  — зовнішня нормаль до поверхні  $\partial W_\varepsilon$ .

Переміщення  $\mathbf{u}^{sc}(\mathbf{x})$  задовольняють умову випромінювання на безмежності [14]

$$\mathbf{u}^{sc}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r} \sum_{\alpha=1,2} e^{ik_\alpha r} \mathbf{f}^\alpha(\mathbf{l}, \mathbf{s}) + O(r^{-2}), \quad r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (4)$$

де  $\mathbf{f}^\alpha(\mathbf{l}, \mathbf{s})$  — комплексні амплітуди розсіяння поздовжніх ( $\alpha=1$ ) і поперечних ( $\alpha=2$ ) хвиль;  $\mathbf{l}$  та  $\mathbf{s} = \mathbf{x}/r = (s_1, s_2, s_3)$  — напрямки падіння хвилі та спостереження;  $k_1$  і  $k_2$  — хвильові числа поздовжніх і поперечних хвиль у матриці.

У роботах [12, 13] за допомогою методів теорії сингулярних збурень за обмежень (1) отримано модель пружно-динамічної взаємодії матриці з включенням слабкої контрастності. При цьому, розв'язок задачі (2)-(4) асимптотично наближено визначено через стрибки зміщень і напружень на серединній поверхні неоднорідності  $W_0$

$$\begin{aligned} u_m^{sc}(x_3 = +0) - u_m^{sc}(x_3 = -0) &= \Phi_m(\mathbf{x}), \\ \sigma_{m3}^{sc}(x_3 = +0) - \sigma_{m3}^{sc}(x_3 = -0) &= \Psi_m(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in W_0, \quad m = \overline{1,3}; \\ \Phi_j(\mathbf{x}) &= h(\mathbf{x})(\kappa_j - \kappa_j^0) \sigma_{j3}^{in}(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, \\ \Phi_3(\mathbf{x}) &= h(\mathbf{x})(\lambda_0 \kappa_3^0 - \lambda \kappa_3) \sum_{m=1}^2 \frac{\partial u_m^{in}(\mathbf{x})}{\partial x_m} + h(\mathbf{x})(\kappa_3 - \kappa_3^0) \sigma_{33}^{in}(\mathbf{x}), \\ \Psi_j(\mathbf{x}) &= \sum_{m=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_m} \left[ h(\mathbf{x})(\sigma_{jm}^{in}(\mathbf{x}) - \sigma_{jm}^0(\mathbf{x})) \right] + \omega^2 h(\mathbf{x})(\rho - \rho_0) u_j^{in}(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, \\ \Psi_3(\mathbf{x}) &= \omega^2 h(\mathbf{x})(\rho - \rho_0) u_3^{in}(\mathbf{x}); \\ \sigma_{ii}^0(\mathbf{x}) &= \lambda_0 \sum_{m=1}^3 \frac{\partial u_m^{in}}{\partial x_m} + 2\mu_0 \frac{\partial u_i^{in}}{\partial x_i}, \quad \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}) = \mu_0 \left( \frac{\partial u_i^{in}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{in}}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j; \\ \kappa_i &= \frac{1}{\mu}, \quad \kappa_3 = \frac{1}{\lambda + 2\mu}, \quad \kappa_i^0 = \frac{1}{\mu_0}, \quad \kappa_3^0 = \frac{1}{\lambda_0 + 2\mu_0}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Поздовжню хвилю, що набігає на включення, подамо у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{in}(\mathbf{x}) &= A_0 \mathbf{l} \exp[ik_1(\mathbf{l}, \mathbf{x})], \quad \mathbf{l} = (l_1, 0, l_3), \\ x_1 &= r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $A_0$  — амплітуда хвилі;  $(r, \theta, \varphi)$  — сферичні координати.

На основі співвідношень (4)-(6), за допомогою формул Беті [9, 14] отримуємо такі вирази для визначення амплітуд розсіяння поздовжніх і поперечних хвиль у дальній хвильовій зоні:

$$\mathbf{f}^\alpha(\mathbf{l}, \mathbf{s}) = A_0 a^3 k_1 k_\alpha \mathbf{f}_1^\alpha(\mathbf{l}, \mathbf{s}), \quad \mathbf{f}_1^\alpha(\mathbf{l}, \mathbf{s}) = \mathbf{f}_2^\alpha(\mathbf{l}, \mathbf{s}) L_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad (7)$$

$$\mathbf{f}_2^\alpha(\mathbf{l}, \mathbf{s}) = \sum_{m=1}^3 (\mathbf{a}_m^\alpha \Phi_m^\alpha + \mu^{-1} \mathbf{b}_m^\alpha \Psi_m^\alpha);$$

$$\Phi_1^\alpha = 2(\kappa_1^0 - \kappa_1) \mu l_1 l_3; \quad \Phi_2^\alpha = 0, \quad \Phi_3^\alpha = \kappa_3^0 [(\lambda - \lambda_0) + 2(\mu - \mu_0) l_3^2],$$

$$\Psi_1^\alpha = s_1 [(\lambda_0 + 2\mu_0 - \lambda - 2\mu) + 2(\mu_0 - \mu) l_3^2] + (\lambda + 2\mu) \frac{k_1}{k_\alpha} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) l_1,$$

$$\Psi_2^\alpha = s_2 (\lambda_0 - \lambda) (l_1 + l_3), \quad \Psi_3^\alpha = (\lambda + 2\mu) \frac{k_1}{k_\alpha} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) l_3;$$

$$\mathbf{a}_m^1 = \mathbf{s} \left[ (1 - 2\xi^2) \delta_{3m} + 2\xi^2 s_m s_3 \right], \quad \mathbf{a}_m^2 = \delta_m s_3 + \delta_3 s_m - 2\mathbf{s} s_m s_3,$$

$$\mathbf{b}_m^1 = \xi^2 s_m \mathbf{s}, \quad \mathbf{b}_m^2 = \delta_m - \mathbf{s} s_m, \quad \delta_m = (\delta_{1m}, \delta_{2m}, \delta_{3m}); \quad \xi = \frac{k_1}{k_2} = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)};$$

$$L_\alpha = a^{-3} \int_{W_0} h(y_1, y_2) \exp(ik_1 l_1 y_1) \exp[-ik_\alpha (s_1 y_1 + s_2 y_2)] dy_1 dy_2;$$

$$l_1 = -\sin \theta_{in}, \quad l_3 = -\cos \theta_{in}, \quad \varphi_{in} = 0,$$

$$s_1 = \sin \theta_{sc} \cos \varphi_{sc}, \quad s_2 = \sin \theta_{sc} \sin \varphi_{sc}, \quad s_3 = \cos \theta_{sc},$$

$\theta_{in}$ ,  $\varphi_{in}$  та  $\theta_{sc}$ ,  $\varphi_{sc}$  — кути падіння поздовжньої хвилі та спостереження розсіяних хвиль відповідно;  $\nu$  — коефіцієнт Пуассона матеріалу матриці;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Під час аналізу ефективних динамічних властивостей композиту важливою характеристикою є амплітуда розсіяння хвиль у напрямку «вперед», коли  $\mathbf{s} = \mathbf{l}$ . У випадку поздовжніх хвиль із співвідношення (7) маємо

$$\mathbf{f}_2^1(\mathbf{l}, \mathbf{l}) = f_p(\theta_{in}) \mathbf{l}, \quad (8)$$

$$f_p(\theta_{in}) = 2\xi^2 (1 - \eta) (1 + 2\eta^{-1} \cos^2 \theta_{in}) \sin^2 \theta_{in} +$$

$$+ [1 - \kappa_* + 2\xi^2 (\eta - 1) \sin^2 \theta_{in}] \left[ \kappa_*^{-1} + (1 - 2\xi^2 \kappa_*^{-1}) \sin^2 \theta_{in} \right] + \frac{\rho_0}{\rho} - 1,$$

$$\kappa_* = (\lambda_0 + 2\mu_0) / (\lambda + 2\mu), \quad \eta = \mu_0 / \mu,$$

де параметри  $\kappa_*$  та  $\eta$  характеризують відносну жорсткість складників матричного композиту.

## 2. Усереднені динамічні характеристики композиту

Нехай у пружному ізотропному середовищі з масивом випадково розподілених тонкостінних дискових слабкоконтрастних включень змінної товщини поширюється плоска поздовжня хвиля. Просторова орієнтація мікрровключень може бути випадковою або впорядкованою. Реакція такого композитного тіла на динамічні

збурення характеризується дисперсією та загасанням хвиль, спричиненими процесом їх розсіяння локальними неоднорідностями [3, 7]. Таке явище можна описати за допомогою комплексного, залежного від частоти хвильового числа

$$K_1(\omega) = \frac{\omega}{c_e(\omega)} + i\alpha(\omega), \quad (9)$$

де  $c_e(\omega)$  та  $\alpha(\omega)$  — ефективна фазова швидкість поздовжніх хвиль і коефіцієнт їх загасання.

Залежність хвильового числа поздовжніх хвиль  $K_1(\omega)$  від фізичних і геометричних параметрів композиту знаходимо з дисперсійного рівняння Фолді [5, 7] і співвідношень (7), (8)

$$K_1^2(\omega) = k_1^2 \left( 1 + \zeta_0 f_p^* \right), \quad \zeta_0 = \zeta a^{-3} V. \quad (10)$$

Тут  $\zeta$  та  $\zeta a^{-3}$  — об'ємна доля включень і їх кількість в одиниці об'єму;  $V$  та  $\zeta_0$  — об'єм включення та їх загальний об'єм в одиниці об'єму композиту;  $f_p^*$  — усереднене значення приведеної амплітуди розсіяння поздовжньої хвилі поодиноким включенням «вперед». Для впорядковано орієнтованих наповнювачів справедливе співвідношення

$$f_p^* = f_p(\theta_{in}), \quad (11)$$

а для випадково орієнтованих —  $f_p^*$  дорівнює усередненому значенню амплітуди розсіяння за всіх можливих їх орієнтацій

$$f_p^* = \frac{1}{2} \int_0^\pi f_p(\theta_{in}) \sin \theta_{in} d\theta_{in} = \frac{1}{3} (\kappa_* - 1) \left[ \kappa_*^{-1} (4\xi^2 - 3) - 2 \right] + \frac{4}{15} \xi^2 (\eta - 1) \left[ \kappa_*^{-1} (5 - 8\xi^2) - 2\eta^{-1} - 1 \right] + \frac{\rho_0}{\rho} - 1. \quad (12)$$

Таким чином, із співвідношень (9)-(12) визначаємо ефективні фазову швидкість  $c_e(\omega)$  та коефіцієнт загасання  $\alpha(\omega)$  поздовжніх хвиль, що поширюються в композиті

$$c_e = \frac{\omega}{\text{Re}[K_1(\omega)]} \approx c_1 \left( 1 - \frac{1}{2} \zeta_0 f_p^* \right), \quad \alpha(\omega) = \text{Im}[K_1(\omega)] = 0. \quad (13)$$

де  $c_1 = \omega/k_1$  — швидкість поздовжніх хвиль у матриці.

Із виразів (8), (11)-(13) бачимо, що дисперсія та загасання поздовжніх хвиль у композиті з дисковими слабкоконтрастними неоднорідностями практично відсутні. Ефективна швидкість хвиль не залежить від форми (товщини) включень. У разі збільшення загального об'єму мікровключень в одиниці об'єму композиту  $\zeta_0$  відхилення швидкості  $c_e$  від швидкості  $c_1$  зростає.

Зазначимо, що співвідношення (9)-(13), базовані на дисперсійному рівнянні Фолді, придатні для композитів із малою концентрацією наповнювачів, коли можна знехтувати їх взаємодією. Правомірність застосування такого підходу для дослідження матричних композитних структур із випадково розподіленими неоднорідностями досліджено у працях [3, 6].

### 3. Числовий аналіз ефективних швидкостей поздовжніх хвиль

Розглянемо композит, для якого коефіцієнт Пуассона матеріалу матриці  $\nu = 1/3$ ,  $\xi = 0,5$ . На рис. 1 зображено залежності приведених ефективних швидкостей поздовжніх хвиль  $c = \frac{c_e/c_1 - 1}{\zeta_0}$  від параметрів  $\kappa_*$  та  $\eta$ , які характеризують відносну жорсткість складників матричного композиту. Просторова орієнтація пружних мікровключень у ньому — випадкова, тому макроскопічно композитний матеріал — ізотропний. При цьому припускалося, що  $\rho_0 = \frac{\rho \kappa_*}{\eta c}$ ,

$\eta_c = (c_{10}/c_1)^2$  ( $c_{10}$  — швидкість поздовжньої хвилі у включенні).

Із рис. 1 бачимо, що зростання відносної жорсткості наповнювачів композиту призводить до збільшення відхилення швидкості  $c_e$  від швидкості  $c_1$  для жорсткіших включень ( $\kappa_* > 1, \eta > 1$ ) та його зменшення для менш жорстких ( $\kappa_* < 1, \eta < 1$ ). У композиті з відносно жорсткими неоднорідностями (рис. 1а) ефективна швидкість поздовжніх хвиль, зазвичай, більша за  $c_1$ , якщо  $c_{10} > c_1$ , і менша для  $c_{10} < c_1$ . Для відносно м'яких наповнювачів ефективна швидкість  $c_e$  завжди менша за швидкість поздовжніх хвиль у матриці (рис. 1б).

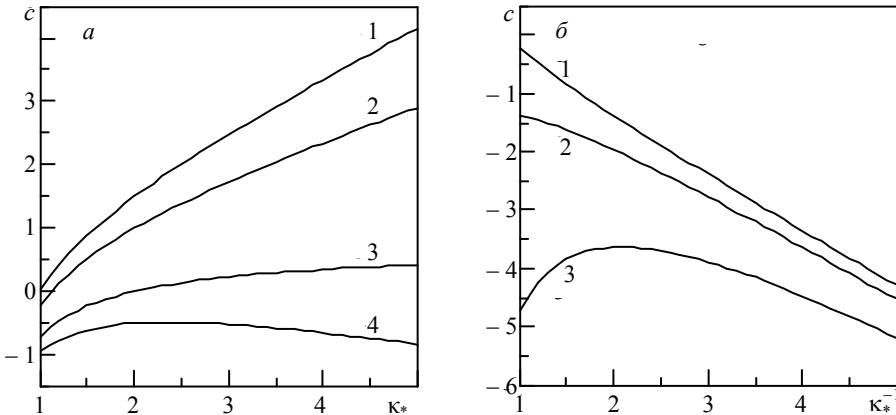


Рис. 1. Залежності приведених швидкостей  $c$  від параметра жорсткості  $\kappa_*$  для хаотично орієнтованих: а — відносно жорстких включень ( $\eta = 5; \eta_c = 2; 1; 0,5; 0,4$  — криві 1-4); б — відносно м'яких включень ( $\eta = 0,2; \eta_c = 1; 0,3; 0,1$  — криві 1-3)

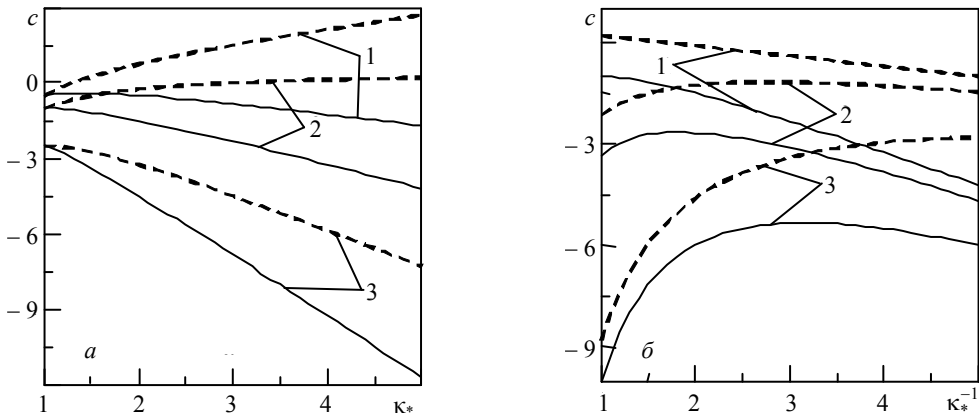


Рис. 2. Залежності приведених швидкостей  $c$  від параметра жорсткості  $\kappa_*$  для впорядковано орієнтованих:  $a$  — відносно жорстких включень ( $\eta = 5; \eta_c = 2; 1; 0,4$  — криві 1-3);  $b$  — відносно м'яких включень ( $\eta = 0,2; \eta_c = 1; 0,3; 0,1$  — криві 1-3). Суцільні та штрихові лінії відповідають значенням  $\theta_{in} = 0$  і  $\theta_{in} = 90^\circ$

На рис. 2 зображено залежності приведених ефективних швидкостей поздовжніх хвиль  $c_e$  для паралельно розміщених дискових наповнювачів. У цьому випадку макроскопічна динамічна поведінка композитного матеріалу — трансверсально ізотропна. Тому ефективна швидкість хвиль залежить від напрямку їх поширення. Нижче розглянуто два напрямки, за яких відсутня взаємодія мод різних хвиль. А саме, нормальне падіння хвилі на включення ( $\theta_{in} = 0$ ) і паралельне ( $\theta_{in} = 90^\circ$ ). Числові розрахунки проводилися для тих же параметрів  $\nu$ ,  $\xi$ ,  $\rho_0$ , що і на рис. 1. Видно, що якісні ефекти впливу механічних властивостей складників композиту на ефективні швидкості  $c_e$  подібні до описаних закономірностей у випадку хаотично орієнтованих наповнювачів. Окрім цього, для  $\theta_{in} = 0$  ефективні швидкості поздовжніх хвиль  $c_e$  менші за  $c_1$  і менші за  $c_e$  у випадку  $\theta_{in} = 90^\circ$  за довільних механічних параметрів складників композитного матеріалу.

**Висновки.** Запропоновано методику визначення ефективних (усереднених) швидкостей поздовжніх хвиль у пружному середовищі з хаотично розміщеними тонкими дисковими пружними наповнювачами слабкої контрастності за впорядкованої або випадкової просторової орієнтації. Вона базується на асимптотично точній моделі динамічної взаємодії тонкої неоднорідності з пружною матрицею та апроксимаційних співвідношеннях Фолді. Цю методику можна поширити на випадок розповсюдження поперечних пружних хвиль у композиті.

Встановлено, що дисперсія та загасання поздовжніх хвиль у композитному матеріалі з дисковими слабоконтрастними наповнювачами за малої їх концентрації практично відсутні. Ефективна швидкість хвиль не залежить від форми (товщини) включень. У разі збільшення загального об'єму мікрровключень в одиниці

об'єму композиту відхилення ефективної швидкості поздовжніх хвиль від швидкості поздовжніх хвиль у матриці зростає. Зі збільшенням швидкості поздовжніх хвиль у неоднорідностях ефективна швидкість у композиті зростає за довільних жорсткостей його складників і за розглянутих просторових орієнтацій наповнювачів. Для відносно м'яких наповнювачів ефективна швидкість завжди менша за швидкість поздовжніх хвиль у матриці.

*Роботу виконано за спільної підтримки НАН України – НТЦУ (проект № 5726).*

## **Література**

- [1] *Tamuzs V., Romalis N., Petrova V.* Fracture of Solids with Microdefects. — New York: Nova Science Publications Inc., 2000. — 238 p.
- [2] *Хорошун Л. П., Шукла Е. Н.* Деформирование и долговременная повреждаемость однородных и композитных материалов стохастической структуры (обзор) // Прикладная механика. — 2012. — Т. 48, № 1. — С. 12-72.
- [3] *Martin P. A.* Multiple Scattering Interaction of Time-Harmonic Waves with N Obstacles. — Cambridge: Cambridge University Press, 2006. — 437 p.
- [4] *Conoir J. M., Norris A. N.* Effective wave numbers and reflection coefficients for an elastic medium containing random configurations of cylindrical scatterers // Wave Motion. — 2010. — Vol. 47. — P. 183-197.
- [5] *Foldy L. L.* Multiple scattering theory of waves // Physical Review. — 1945. — Vol. 67. — P. 107-119.
- [6] *Eriksson A. S., Boström A., Datta S. K.* Ultrasonic wave propagation through a cracked solid // Wave Motion. — 1995. — Vol. 22. — P. 297-310.
- [7] *Mykhas'kiv V. V.* Numerical Simulation of Wave Propagation in 3D Elastic Composites with Rigid Disk-Shaped Inclusions of Variable Mass, Chapter 2. Composites and Their Applications (edited by N. Hu). — Rijeka (Croatia): InTech Press, 2012. — P. 17-36.
- [8] *Kanaun S. K., Levin V. M.* Self-Consistent Methods for Composites. Volume 2 — Wave Propagation in Heterogeneous Materials. — Heidelberg: Springer, 2008. — 294 p.
- [9] *Смець В. Ф.* Моделювання та інтерпретація даних розсіяння ультразвуку локальними об'єктами. — Львів: Фенікс, 2001. — 254 с.
- [10] *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. — Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. — 716 с.
- [11] *Moiseenok A. P., Popov V. G.* Interaction of plane nonstationary waves with a thin elastic inclusion under smooth contact conditions // Mechanics of Solids. — 2009. — Vol. 44, No 4. — P. 621-631.
- [12] *Емец В. Ф., Кит Г. С., Кунец Я. И.* Асимптотическое поведение решения задачи рассеяния упругой волны тонкостенным инородным включением // Изв. РАН. Мех. твердого тела. — 1999. — № 3. — С. 55-64.
- [13] *Кунец Я. І., Матус В. В., Грилицький М. Д.* Дистанційне визначення механічних параметрів тонких плоских включень низької контрастності // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2011. — Т. 47, № 5. — С. 118-123.
- [14] *Купрадзе В. А.* Методы потенциала в теории упругости. — Москва: Физматгиз. — 1963. — 472 с.



## **Effective velocity of longitudinal wave in elastic medium with distributed disk-shaped inclusions of low contrast**

Viktor Mykhaskiv, Jaroslav Kunets, Valerij Matus

*An algorithm was proposed to study the effective velocity of longitudinal wave propagation in an unbounded isotropic elastic medium with a system of randomly distributed thin penny-shaped elastic inclusions of variable thickness. It is assumed that inclusions of low contrast, namely mechanical parameters of composites components differ unessentially in comparison with little relative thickness of inhomogeneities. The cases of aligned and random orientation of inclusions in the space were studied. The averaged dynamic parameters of such medium were determined using the Foldy dispersive relation during the previous analysis of the problem of elastic waves scattering by the corresponding local scatterer. The influence of the inhomogeneities shape and mechanical properties of longitudinal wave propagation in it was analyzed.*

## **Эффективные скорости продольных волн в упругих средах с распределенными дисковыми включениями слабой контрастности**

Виктор Мыхаськів, Ярослав Кунець, Валерий Матус

*Предложен алгоритм исследования эффективных скоростей распространения продольных волн в неограниченной изотропной упругой среде с массивом случайно распределенных тонких дисковых упругих включений переменной толщины. Предполагается, что включение слабой контрастности, то есть механические параметры составных композита несущественно отличаются между собой в сравнении с малой относительной толщиной неоднородности. Рассмотрены случаи упорядоченной и хаотической ориентации включений в пространстве. Усредненные динамические параметры таких сред определены с помощью дисперсионного соотношения Фолди при предварительном анализе задачи рассеяния упругих волн соответствующим локальным рассеивателем. Проанализировано влияние формы неоднородностей и механических свойств композита на скорость распространения в нем продольных волн.*

Представлено професором М. Сухорольським

Отримано 07.02.13