

Побудова поля швидкостей профілю крила за умови потенціального обтікання з використанням числово-квазіконформних відображень

Валерій Мамчук

Національний авіаційний університет, пр-т космонавта Комарова, 1, Київ-58, 03680,
e-mail: post@nau-edu.kiev.ua

Наведено методику розрахунку поля швидкостей профілю крила за умови обтікання його плоским нестисливим потоком. Вперше, у процесі розгляду зазначеного типу обтікання як складники числово-квазіконформних відображень використані субгармонічні функції. Наведені результати числових експериментів демонструють ефективність запропонованого алгоритму та створеного програмного забезпечення.

Ключові слова: профіль крила, функція течії, еліптичний оператор, ітераційна процедура.

Вступ. У процесі розв'язання низки проблем, що зустрічаються у сучасному конструюванні літальних суден і їх практичній експлуатації, зокрема, таких, як от: обчислення параметрів примежевого шару, розроблення методів боротьби з обледенінням, встановлення електрогазодинамічних характеристик тощо, повстає питання визначення поля швидкостей на певних елементах суден і в областях, що безпосередньо прилягають до них. Тому розрахунок із необхідною точністю поля швидкостей для зазначених складників має теоретичну та практичну цінність.

Головною незручністю під час розв'язування крайових задач математичної фізики є геометрична форма області, в якій потрібно знайти розв'язки задачі. Цю незручність усуває метод автоматичної числової побудови загальної, зв'язаної з тілом, системи криволінійних координат, який дозволяє k -зв'язну ($k \geq 2, k \in \mathbb{N}$) область відобразити на параметричний прямокутник із подальшим розглядом сформульованої задачі у канонічній області.

Теоретичні основи таких відображень із використанням загальних гармонічних, спряжених гармонічних і субгармонічних функцій, як складників відповідних відображень, наведено у працях [1, 2].

Зазвичай, для розрахунку поля швидкостей профілю крила та в областях, що прилягають до нього, використовують рівняння Навьє-Стокса, знаходження розв'язків яких надто складне. За певних режимів польоту літального судна можна використовувати умови потенціального обтікання. Так, цей випадок обтікання реалізується на малих кутах атаки, навіть у випадку обтікання профілю з клиноподібною формою наростаючого льоду. У разі рогоподібної чи змішаної форми

льоду відрив потоку відбувається лише по кромках льоду, з яких сходять вільні лінії течії, що розділяють потенціальну течію від вихрової.

У працях [3, 4] наведені методи розрахунку поля швидкостей профілю, за такого обтікання, де використано гармонічні та спряжені гармонічні функції як складники загальних і чисельно-конформних відображень відповідно, а у цій праці — субгармонічні функції як складники числово-квазіконформних відображень.

1. Вибір системи координат і формулювання задачі

У прямокутній декартовій системі координат (xOy) (рис. 1) розглянемо двозв'язну двовимірну область G , обмежену замкнутим контуром Γ і кусково-гладким замкнутим контуром Γ_1 , внутрішнім щодо Γ й області G .

Контур Γ_1 є профіль, що задається таблично, передня кромка якого у зв'язаній із профілем системі координат співпадає з початком координат, а хорда розміщена на додатному напрямку осі абсцис. Зовнішній контур Γ вибираємо довільним чином, але так, щоб поза ним потік був невимушений. Для практичних числових розрахунків контур Γ , зазвичай, вибирають у вигляді кола з центром у початку координат чи на середині хорди профілю.

Уважатимемо крило літака достатньо довгим циліндричним тілом. Рівняння

$$\rho_{,t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0 \tag{1}$$

є рівнянням нерозривності у змінних Ейлера. Якщо рух стаціонарний, то співвідношення (1) матиме вигляд

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0. \tag{2}$$

У випадку $\rho = \rho_0 = \text{const}$ формула (2) набуде вигляду

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \tag{3}$$

тобто за умови нестисливого потоку розходження вектора швидкостей, або об'ємне розширення частинки, дорівнює нулю.

Рівняння (3) еквівалентне рівнянню

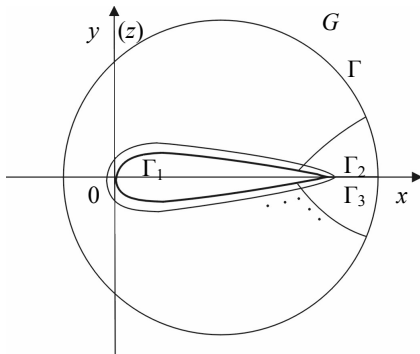


Рис. 1. Фізична площина

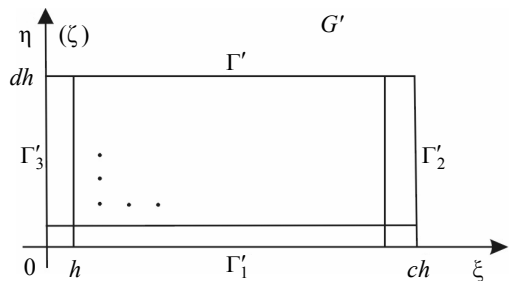


Рис. 2. Перетворена площина

$$V_{1,x} + V_{2,y} = 0,$$

де V_1, V_2 — компонента вектора швидкості \mathbf{V} .

За умови потенціального руху функція течії ψ задовольняє рівняння Лапласа

$$\psi_{,xx} + \psi_{,yy} = 0, \quad (4)$$

а

$$V_1 = \psi_{,y}, \quad V_2 = -\psi_{,x}. \quad (5)$$

На криловому профілі значення функції течії дорівнює нулю

$$\psi = 0. \quad (6)$$

На зовнішній границі Γ області значення функції течії визначається так

$$\psi = V_\infty (y \cos \alpha_1 - x \sin \alpha_1). \quad (7)$$

Тут V_∞ — швидкість незбуреного потоку, α_1 — кут атаки.

Запишемо рівняння (3) у безрозмірній формі. При цьому лінійні розміри віднесемо до довжини хорди b , значення функції течії — до швидкості незбуреного потоку V_∞ .

Отже,

$$\bar{x} = \frac{x}{b}, \quad \bar{y} = \frac{y}{b} \quad \text{і} \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{V_\infty}.$$

Рівняння (3) набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} = 0.$$

Опустивши для зручності риси, запишемо

$$\psi_{,xx} + \psi_{,yy} = 0.$$

Розглянемо горизонтальний політ літака. Якщо $\alpha_1 = 0$, а відповідно і $C_y = 0$ (коефіцієнт підйомної сили), то співвідношення (7) набуде вигляду

$$\psi = y. \quad (8)$$

Для побудови поля швидкостей на профілі та в областях, що прилягають до нього, потрібно розв'язати крайову задачу, що визначається рівнянням (4) та граничними умовами (6), (8), із використанням числових методів. Результатом розв'язання крайової задачі є числові значення функції течії у точках задання профілю, внутрішніх вузлах області фізичної площини. Відповідно до співвідношення (5), продиференціювавши одержані значення, отримаємо компоненти вектора швидкості. Обчисливши модуль цього вектора, побудуємо потрібне поле швидкостей.

2. Відображення двозв'язної двовимірної області на параметричний прямокутник

Щоб відобразити двозв'язну двовимірну область G (рис. 1) на область G' параметричного прямокутника (рис. 2), у внутрішніх вузлах якої будемо знаходити розв'язки крайової задачі, потрібно побудувати відображаючі функції

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad (9)$$

які визначають лінії рівня відображення на прямокутник $0 \leq \xi \leq ch$, $0 \leq \eta \leq dh$ у перетвореній площині.

Розглянемо випадок поточкового задання меж двозв'язної області G з «вільним» розрізом і фіксованими кінцями.

Відповідність відображення прямокутника G' на фізичну область G задамо точками на контурах Γ_1 , Γ відповідно

$$x(nh, 0) = x_{n0}, \quad y(nh, 0) = y_{n0}, \quad x(nh, dh) = x_{nd}, \quad y(nh, dh) = y_{nd}, \quad n = \overline{0, c}. \quad (10)$$

Умови періодичності на «вільному» розрізі, що відповідають рівності на кінцях розрізу функцій та їх похідних відповідного порядку, запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} x(0, mh) &= x(ch, mh), & y(0, mh) &= y(ch, mh), \\ x(h, mh) &= x((c+1)h, mh), & y(h, mh) &= y((c+1)h, mh), \end{aligned} \quad m = \overline{0, d}. \quad (11)$$

Вузли (ξ_n, η_m) визначаємо таким чином

$$\xi_n = nh, \quad n = \overline{0, c}; \quad \eta_m = mh, \quad m = \overline{0, d},$$

де c, d , як і в співвідношеннях (9)-(11), — кількість поділок на сторонах прямокутника (відповідно на ξ та η), що визначають його модуль: $M_{\text{пр}} = c/d$. Якщо на тілі розміщено c точок, то кількість вузлів на прямокутнику визначаємо так $(c+1)(d+1)$.

Відображення (9) вибираємо так, щоб воно задовольняло одну із систем еліптичного типу залежно від типу функцій, що породжують його. Якщо згадані функції є гармонічні чи спряжені гармонічні функції, то таке відображення утворює «рівномірну» сітку криволінійних координат в області G . У разі необхідності регулювання побудовою розрахункової сітки у фізичній площині можна використовувати субгармонічні функції.

Для керування процесом побудови системи криволінійних координат використовуємо систему рівнянь [5]

$$\eta_{,y} = P_1 \xi_{,x}, \quad -\eta_{,x} = P_1 \xi_{,y} \quad (12)$$

із граничними умовами Діріхле: $\eta = \eta_0 = \text{const}$ на Γ , $\eta = \eta_1 = \text{const}$ на Γ_1 ; $\xi(x, y)$ — багатозначна функція з гілкою $\xi(x, y)$, значення якої задаються вздовж координати ξ прямокутника на контурах Γ, Γ_1 .

Розв'язки системи (12) утворюють квазіконформне, квазілінійне відображення типу

$$\zeta(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$$

з другою парою характеристик $P_1 > 1$, $\Theta_1 = \pi/2$. У цьому випадку функції $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$, у малому, відображають кола в еліпси з характеристиками P_1 і Θ_1 .

Для регулярного відображення (9) з якобіаном $J > 0$ існує обернене відображення

$$z(\zeta) = x(\xi, \eta) + iy(\xi, \eta), \quad (13)$$

де функції $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ — розв'язки відповідних систем рівнянь. Оскільки у процесі числової реалізації відображення вихідними змінними є ξ , η , то потрібно перейти до цих координат.

Відповідно до роботи [5], система

$$x_{,\xi} = Py_{,\eta}, \quad x_{,\eta} = -\frac{1}{P}y_{,\xi}, \quad (14)$$

враховуючи заміну P_1 на P , дає можливість розраховувати криволінійні координати у канонічній області.

Система (14) породжує квазіконформне відображення, у якому вибір еліпсів у перетвореній площині, у випадку їх переходу в кола фізичної площини, забезпечує задання характеристик $P = P(\xi, \eta)$. Характеристика Θ залишається при цьому сталою.

Якщо характеристика квазіконформного відображення P залежить лише від ξ , то керуватимемо системою криволінійних координат по ξ . Якщо $P = P(\eta)$, то по η , а якщо $P = P(\xi, \eta)$, то по ξ , η .

Оскільки під час розрахунку параметрів профілю частіше доводиться згущувати лінії рівня по координаті η , то нехай $P = P(\eta)$. Тоді система (14) зводиться до системи двох автономних рівнянь щодо змінних x та y .

Система

$$x_{,\xi\xi} + P^2x_{,\eta\eta} + PP_{,\eta}x_{,\eta} = 0, \quad y_{,\xi\xi} + P^2y_{,\eta\eta} + PP_{,\eta}y_{,\eta} = 0 \quad (15)$$

є обернена до системи (12) із такими перетвореними граничними умовами:

$$x = f_0(\xi, \eta_0) \text{ на } \Gamma', \quad x = f_1(\xi, \eta_1) \text{ на } \Gamma'_1, \quad y = \phi_1(\xi, \eta_1) \text{ на } \Gamma'_1. \quad (16)$$

Розв'язки системи (15) утворюють відображення (13). За такого відображення крива Γ переходить на верхню границю Γ' перетвореної площини, а Γ_1 відображається на нижню границю перетвореної площини Γ'_1 . Ліва та права границі прямокутної області перетвореної площини в фізичній площині збігаються. Крива, що відображається в ці границі, визначає розріз багатозначної функції $\xi = \xi(x, y)$. Вона з'єднує зовнішній Γ та внутрішній Γ_1 контури. Задачу розрахунку

внутрішніх вузлів можна тлумачити як різницевий аналог задачі про знаходження функцій $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$, що забезпечують однолистне відображення на фізичну розрахункову область G деякої параметричної області G' площини $(\xi O \eta)$. У такому формулюванні однолистне відображення існує. Справді, розглянемо допоміжне відображення $x(p, q)$, $y(p, q)$ на задану область деякого прямокутника $0 \leq p \leq p^*$, $0 \leq q \leq q^*$, за якого чотирьом його кутам відповідають чотири кути G , що можливо лише за певного відношення p^*/q^* . З інваріантності системи рівнянь (2), наведеної у роботі [8], щодо відображення $\xi(p, q)$, $\eta(p, q)$ прямокутника $\{0 \leq p \leq p^*, 0 \leq q \leq q^*\}$ на параметричну область G' випливає, що існує однолистне відображення $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$, яке задовольняє систему рівнянь (5) із праці [8]. Однолистність функцій $\xi(p, q)$, $\eta(p, q)$ доводимо з використанням гармонічності співвідношення $(\xi_p \eta_q - \xi_q \eta_p)(\xi_p^2 + \eta_p^2)$.

Знаходження чисельних розв'язків системи (15), як координат відповідних вузлів фізичної площини, будемо проводити на параметричному прямокутнику точковим методом верхньої релаксації. Для цього кожне з рівнянь слід подати у вигляді, зручному щодо реалізації цієї ітераційної процедури. Зокрема, друге рівняння системи (15) запишемо

$$(k_1 y_\xi)_\xi + (k_2 y_\eta)_\eta = 0,$$

де $k_1 = k_1(\xi, \eta)$, $k_2 = k_2(\xi, \eta)$ — невідомі функції, які потрібно знайти.

Згідно з роботою [5], $k_1 = 1/P$, $k_2 = P$ та система (15) набуває вигляду

$$\left(\frac{1}{P} x_\xi\right)_\xi + (P x_\eta)_\eta = 0, \quad \left(\frac{1}{P} y_\xi\right)_\xi + (P y_\eta)_\eta = 0. \quad (17)$$

Стосовно системи рівнянь (17) точковий метод верхньої релаксації, за упорядкування невідомих за рядками сітки, відповідно до праці [6], описується формулою

$$S_{n,m} y_{n+1,m}^{(i+1)} = (1 - \omega) S_{n,m} y_{n,m}^{(i)} + \omega \left(\frac{k_{1n,m}}{h^2} y_{n-1,m}^{(i+1)} + \frac{k_{2n,m}}{h^2} y_{n,m-1}^{(i+1)} + \frac{k_{1n+1,m}}{h^2} y_{n+1,m}^{(i)} + \frac{k_{2n,m+1}}{h^2} y_{n,m+1}^{(i)} \right). \quad (18)$$

Тут $S_{n,m} = (k_{1n,m} + k_{1n+1,m} + k_{2n,m} + k_{2n,m+1})/h^2$, i — номер ітерації, ω — дійсний релаксаційний параметр. Невідому x , відповідно до описаного точкового методу, знаходимо аналогічно.

Рівняння системи (17) інваріантні щодо розтягу змінних ξ, η , то ж під час числової реалізації ітераційної процедури покладемо $h = 1$.

Швидкість збіжності обчислювальної процедури залежить від вибору початкових наближень функцій $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$. Їх у $c(d-1)$ вузлах сітки задаємо залежностями

$$x_{n,m} = x_{n,0} + \frac{(x_{n,d} - x_{n,0})m}{d}, \quad y_{n,m} = y_{n,0} + \frac{(y_{n,d} - y_{n,0})m}{d}.$$

3. Рівняння течії щодо перетвореної площини.

Ітераційні процедури його розв'язування

У праці [4] показано, що у разі застосування як складників загального відображення довільних розв'язків рівняння Лапласа рівняння течії (4) у перетвореній площині набуває вигляду

$$\alpha \psi_{,\xi\xi} - 2\beta \psi_{,\xi\eta} + \gamma \psi_{,\eta\eta} = 0, \quad (19)$$

де $\alpha = x_{,\eta}^2 + y_{,\eta}^2$, $\beta = x_{,\xi}x_{,\eta} + y_{,\xi}y_{,\eta}$, $\gamma = x_{,\xi}^2 + y_{,\xi}^2$.

Враховуючи квазіконформність відображення, в якому складниками є субгармонічні функції, що задовольняють співвідношення (12) і (14), маємо

$$\alpha = x_{,\eta}^2 + \frac{x_{,\xi}^2}{P^2}, \quad \beta = Px_{,\eta}y_{,\eta} - Px_{,\eta}y_{,\eta} \quad \text{і} \quad \beta = 0, \quad \gamma = x_{,\xi}^2 + P^2x_{,\eta}^2.$$

При цьому рівняння (19) запишемо так

$$\psi_{,\xi\xi} + P^2\psi_{,\eta\eta} = 0. \quad (20)$$

Рівняння (20) подамо у вигляді, зручному для розв'язування його ітераційною точковою процедурою верхньої релаксації, а саме,

$$(k_1\psi_{,\xi})_{,\xi} + (k_2\psi_{,\eta})_{,\eta} = 0. \quad (21)$$

Завжди можна знайти таку функцію $\lambda = \lambda(\eta)$, що рівняння

$$\lambda(\psi_{,\xi\xi} + P^2\psi_{,\eta\eta}) = 0 \quad (22)$$

набуває вигляду (21).

Запишемо рівняння (21) у вигляді

$$k_{1,\xi}\psi_{,\xi} + k_1\psi_{,\xi\xi} + k_{2,\eta}\psi_{,\eta} + k_2\psi_{,\eta\eta} = 0. \quad (23)$$

Прирівняємо відповідні доданки у рівняннях (22) та (23)

$$k_{1,\xi} = 0, \quad k_1 = \lambda, \quad k_{2,\eta} = 0, \quad k_2 = \lambda P^2. \quad (24)$$

З останніх двох рівнянь системи (24) маємо

$$(\lambda P^2)_{,\eta} = 0 \quad \text{або} \quad \lambda_{,\eta} P^2 + 2\lambda P P_{,\eta} = 0.$$

Звідси $\lambda_{,\eta} P^2 = -2\lambda P P_{,\eta}$, $\lambda_{,\eta} = -2\lambda P_{,\eta}/P$ (бо $P \neq 0$). Оскільки $\lambda = \lambda(\eta)$, $P = P(\eta)$, то

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = -2 \frac{P_{,\eta}}{P} d\eta \quad \text{і} \quad \lambda = \exp\left(-2 \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{P_{,\eta}}{P} d\eta\right) = \exp\left(-2 \ln|P| \Big|_{\eta_0}^{\eta}\right) = P^{-2}.$$

Отже, $k_1 = 1/P^2$ і $k_2 = 1$. Тоді рівняння (21) набуває вигляду

$$\left(\frac{1}{P^2} \Psi_{,\xi}\right)_{,\xi} + \Psi_{,\eta\eta} = 0.$$

Для розв'язування рівняння (20) числовими методами використовувалася прискорена ітераційна процедура послідовних змишень, згідно якої

$$\Psi_{n,m}^{(i+1)} = \Psi_{n,m}^{(i)} + \frac{\omega}{2(1 + \hat{P}_{n,m}^{2(i)})} Q_{n,m}^{(i)}, \quad (25)$$

де $Q_{n,m}^{(i)} = (\hat{\psi}_{,\xi\xi} + \hat{P}^2 \hat{\psi}_{,\eta\eta})_{n,m}^{(i)}$, i — номер ітерації, ω — дійсний параметр. Умови збіжності ітераційної процедури (25) наведено у праці [7].

Розв'язування рівняння (4) з граничними умовами (6), (7) з одночасною побудовою розрахункової сітки області фізичної площини, зазначеним методом зводимо до розв'язування на канонічному прямокутнику системи рівнянь

$$\Psi_{\xi\xi} + P^2 \Psi_{\eta\eta} = 0, \quad x_{\xi\xi} + P^2 x_{\eta\eta} + P P_{,\eta} x_{,\eta} = 0, \quad y_{\xi\xi} + P^2 y_{\eta\eta} + P P_{,\eta} y_{,\eta} = 0 \quad (26)$$

з граничними умовами (6), (8) і (16).

4. Подання крайових задач та ітераційних процедур різницевиими співвідношеннями

Ураховуючи своєрідність області, що відображається, з метою раціонального складання програми диференційні оператори, що входять у рівняння (26), і наведені ітераційні процедури замінюємо такими різницевиими операторами

$$\begin{aligned} x_{,\xi} &\approx [\hat{x}_{,\xi}]_{0,0} = \frac{x_{1,0} - x_{c-1,0}}{2h}, & x_{,\eta} &\approx [\hat{x}_{,\eta}]_{0,0} = \frac{x_{0,2} + 4x_{0,1} - 3x_{0,0}}{2h}, \\ x_{,\xi} &\approx [\hat{x}_{,\xi}]_{0,d} = \frac{x_{1,d} - x_{c-1,d}}{2h}, & x_{,\eta} &\approx [\hat{x}_{,\eta}]_{0,d} = \frac{x_{0,d} - 4x_{0,d-1} + x_{0,d-2}}{2h}, \\ x_{,\xi} &\approx [\hat{x}_{,\xi}]_{0,m} = \frac{x_{1,m} - x_{c-1,m}}{2h}, & x_{,\eta} &\approx [\hat{x}_{,\eta}]_{0,m} = \frac{x_{0,m+1} - x_{0,m-1}}{2h}, \\ x_{,\xi\eta} &\approx [\hat{x}_{,\xi\eta}]_{0,m} = \frac{x_{1,m+1} - x_{c-1,m+1} + x_{c-1,m-1} - x_{1,m-1}}{4h^2}, \\ x_{,\xi\xi} &\approx [\hat{x}_{,\xi\xi}]_{0,m} = \frac{x_{1,m} - 2x_{0,m} + x_{c-1,m}}{h^2}, & x_{,\eta\eta} &\approx [\hat{x}_{,\eta\eta}]_{0,m} = \frac{x_{0,m+1} - 2x_{0,m} + x_{0,m-1}}{h^2}, \end{aligned}$$

якщо $m = \overline{1, d-1}$;

$$\begin{aligned}
 x_{,\xi} &\approx [\hat{x}_{,\xi}]_{n,m} = \frac{x_{n+1,m} - x_{n-1,m}}{2h}, & x_{,\eta} &\approx [\hat{x}_{,\eta}]_{n,m} = \frac{x_{n,m+1} - x_{n,m-1}}{2h}, \\
 x_{,\xi\xi} &\approx [\hat{x}_{,\xi\xi}]_{n,m} = \frac{x_{n+1,m} - 2x_{n,m} + x_{n-1,m}}{h^2}, \\
 x_{,\xi\eta} &\approx [\hat{x}_{,\xi\eta}]_{n,m} = \frac{x_{n+1,m+1} - x_{n-1,m+1} + x_{n-1,m-1} - x_{n+1,m-1}}{4h^2}, \\
 x_{,\eta\eta} &\approx [\hat{x}_{,\eta\eta}]_{n,m} = \frac{x_{n,m+1} - 2x_{n,m} + x_{n,m-1}}{h^2},
 \end{aligned} \tag{27}$$

якщо $n = \overline{1, c-1}$; $m = \overline{1, d-1}$;

$$x_{,\xi} \approx [\hat{x}_{,\xi}]_{n,0} = \frac{x_{n+1,0} - x_{n-1,0}}{2h}, \quad x_{,\eta} \approx [\hat{x}_{,\eta}]_{n,0} = \frac{-x_{n,2} + 4x_{n,1} - 3x_{n,0}}{2h},$$

якщо $n = \overline{1, c-1}$;

$$x_{,\xi} \approx [\hat{x}_{,\xi}]_{n,d} = \frac{x_{n+1,d} - x_{n-1,d}}{2h}, \quad x_{,\eta} \approx [\hat{x}_{,\eta}]_{n,d} = \frac{3x_{n,d} - 4x_{n,d-1} + x_{n,d-2}}{2h},$$

якщо $n = \overline{1, c-1}$.

Відповідно до роботи [8], якщо c, d — кількість поділок суміжних сторін прямокутника, то на профілі розміщено c точок, а d визначаємо з умови інваріантності модулів областей з урахуванням поправки на субгармонічність складників відображення. Тоді кількість невідомих для x системи (26), з урахуванням періодичності відображення та граничних умов, визначаємо як $c(d-1)$. При цьому, кількість рівнянь буде такою ж. Такі міркування можна провести стосовно невідомих y та ψ .

Розв'язки системи $3c(d-1)$ нелінійних рівнянь із такою ж кількістю невідомих, отриманих із використанням розглянутих ітераційних процедур, дають можливість побудувати розрахункову сітку у фізичній площині й отримати значення функції течії у вузлах отриманої сітки.

Оскільки $\psi = \psi(\xi(x, y), \eta(x, y))$, то

$$\psi_x = \psi_\xi \xi_x + \psi_\eta \eta_x \quad \text{і} \quad \psi_y = \psi_\xi \xi_y + \psi_\eta \eta_y. \tag{28}$$

У праці [3] показано, що

$$\xi_x = y_\eta / J, \quad \xi_y = -x_\eta / J, \quad \eta_x = -y_\xi / J, \quad \eta_y = -x_\xi / J,$$

де $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$.

За врахування цих співвідношень формули (28) набудуть вигляду

$$\psi_x = \frac{y_\eta \psi_\xi - y_\xi \psi_\eta}{J}, \quad \psi_y = \frac{x_\xi \psi_\eta - x_\eta \psi_\xi}{J}. \tag{29}$$

Використаємо тут співвідношення (27) (для невідомих y і ψ співвідношення аналогічні). Обчислимо, компоненти векторів швидкості, що у формулі (5),

а відповідно до співвідношення (29), визначивши модулі векторів, знайдемо значення швидкості у розрахункових вузлах області фізичної площини.

За розглянутого типу обтікання розподіл тиску визначаємо за формулою

$$p_1^2 = 1 - V^2.$$

Для числової реалізації обчислювального процесу складено програму, яка дає можливість автоматично побудувати загальну систему криволінійних координат, зв'язану з тілами довільної форми, та розв'язувати на параметричному прямокутнику крайові задачі у випадку двозв'язної двовимірної області. Передбачено перехід до використання гармонічних, спряжених гармонічних і субгармонічних функцій як складників відповідних відображень.

5. Числові результати

5.1. Приклад 1. Проведені розрахунки параметрів обтікання прямого кругового циліндра, оскільки гідроаеродинамічні характеристики його достатньо вивчені й обчислюються аналітично. Із цією метою розглянуто кільце, обмежене колами з центрами у початку координат і радіусами: $r = 1$ для внутрішньої межі Γ_1 , $R = 10r$ для зовнішньої — Γ . На обох колах розмішувалося по 60 точок, тобто, $c = 60$. У разі відображення області кільця з розрізом (розріз співпадає з відрізком $x \in [1; 10]$) на прямокутник, конформними інваріантами відповідних областей є їх модулі. Для існування такого відображення та його єдиності потрібно встановити зв'язок між модулями областей. Модуль прямокутника є $M_{\text{пр}} = c/d$, а модуль області кільця з радіусами r та R ($r < R$) буде $M_{\text{к}} = \ln(R/r)$. За виконання рівності

$$\frac{2\pi}{\ln(R/r)} = \frac{c}{d} \quad (30)$$

конформне відображення існує.

З урахуванням співвідношення (30) і впливу функції $P = P(\eta)$ на значення модуля області приймали $d = 29$, якщо $P = \exp[1/(2\eta + 0,5)]$, де $\eta = \overline{0, d}$, і на параметричному прямокутнику розглядали 61×30 вузлів. Для досягнення точності $\varepsilon = 10^{-5}$ на ПЕОМ із процесором Pentium-100 було виконано $p_1 = 94$ ітерацій, процесорний час $t = 3$ с.

У таблиці наведені результати розрахунку поля швидкості на прямому круговому циліндрі одиничного радіуса, де x, y — координати точок, що лежать на границі Γ_1 , а $\overline{V}_0, \overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3$ — відносні швидкості потоку, обчислені, відповідно, аналітично, з використанням загальних, конформних і квазіконформних числових відображень.

Занесені у таблицю результати, отримані з використанням різних типів числових відображень, ілюструють їх добре співставлення з результатами, обчисленими за аналітичними формулами.

Таблиця

Розподіл швидкостей на циліндрі одиничного радіуса

x	y	\bar{V}_0	\bar{V}_1	\bar{V}_2	\bar{V}_3
0,0000	1,0000	2,0000	2,0248	2,0041	2,0020
0,0990	0,9951	1,9902	2,0146	1,9958	1,9921
0,2000	0,9798	1,9596	1,9828	1,9685	1,9616
0,3030	0,9530	1,9060	1,9291	1,9195	1,9089
0,4020	0,9156	1,8312	1,8525	1,8458	1,8340
0,4970	0,8678	1,7356	1,7577	1,7528	1,7399
0,5830	0,8125	1,6250	1,6429	1,6391	1,6299
0,6650	0,7468	1,4936	1,5074	1,5075	1,4973
0,7480	0,6637	1,3274	1,3507	1,3525	1,3314
0,8050	0,5933	1,1866	1,1930	1,1908	1,1883
0,8650	0,5018	1,0036	1,0126	1,0164	1,0066
0,9130	0,4080	0,8160	0,8178	0,8209	0,8176
0,9540	0,2998	0,5996	0,6031	0,6299	0,6014
0,9850	0,1726	0,3452	0,3737	0,4187	0,3521
0,9970	0,0775	0,1550	0,1749	0,2075	0,1612
1,0000	0,0000	0,0000	0,0021	0,0010	0,0015

5.2. Приклад 2. Отримано результати числових експериментів обчислення параметрів обтікання профілю. Зовнішній контур вибирали у вигляді кола з центром у початку координат чи на середині хорди профілю, довжиною b , радіусом $R = 10b$. Якщо $P = \exp[2(\eta_{\max} - m)/\eta_{\max}]$, де $\eta_{\max} = d$, $m = \overline{0, \bar{d}}$, то лінії згущуються в околі внутрішньої межі області фізичної площини. Зокрема, на симетричному профілі з відносною товщиною профілю у головному перерізі $\bar{c}_1 = 10\%$ розміщувалося 60 точок ($c = 60$). Знайдено, з урахуванням модуля області, що $d = 54$ (у випадку використання спряжених гармонічних функцій $d = 26$). На розрахунковому параметричному прямокутнику обчислення проводилися з 61×55 кількістю вузлів, $\epsilon = 10^{-5}$. У разі використання поєднаних ітераційних процедур (18) і (25) кількість ітерацій $p_1 = 156$, а процесорний час $t = 4$ с.

На рис. 3 зображені епюри розподілу тиску на профілі: криву 1 побудовано за експериментальними даним, взятими з роботи [9], криву 2 — на основі числових розрахунків, отриманих із використанням загальних числових відображень, криву 3 — з використанням числово-квазіконформних відображень.

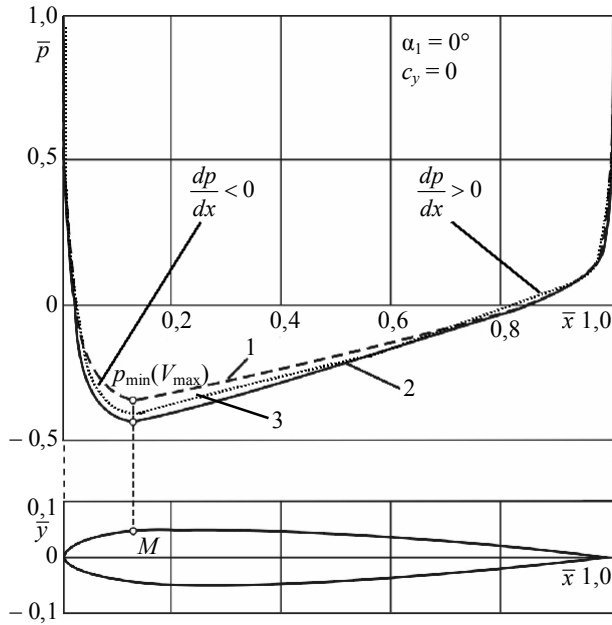


Рис. 3. Епюри розподілу тиску на профілі

Висновки. 1. Розв’язування крайових задач математичної фізики з використанням методу автоматичної числової побудови загальної системи криволінійних координат, зв’язаної з тілом, де складниками числово-квазіконформних відображень є субгармонічні функції, має перевагу, бо:

- вибір належним чином функції $P(\xi, \eta)$, які визначають субгармонічність відображуючих функцій, дозволяє ефективно керувати згущенням розрахункових сіток у певних підобластях областей фізичної площини. Це надає можливість точніше врахувати вплив геометричної конфігурації внутрішніх контурів на якість обчислювальних процедур;
- точки на внутрішніх границях області фізичної площини, що відображаються на сторони добре упорядкованих прямокутників, розміщуються бажаним чином і, не зважаючи на збільшення кількості рівнянь, перевагою є те, що розв’язувати крайові задачі доводиться у прямокутній області.

2. Результати, отримані у процесі числових розрахунків параметрів обтікання різних профілів, свідчать про їх узгодженість із результатами, отриманими з використанням інших методів та експериментальними дослідженнями.

Література

[1] Numerical Solutions for Viscous and Potential Flow about Arbitrary Two-Dimensional Bodies Using Body-Fitted Coordinate — Systems / F. C. Thames, J. F. Thompson, C. W. Mastin, R. L. Walker // J. Computational Phys. — 1977. — Vol. 24. — P. 245-273.

- [2] Михальчук В. Г., Власюк А. П. Застосування конформних і квазіконформних відображень до чисельної автоматичної побудови різницевих сіток // Вибрані питання математичного аналізу, алгебри і геометрії: Збірник наукових праць. — Львів-Рівне: РДП, 1991. — С. 39-48.
- [3] Мамчук В. І. Використання гармонічних функцій при числовій побудові криволінійних координат для розрахунку обтікання профілів // Вісник НАУ. — 2001. — № 2(9). — С. 102-108.
- [4] Мамчук Вал. І. Розрахунок поля швидкостей профілю крила при обтіканні його плоским нестисливим потоком з використанням чисельно-конформних відображень // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2002. — № 5(25). — С. 78-84.
- [5] Мамчук В. І. Застосування чисельно-квазіконформних відображень до автоматичної побудови загальної системи криволінійних координат // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2001. — № 1(15). — С. 124-129.
- [6] Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. — Москва: Наука, 1978. — 476 с.
- [7] Мамчук Вал. Умови збіжності ітераційного процесу, породженого диференціальним рівнянням еліптичного типу із змінними коефіцієнтами // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 2003. — Вип. 7. — С. 58-64.
- [8] Мамчук Вал. І. До побудови системи криволінійних координат з використанням чисельно-конформних відображень // Прикладна гідромеханіка. — 2000. — Т. 2(74), № 3. — С. 110-114.
- [9] Мельников А. П. Основы прикладной аэродинамики. — Ленинград: ЛКВВИА, 1959. — 581 с.

Construction of the field of speeds of a wing profile at its potential flowing round with the use of numerically-quasiconformal mapping

Valery Mamchuk

The methodology of calculation of the wing profile speed field in case of it's flowing round by incompressible flow is demonstrated. For the first time during the process of consideration of the mentioned type of flowing round, the subharmonic functions are used as numerical quasiconformal mapping components. Obtained results of the numerical experiments demonstrate the efficiency of the proposed algorithm and created program software.

Построение поля скоростей профиля крыла при потенциальном обтекании с использованием чисельно-квазиконформных отображений

Валерий Мамчук

Предложена методика расчета поля скоростей профиля крыла при обтекании его плоским несжимаемым потоком. Впервые, при рассмотрении этого типа обтекания, в качестве составных численно-квазиконформных отображений использованы субгармонические функции. Приведенные результаты численных экспериментов демонстрируют эффективность предложенного алгоритма и созданного программного обеспечения.

Представлено професором Я. Савулою

Отримано 25.03.10