

## Дослідження температурних режимів у термочутливій пластині з чужорідним наскрізним включенням

Василь Гавриш

К. ф.-м. н., доцент, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів,  
e-mail: ikni.pz@gmail.com

*Розглянуто нелінійну крайову задачу теплопровідності для ізотропної термочутливої безмежної пластини з теплоізованими лицевими поверхнями, що містить чужорідне наскрізне теплоактивне включення. За допомогою запровадженої функції виконано часткову лінеаризацію вихідної нелінійної крайової задачі. Після кусково-лінійної апроксимації температури на межових поверхнях чужорідного включення задачу повністю лінеаризовано, аналітично-числовий розв'язок якої знайдено з використанням інтегрального перетворення Фур'є. Наведено розрахункові формули для обчислення розподілу температури в розглянутій структурі та виконано числовий аналіз, де матеріалом пластини та включення є кераміка ВК94-І та срібло відповідно.*

**Ключові слова:** ізотропна термочутлива безмежна пластина з теплоізованими лицевими поверхнями, температурне поле, теплопровідність, чужорідне наскрізне теплоактивне включення, ідеальний тепловий контакт.

**Вступ.** Процеси теплообміну та пов'язаного з ним масообміну мають велике значення для інтенсифікації теплоенергетичних, енерготехнологічних і хіміко-технологічних процесів у промисловості з високою ефективністю. Від них залежить температурний режим навколишнього середовища та житлових приміщень, вони визначають здійснення робочого процесу у різних технологічних установках тощо. Тому теорія теплообміну інтенсивно розвивалась, особливо в останні десятиріччя у зв'язку з потребами теплоенергетики, атомної енергетики, космонавтики та деяких інших областей техніки. Зараз розробляються способи теплового захисту високошвидкісних літальних установок, зокрема космічних багатозадач, в активних зонах реакторів, у магнітогідродинамічних генераторах (установках для прямого перетворення теплоти в електричну енергію), у газотурбінних установках. Для техніки низьких температур досліджуються процеси теплообміну, зокрема в установках із використанням ефекту надпровідності, наприклад, у магнітах, які створюють значні поля. Продовжуються роботи зі створення криохірургічних інструментів, які використовують для операцій зі швидким заморожуванням окремих ділянок живої тканини. Прогрес у цій області значною мірою пов'язаний із правильною організацією процесів теплообміну як у самому інструменті, так і в тканині. Проводяться роботи зі створення установок для сублімаційного сушіння деяких продуктів харчування, успішне розроблення яких залежить від правильної організації процесів сублімації та десублімації.

Удосконалюються методи дослідження процесів теплообміну на Землі та в її атмосфері, зокрема прогнозування погоди. Запити різних галузей промисловості стимулюють сталий і швидкий розвиток науки процесів теплообміну. Малодослідженими зараз та нерозробленими залишилися математичні моделі теплообміну в складних електронних системах, які б враховували кусково-однорідну структуру конструкційних елементів та їх термочутливість у певних інтервалах температур, що у подальшому впливає на точність розрахунку температурних полів і ефективність методів проектування електронних пристроїв. У роботі [1] розроблено математичну модель квазістаціонарного температурного поля суцільного циліндра обертання із композитного матеріалу з нелінійними крайовими умовами, що враховують залежність теплофізичних характеристик матеріалів від температури. Отримані аналітичні вирази для визначення температурних полів, що дають змогу підібрати склад композитних матеріалів для деталей циліндричного типу з метою збільшення терміну їх експлуатації. Розглядаються одновимірні (плоска, циліндрично-симетрична та сферично-симетрична) нелінійні задачі теплопровідності для заданого потоку тепла в початку координат у вигляді степеневі функції залежно від часу. Температура середовища в початковий момент часу вважається такою, що дорівнює нулеві. Отримано наближені розв'язки розглядуваних задач і проаналізовано їх збіжність [2]. Побудовано аналітичний розв'язок нелінійної задачі теплопровідності на основі інтегрального методу теплового балансу [3]. Із метою підвищення точності розв'язку температурна функція апроксимується поліномами високих степенів. Для визначення коефіцієнтів поліномів запроваджуються додаткові крайові умови, які знаходяться з основного диференціального рівняння та заданих крайових умов із урахуванням при цьому фронту температурного збурення. Показано, що запровадження додаткових крайових умов вже в другому наближенні призводить до значного підвищення точності розв'язку задачі. У праці [4] побудовано аналітично-числовий розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для порожнистої кулі, теплофізичні характеристики матеріалу якої змінюються зі зміною температури. Припускається, що куля має рівномірний розподіл температури й у початковий момент часу починає конвективно обмінюватися теплом із зовнішніми середовищами сталих температур. У частковому випадку отримано розв'язок для суцільної кулі. На основі варіаційного підходу побудовано математичну модель нестационарної нелінійної задачі теплопровідності для двовимірного середовища з тонким включенням. Ця модель дає змогу врахувати малу товщину тонкого включення. Для лінеаризації сформульованої задачі застосовано метод Ньютона-Рафсона. Дискретизацію за часовою змінною подано згідно зі схемою проміжної точки. Варіаційне формулювання задачі наводиться у формі мінімізації функціоналу [5]. Роботи [6-8] стосуються розвитку методів розв'язування стаціонарних нелінійних задач теплопровідності для конструкцій двовимірної кусково-однорідної структури.

## 1. Об'єкт дослідження. Математична модель

Розглянемо ізотропну термочутливу безмежну пластину товщиною  $2\delta$  з теплоізованими лицевими поверхнями  $|z| = \delta$ , в якій міститься чужорідне наскрізне теплоактивне включення з об'ємом  $8hl\delta$ , віднесено до декартової прямокутної

системи координат  $(x, y, z)$  із початком у центрі включення. На поверхнях включення  $L_{\pm} = \{(\pm h, y, z) : |y| \leq l, |z| \leq \delta\}$  виконується ідеальний тепловий контакт, а на межових поверхнях  $K_{\pm} = \{(x, \pm l, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$  пластини задано крайові умови другого роду. В області  $\Omega_0 = \{(x, y, z) : |x| \leq h, |y| \leq l, |z| \leq \delta\}$ , що займає включення, діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла, потужність яких дорівнює  $q_0 = const$  (рис. 1).

**1.1. Частково лінеаризована крайова задача.** Розподіл стаціонарного температурного поля  $t(x, y)$  в розглядуваній системі отримуємо, розв'язавши нелінійне рівняння теплопровідності [9, 10]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(x, t) \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda(x, t) \frac{\partial t}{\partial y} \right) = -q_0 S_-(h - |x|) \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$t|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{|y|=l} = 0, \quad (2)$$

де  $\lambda(x, t) = \lambda_1(t) + (\lambda_0(t) - \lambda_1(t)) S_-(h - |x|)$  — коефіцієнт теплопровідності неоднорідної термочутливої пластини;  $\lambda_1(t), \lambda_0(t)$  — коефіцієнти теплопровідності матеріалів пластини та включення відповідно;  $S_-(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta \geq 0 \\ 0, & \zeta < 0 \end{cases}$  — асиметрична одинична функція [11].

Введемо функцію

$$\theta = \int_0^{t(x, y)} \lambda_1(\zeta) d\zeta + S_-(h - |x|) \int_{t(\pm h, y)}^{t(x, y)} (\lambda_0(\zeta) - \lambda_1(\zeta)) d\zeta, \quad (3)$$

продиференціювавши яку за змінними  $x$  та  $y$ , отримаємо

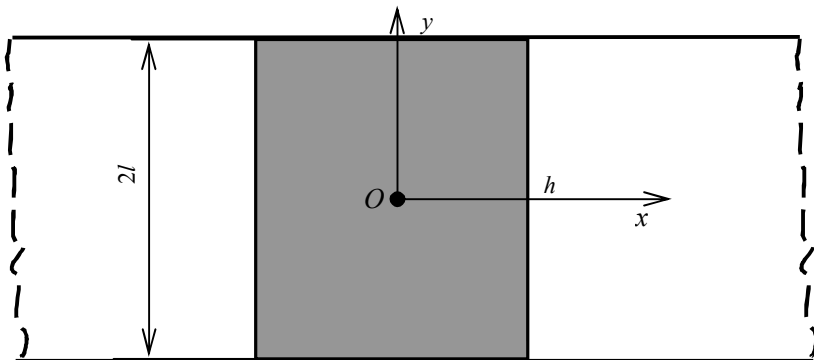


Рис. 1. Переріз ізотропної безмежної термочутливої пластини з чужорідним наскрізним теплоактивним включенням площиною  $z = 0$

$$\lambda(x,t) \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \quad \lambda_1(x,t) \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \left\{ [\lambda_0(t) - \lambda_1(t)] \frac{\partial t}{\partial y} \right\} \Big|_{|x|=h} S_-(h-|x|). \quad (4)$$

З урахуванням виразів (4) вихідне рівняння (1) набуде такого вигляду:

$$\Delta \vartheta + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\lambda_0(t) - \lambda_1(t)) \frac{\partial t}{\partial y} \right] \Big|_{|x|=h} S_-(h-|x|) = -q_0 S_-(h-|x|). \quad (5)$$

Тут  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  — оператор Лапласа в декартовій прямокутній системі координат.

Крайові умови з використанням співвідношення (3) запишуться у вигляді

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \Big|_{|y|=l} = 0, \quad \vartheta \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0. \quad (6)$$

Отже, введена функція  $\vartheta$ , зображена виразом (3), дала змогу звести нелінійну модель (1), (2) процесу теплопровідності до частково лінеаризованого рівняння з розривними коефіцієнтами (5), у той же час крайові умови (2) залишаються лінійними у вигляді (6).

**1.2. Повна лінеаризація рівняння (5).** Апроксимуємо функцію  $t(\pm h, y)$  у вигляді

$$t(\pm h, y) = t_1^\pm + \sum_{j=1}^{n-1} (t_{j+1}^\pm - t_j^\pm) S_-(y - y_j). \quad (7)$$

Тут  $y_j \in ]-l; l[$ ;  $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{n-1}$ ;  $t_j^\pm (j = \overline{1, n})$  — невідомі апроксимаційні значення температури;  $n$  — задана кількість розбиттів інтервалу  $]-l, l[$ .

Підставивши вираз (7) у співвідношення (5), одержимо лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними відносно запровадженої функції  $\vartheta$

$$\Delta \vartheta = - \left[ \sum_{j=1}^{n-1} (t_{j+1}^\pm - t_j^\pm) (\lambda_0(t_{j+1}^\pm) - \lambda_1(t_{j+1}^\pm)) \delta'_-(y - y_j) + q_0 \right] S_-(h-|x|), \quad (8)$$

де  $\delta_-(\zeta) = dS_-(\zeta)/d\zeta$  — асиметрична дельта-функція Дірака [11],  $\delta'_-(\zeta)$  — її похідна.

**1.3. Побудова аналітично-числового розв'язку крайової задачі (8), (6).** Застосувавши інтегральне перетворення Фур'є за координатою  $x$  до рівняння (8) і умов (6), приходимо до звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dy^2} - \xi^2 \bar{\vartheta} = - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \xi h}{\xi} \left[ \sum_{j=1}^{n-1} (t_{j+1}^\pm - t_j^\pm) (\lambda_0(t_{j+1}^\pm) - \lambda_1(t_{j+1}^\pm)) \delta'_-(y - y_j) + q_0 \right] \quad (9)$$

і крайових умов

$$d\bar{\vartheta}/dy \Big|_{|y|=l} = 0, \quad (10)$$

де  $\bar{\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \vartheta dx$  — трансформанта функції  $\vartheta$ ;  $\xi$  — параметр інтегрального перетворення Фур'є.

Загальний розв'язок рівняння (9) дістанемо за методом варіації сталих у вигляді

$$\bar{\vartheta} = c_1 e^{\xi y} + c_2 e^{-\xi y} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\xi h)}{\xi} \left[ \sum_{j=1}^{n-1} (t_{j+1}^{\pm} - t_j^{\pm}) (\lambda_0(t_{j+1}^{\pm}) - \lambda_1(t_{j+1}^{\pm})) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{ch} \xi(y - y_j) S_{-}(y - y_j) - \frac{q_0}{\xi^2} \right].$$

Тут  $c_1, c_2$  — сталі інтегрування.

Використавши крайові умови (10), отримаємо такий частковий розв'язок задачі (9), (10)

$$\bar{\vartheta} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\xi h)}{\xi} \left\langle \sum_{j=1}^{n-1} (t_{j+1}^{\pm} - t_j^{\pm}) (\lambda_0(t_{j+1}^{\pm}) - \lambda_1(t_{j+1}^{\pm})) \times \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{\operatorname{ch}[\xi(y+l)]}{\operatorname{sh}(2\xi l)} \operatorname{sh}[\xi(l - y_j)] - \operatorname{ch}[\xi(y - y_j)] S_{-}(y - y_j) \right\} + \frac{q_0}{\xi^2} \right\rangle. \quad (11)$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (11), знаходимо вираз для функції  $\vartheta$

$$\vartheta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\xi x)}{\xi} \sin(\xi h) \left\langle \sum_{j=1}^{n-1} (t_{j+1}^{\pm} - t_j^{\pm}) (\lambda_0(t_{j+1}^{\pm}) - \lambda_1(t_{j+1}^{\pm})) \times \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{\operatorname{ch}[\xi(y+l)]}{\operatorname{sh}(2\xi l)} \operatorname{sh}[\xi(l - y_j)] - \operatorname{ch}[\xi(y - y_j)] S_{-}(y - y_j) \right\} + \frac{q_0}{\xi^2} \right\rangle d\xi. \quad (12)$$

Підставивши конкретні залежності коефіцієнта теплопровідності матеріалів пластини та включення у співвідношення (3), (12) і зрівнявши отримані вирази функції  $\vartheta$  на поверхнях  $L_{\pm}$ , приходимо до системи нелінійних рівнянь для визначення невідомих апроксимаційних значень температури  $t_j^{\pm} (j = \overline{1, n})$ .

Шукане температурне поле для наведеної системи визначається з нелінійного рівняння, отриманого з використанням співвідношень (3), (12) після підстановки в них конкретних виразів залежності коефіцієнта теплопровідності матеріалів пластини та включення.

**1.4. Приклад лінійної залежності коефіцієнта теплопровідності від температури й аналіз отриманих результатів.** Часто для багатьох практичних задач використовують таку залежність коефіцієнта теплопровідності від температури [12, 13]:

$$\lambda(t) = \lambda^0 (1 - kt), \quad (13)$$

де  $\lambda^0, k$  — опорний і температурний коефіцієнти теплопровідності.

Тоді з використанням виразів (3), (12), отримаємо формули для визначення температури  $t$  в області включення  $\Omega_0$

$$t = \frac{1}{k_0} \left[ 1 - \sqrt{1 - k_0 \left( 2\vartheta / \lambda_0^0 + \vartheta_1 \right)} \right] \quad (14)$$

та в області пластини поза включенням  $\Omega_1 = \{(x, y, z) : |x| > h, |y| \leq l, |z| \leq \delta\}$

$$t = \frac{1}{k_1} \left( 1 - \sqrt{1 - 2k_1 \vartheta / \lambda_1^0} \right), \quad (15)$$

де  $\vartheta_1 = \left\{ t \left[ 2 - k_0 t - (2 - k_1 t) \lambda_1^0 / \lambda_0^0 \right] \right\} \Big|_{|x|=h}$ ,  $t|_{|x|=h} = \frac{1}{k_1} \left( 1 - \sqrt{1 - 2k_1 \vartheta / \lambda_1^0} \Big|_{|x|=h} \right)$ .

Формули (14), (15) повністю описують температурне поле в термочутливій безмежній пластині з чужорідним наскрізним теплоактивним включенням.

Виконано числовий аналіз температури  $t$  для таких вихідних даних: матеріал пластини — кераміка ВК94-І, матеріал включення — срібло,  $n = 10$  — кількість розбиттів інтервалу  $]-l, l[$ ;  $h = l = 1$  мм,  $q_0 = 200$  Вт. У діапазоні температур  $[20^\circ \text{C}, 1230^\circ \text{C}]$  наведені матеріали описуються такими залежностями коефіцієнта теплопровідності від температури

$$\lambda_1(t) = 13,67 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}} \left( 1 - 0,00064 \frac{1}{\text{град}} t \right),$$

$$\lambda_0(t) = 422,54 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}} \left( 1 - 0,00031 \frac{1}{\text{град}} t \right),$$

які є частковим випадком співвідношення (13).

Побудовано (рис. 2) залежність температури  $t$  від координат  $x$  та  $y$ . Зазначимо, що максимальна температура досягається в області дії рівномірно розподілених у наскрізному чужорідному включенні внутрішніх джерел тепла, а на краях  $K_{\pm}$

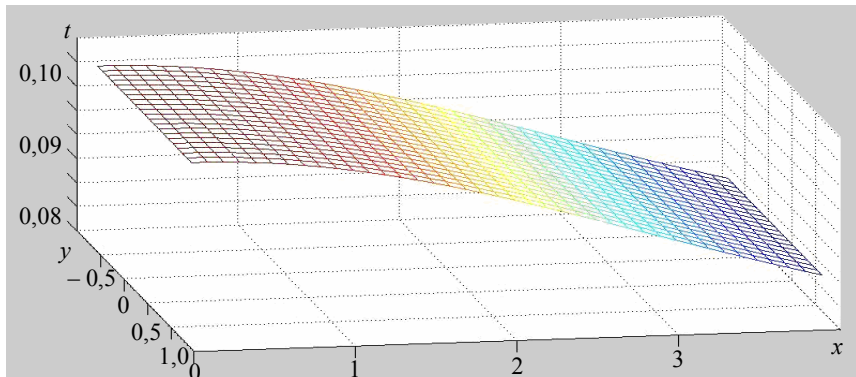


Рис. 2. Залежність температури  $t$  від координат  $x$  та  $y$

$|x| = 1$ ) включення спостерігається виконання умов ідеального теплового контакту (відсутній стрибок температури), що відповідає розглядуваній математичній моделі.

Кількість розбиттів  $n = 10$  інтервалу  $]-l, l[$  для наведених теплофізичних (опорний і температурний коефіцієнти теплопровідності) та геометричних (довжина включення та ширина пластини) параметрів структури дає змогу виконати обчислення з точністю  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

**Висновки.** Введена функція  $\vartheta$ , описана виразом (3), дала змогу частково лінеаризувати вихідне нелінійне рівняння теплопровідності (1), а запропонована кусково-лінійна апроксимація температури виразом (7) на краях  $K_{\pm}$  чужорідного включення — повністю лінеаризувати рівняння (5), тому стало можливим застосувати інтегральне перетворення Фур'є до отриманої крайової лінійної задачі щодо запровадженої функції  $\vartheta$  та побудувати аналітично-числовий розв'язок для її визначення. Розглянуто лінійну залежність коефіцієнта теплопровідності включення та пластини, описану виразом (13). На основі цього наведено розрахункові формули (14), (15) для обчислення розподілу температури  $t(x, y)$  у розглядуваній структурі. Виконано числові розрахунки розподілу температури  $t$  за допомогою формул (14), (15). Числовий аналіз показує, що отримані результати відрізняються від результатів, отриманих на основі лінійної моделі [14], на 7 %.

## Література

- [1] Голицына Е. В., Осипов Ю. Р. Квазистационарная трехмерная задача теплопроводности во вращающемся сплошном цилиндре из композиционного материала с нелинейными граничными условиями // Конструкции из композиционных материалов. — 2007. — № 4. — С. 47-58.
- [2] Кудряшов Н. А., Чмыхов М. А. Приближенные решения первой и второй краевых задач нелинейной теплопроводности на полубесконечной прямой // Инженерная физика. — 2007. — № 3. — С. 12-15.
- [3] Analysis of nonlinear heat conduction based on determining the front of temperature perturbation / V. A. Kudinov, B. V. Averin, E. V. Stefanyuk, S. A. Nazarenko // High Temperature. — 2006. — Vol. 44, No 4. — P. 574-583.
- [4] Попович В. С., Іванків К. С. Нелінійна задача теплопровідності для кулі з теплообміном // Вісник Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. — 2002. — № 5. — С. 136-144.
- [5] Савула Я. Г., Дяконюк Л. М. Дослідження варіаційної задачі теплопровідності у багатошарових середовищах з тонкими включеннями // Вісник ЛНУ ім. І. Франка. Сер. прикл. матем. та інформат. — 2000. — № 3. — С. 125-130.
- [6] Барвінський А. Ф., Гавриш В. І. Нелінійна задача теплопровідності для неоднорідного шару з внутрішніми джерелами тепла // Проблемы машиностроения. — 2009. — Т. 12, № 1. — С. 47-53.
- [7] Гавриш В. І., Федасюк Д. В. Метод розрахунку температурних полів для термочутливої кусково-однорідної смуги із чужорідним включенням // Промышленная теплотехника. — 2010. — Т. 32, № 5. — С. 18-25.
- [8] Гавриш В. І. Моделирование температурных режимов в термочувствительных микроэлектронных устройствах со сквозными инородными включениями // Электронное моделирование. — 2012. — Т. 34, № 4. — С. 99-107.
- [9] [Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. — Москва: Наука, 1984. — 368 с.
- [10] Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. — Киев: Наукова думка, 1992. — 280 с.

- [11] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — Москва: Наука, 1977. — 720 с.
- [12] Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. — Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 376 с.
- [13] Берман Р. Теплопроводность твердых тел. — Москва: Мир, 1979. — 288 с.
- [14] Гавриш В., Нитребич О. Моделювання теплового стану в елементах мікроелектронних пристроїв із наскрізними чужорідними включеннями // Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка»: Комп'ютерні науки та інформаційні технології. — 2011. — № 719. — С. 144-148.

## Research of temperatures in temperature-sensitive plate with a through inclusion of alien

Vasyl Gavrysh

*We consider the nonlinear boundary value problem of heat conduction for an isotropic infinite plate with temperature-sensitive insulated face surface comprising a through foreign heat-releasing inclusion. With a help of the introduced function, a partial linearization of the original nonlinear boundary value problem is performed. After a piecewise linear approximation of the temperature at the boundary surfaces of the foreign inclusion, the problem is completely linearized, numerical-analytical solution of which is obtained with the use of the Fourier integral transform. Calculation formula for calculating the temperature distribution in the considered structure and numerical analysis are performed, where plate and inclusion materials are ceramic BK94-I and silver respectively.*

## Исследование температурных режимов в термочувствительной пластине с инородным сквозным включением

Василий Гаврыш

*Рассмотрено нелинейную краевую задачу теплопроводности для изотропной термочувствительной бесконечной пластины с теплоизолированными лицевыми поверхностями, которая содержит инородное сквозное тепловыделяющее включение. С помощью введенной функции выполнено частичную линеаризацию исходной нелинейной граничной задачи. После кусочно-линейной аппроксимации температуры на граничных поверхностях инородного включения задачу полностью линеаризовано, численно-аналитическое решение которой найдено с использованием интегрального преобразования Фурье. Приведены расчетные формулы для вычисления распределения температуры в рассматриваемой структуре и выполнен численный анализ, где материалом пластины и включения есть керамика BK94-I и серебро соответственно.*

Представлено доктором технічних наук О. Чернухою

Отримано 22.10.13