УДК 539.375

Пластичне відшаровування жорсткого півбезмежного включення скінченної ширини під зсувним навантаженням за наявності міжфазних тріщин

Василь Кривень[1], Андрій Бойко[2]

[1] д. ф.-м. н., професор; Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, вул. Руська, 56, Тернопіль, 46016, e-mail: kryvenv@gmail.com
[2] Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, вул. Руська, 56, Тернопіль, 46016, e-mail: boyko.a1@mail.ru

Знайдено аналітичний розв’язок антиплоскої задачі про квазістатичний розвиток пластичних смуг уздовж межі жорсткого півбезмежного включення скінченної ширини із прямокутним торцем за наявності міжфазних тріщин. Включення знаходиться у необмеженому ідеально пружно-пластичному середовищі. До навантаження в ідеальному механічному контакті з середовищем перебувала тільки частина включення поблизу його торця. Пластичні смуги розвиваються від вершин включення та вершин міжфазних тріщин. Визначено функцію напружень, знайдено залежності довжин пластичних смуг від величини коефіцієнта інтенсивності напружень.

Ключові слова: жорстке включення, антиплоска деформація, міжфазна тріщина, пластичне відшаровування, аналітичний розв’язок, конформне відображення.

Вступ. Дослідження напружено-деформованого стану (НДС) тіл із включеннями є важлива задача механіки, що інтенсивно розвивається [1-3]. Сьогодні найповніше досліджено НДС включень нехтовно малої товщини у пружному середовищі. Для цього випадку методом функцій стрибка можна досліджувати НДС тіл із тонкими включеннями складної форми для різних способів навантаження. Але поки що значно слабше досліджено НДС пружних і особливо пружно-пластичних тіл із включеннями. Мало з’ясованими залишаються вплив товщини включення на НДС та умови, за яких допустиме нехтування товщиною включення. Потребують розвитку дослідження НДС тіл із включеннями за умови їх недосконалого контакту з середовищем, зокрема за наявності міжфазних тріщин. Важливими, але недостатньо розвинутими, залишаються дослідження пластичного відшаровування включень, що супроводжується розвитком пластичних смуг вздовж поверхні включення від вершин міжфазних тріщин або кутових точок включення [4].

1. Формулювання задачі

Дослідимо пластичне відшаровування жорсткого тонкого півбезмежного включення скінченної ширини за наявності однакових міжфазних тріщин на його більших гранях, розташованих на однаковій відстані від його вершин (рис. 1).

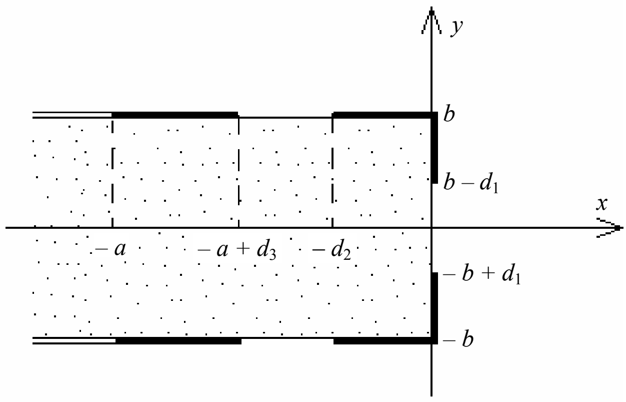

Рис. 1. Поперечний переріз тіла.
Потовщені лінії — смуги пластичного відшаровування

Вважатимемо також, що поверхні тріщин є вільними. Деформування спричинено квазістатично зростаючим зсувним навантаженням, паралельним довшим граням включення, прикладеним на нескінченності. Вершини включення та вершини міжфазних тріщин є концентраторами напружень. Від них уздовж поверхні включення поширюються смуги пластичного відшаровування. Матеріал тіла вважаємо ідеально пружно-пластичним із зсувною межею текучості, рівною k.

У поперечному перерізі тіла включення займає область $-\infty < x \le 0, -b \le y \le b$, b — півтовщина включення. Міжфазним тріщинам у площині поперечного перерізу відповідають промені $-\infty < x \le a, y = \pm b$. У зв'язку з наявністю тріщин на поверхні включення контакт включення із середовищем у початковому стані втрачений уздовж горизонтальних граней включення за винятком ділянок завдовжки a, що безпосередньо примикають до вершин включення. Довжини вертикальної та горизонтальної пластичних смуг, що розвиваються від вершин включення, відповідно рівні d_1 і d_2, а довжина смуги на продовженні міжфазних тріщин — d_3.

Дамо формулювання крайової задачі у напруженнях. Поза включенням тіло перебуває у пружному стані, а складена з компонент напружень функція $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$ є аналітична в області $D = \{x > 0, y > 0\} \cup \{x \le 0, y > b\}$ та задовольняє на її межі таким умовам:

$$\operatorname{Re}\tau(\zeta) = 0 \ \left(\zeta = x + ib, \ -\infty < x < -a\right); \quad \left|\tau_1(\zeta)\right| = k \ \left(\zeta = x + ib, \ -a < x < -a + d_3\right);$$
$$\operatorname{Im}\tau(\zeta) = 0 \left(\zeta = x + ib, \ -a + d_3 < x < -d_2\right); \ \left|\tau_1(\zeta)\right| = k \ \left(\zeta = x + ib, \ -d_2 < x < 0\right);$$
$$\left|\tau_1(\zeta)\right| = k \ \left(\zeta = iy, \ b - d_1 \le y \le b\right); \quad \operatorname{Im}\tau(\zeta) = 0 \ \left(\zeta = iy, \ 0 \le y \le b - d_1\right);$$
$$\operatorname{Im}\tau(\zeta) = 0 \ \left(\zeta = x, \ 0 < x < +\infty\right); \quad \tau(\zeta) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi\zeta}} + \mathrm{o}\left(\zeta^{-1/2}\right), \quad \zeta \to \infty . \qquad (1)$$

Умови (1) послідовно виражають: перша — відсутність напружень на поверхнях міжфазних тріщин; друга, третя та п'ята — виконання умови пластичності в точках пластичних смуг; третя та шоста — відсутність переміщення на ділянках поверхні тіла, які залишаються у ідеальному механічному контакті з включенням; сьома — відсутність переміщення на лінії симетрії тіла. Окремого пояснення вартує остання з умов (1). Оскільки включення є півбезмежні, то напруження у нескінченно віддаленій точці повинні бути нульовими. Окрім того півбезмежними та паралельними між собою є обидві міжфазні тріщини. Тому напружено-деформований стан на нескінченності можна вважати асимптотично рівним полю напружень півнескінченної тріщини поздовжнього зсуву, вираженому через коефіцієнт інтенсивності напружень K_{III} [5].

2. Аналіз і розв'язання задачі

Розв'язання задачі (1) зводиться до знаходження довжини пластичних смуг d_1, d_2, d_3 як функцій від K_{III} та визначення $\tau(\zeta)$. Додатково при цьому слід забезпечити виконання умови $\left|\tau(\zeta)\right| < k$ всюди поза пластичними смугами, яка означає, що пластичний стан досягається тільки в точках самих смуг. Окрім того функція $\tau(\zeta)$ додатково повинна задовольняти ще одній умові, яка забезпечуватиме неперервність переміщення вздовж вертикальної та горизонтальної пластичних смуг, що починаються від вершини включення:

$$w(-0,b) = -w(0,b-0)\,, \tag{2}$$

де $w(x, y)$ — переміщення у напрямку осі аплікат. Співвідношення (2) означає рівність величин розривів переміщення середовища щодо включення для горизонтальної та вертикальної пластичної смуги за наближення до неї.

Для визначення функції $\tau(\zeta)$ скористаємося здійснюваним цією функцією конформним відображенням. Зробимо попередньо два зауваження щодо відображення $\tau(\zeta)$. У вершинах горизонтальних пластичних смуг напруження τ_{yz} рівне k — максимально можливій величині. Тому у деякій точці ділянки $\left[-a+d_3; -d_2\right]$ воно досягає свого мінімуму $\tau_1 = \min\limits_{[-a+d_3;-d_2]} \tau(x,b)$. У точці (0, 0) і на нескінченності це напруження є нульове. Тому у деякій точці додатної півосі абсцис воно набуває свого максимуму $\tau_0 = \min\limits_{[0,+\infty)} \tau(x,0)$. З урахуванням зроблених зауважень та умов (1) можна зробити висновок, що конформним образом області D у площині G є півкруг із двома розрізами, довжини яких апріорі невідомі, але задовольняють умові $0 < \tau_0 \le \tau_1 < k$ (рис. 2). Наведене відображення володіє трьома парами фіксованих точок: A, B і F і тому, за теоремою про існування і єдиність конформного відображення залежна від параметрів функція τ_0, τ_1, що реалізує наведене на рис. 2 відображення, існує [6]. Відповідним вибором значень τ_0, τ_1 можна забезпечити неперервність переміщення (2) та виконання останньої з умов (1).

Відображення $\tau(\zeta)$ шукатимемо в параметричній формі:

$$\tau = \tau(t), \quad \zeta = \zeta(t) \quad \left(t \in H = \left\{\operatorname{Im} t > 0\right\}\right), \tag{3}$$

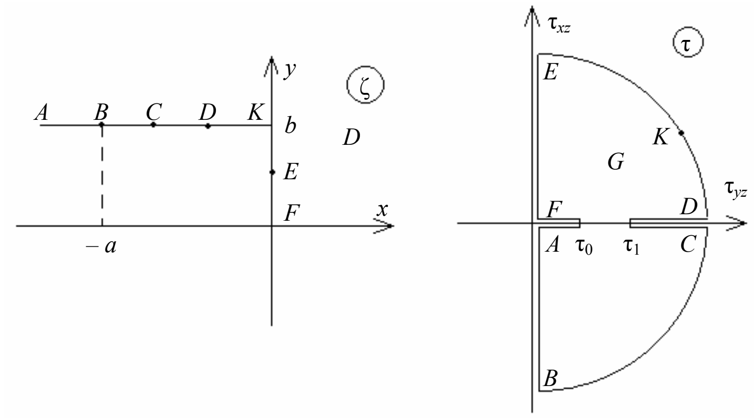

Рис. 2. Області конформних відображень у площинах ζ і τ

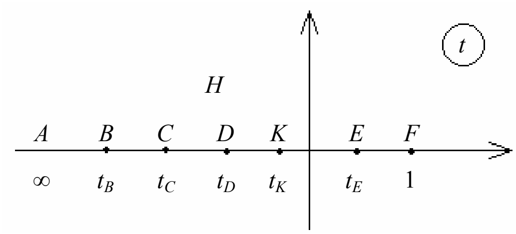

Рис. 3. Область *H* у площині допоміжного комплексного параметра *t*

увівши площину допоміжного комплексного параметра *t*, так аби відповідним точкам межі областей *D* і *G* відповідала одна і та ж точка на межі області *H* (рис. 3).

Функцію $\zeta = \zeta(t)$, що реалізує наведене на рис. 2, 3 відображення, для якого фіксовано вибрано три пари точок *A*, *K* і *F*, можна знайти за допомогою перетворення Крістофеля-Шварца

$$\zeta(t) = ib + \frac{b}{\int_{t_K}^{1} F(\eta)d\eta} \int_{t_K}^{t} \sqrt{\frac{\eta - t_K}{\eta - 1}} d\eta .$$

Інтеграл, що входить в останню формулу, обчислюється аналітично та дає такий результат:

$$\zeta(t) = ib + \frac{2b}{\pi\left(1 - t_K\right)}\left[\sqrt{(t-1)\left(t - t_K\right)} + \ln\left(\sqrt{1-t} - \sqrt{t_K - t}\right)\right], \tag{4}$$

де $\ln\left(\sqrt{1-t} - \sqrt{t_K - t}\right)$ означає аналітичну в *H* функцію, що набуває дійсних значень, якщо аргумент логарифма є дійсний і додатній, а $\sqrt{(t-1)\left(t - t_K\right)} =$ $= t + \mathrm{o}(t)$, для $t \to \infty$.

Беручи до уваги, що у площині ζ точка B$(-a,b)$ позначує вершину міжфазної тріщини, має відомі координати, визначимо параметр t_B із рівняння

$$\sqrt{(t_B-1)(t_B-t_K)}+\ln\left(\sqrt{1-t_B}-\sqrt{t_K-t_B}\right)=\frac{\pi a}{2b}, \tag{5}$$

яке має єдиний розв'язок $t_B\in\left(-\infty;t_K\right)$ для довільного значення $a/b>0$.

Функцію $\tau(t)$ отримаємо комбінацією елементарних відображень. Після низки перетворень:

$$\tau(t)=k\sqrt{\frac{1-t_E}{\left(t_E-t_C\right)\left(t_E-t_D\right)}}\frac{\sqrt{\left(t-t_B\right)\left(t-t_E\right)}-\sqrt{\left(t-t_C\right)\left(t-t_D\right)}}{\sqrt{t-1}}, \tag{6}$$

де $t_C=f\left(-\dfrac{\tau_0}{\tau_1}\dfrac{k^2-\tau_1^2}{k^2-\tau_0^2}\right)$, $t_D=f\left(\dfrac{\tau_0}{\tau_1}\dfrac{k^2-\tau_1^2}{k^2-\tau_0^2}\right)$, $t_B=f\left(\dfrac{\tau_0}{\tau_1}\dfrac{k^2+\tau_1^2}{k^2+\tau_0^2}\right)$,

$$f(u)=\frac{2\left(u-u_0\right)}{(u+1)\left(1-u_0\right)};\quad u_0=\frac{\tau_0}{\tau_1}\sqrt{\frac{\left(k^4+\tau_1^4\right)\left(t_Bt_E-t_Ct_D\right)-2k^2\tau_1^2\left(t_Bt_E+t_Ct_D\right)}{\left(k^4+\tau_0^4\right)\left(t_Bt_E-t_Ct_D\right)-2k^2\tau_0^2\left(t_Bt_E+t_Ct_D\right)}}.$$

Під $(t-p)^{1/2}$ (p — дійсне число) у рівності (6) і далі у цій роботі розумітимемо аналітичну в області H функцію, яка приймає дійсні додатні значення, коли t дійсне та більше за p.

Координати t_B, t_E, t_C і t_D ($-\infty<t_B<t_C<t_D<0<t_E<1$) точок B, E, C і D у площині t пов'язані співвідношенням:

$$t_Et_B-t_Ct_D=t_E+t_B-t_C-t_D. \tag{7}$$

Із рівностей (5) і (7) випливає, що співвідношення (4) та (6) і визначають двопараметричну множину функцій $\tau(\zeta)$.

Для розв'язання задачі (1), (2) досить визначити напруження τ_0 і τ_1 так, аби виконувалися остання з умов (1) та умова (2), що досягається вибором пов'язаних співвідношенням (7) параметрів t_E, t_C і t_D.

Окрім рівності (2) t_E, t_C і t_D задовольняють ще двом зв'язкам. Для їх встановлення скористаємося асимптотикою функції $\tau(\zeta)$ на нескінченності та неперервністю переміщення вздовж межі включення.

Із формул (4) та (6) отримуємо, що для $t\to\infty$

$$\zeta=\frac{2b}{\pi}t+\mathrm{o}(t), \tag{8}$$

$$\tau(t)=k\sqrt{\frac{\left(t_B-t_C\right)\left(t_B-t_D\right)}{1-t_B}}\frac{2}{\sqrt{t}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

І для $\zeta \to \infty$

$$\tau(\zeta) = \frac{\sqrt{2b}k}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{(t_B - t_C)(t_B - t_D)}{1 - t_B}} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right).$$

Отже, остання умова (1) виконуватиметься, якщо параметри t_C, t_D задовольнятимуть співвідношенню:

$$(t_B - t_C)(t_B - t_D) = (1 - t_B)\left(\frac{K_{III}}{2\sqrt{b}k} \right)^2. \tag{9}$$

Аби досягти виконання умови (2), знайдемо величину розриву переміщення між включенням і матрицею у точках пластичних смуг при вершині включення. Як відомо [7], відносне зміщення точок $\zeta_2 = x_2 + iy_2$ і $\zeta_1 = x_1 + iy_1$ можна знайти за формулою

$$w(x_2, y_2) - w(x_1, y_1) = \frac{1}{G} \mathrm{Im} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \tau(\zeta) d\zeta,$$

де G — модуль зсуву матеріалу матриці.

У разі наближення до вершини включення розриви переміщення між включенням і матрицею вздовж вертикальної Δ_1 та горизонтальної Δ_2 пластичних смуг відповідно рівні:

$$\Delta_1 = M \int_{t_D}^{0} \frac{\sqrt{(t - t_B)(t_E - t)}}{1 - t} t dt, \quad \Delta_2 = M \int_{0}^{t_E} \frac{\sqrt{(t - t_C)(t - t_D)}}{1 - t} t dt. \tag{10}$$

Тут $M = \dfrac{2bk}{\pi G} \sqrt{(1 - t_E) / \left[(t_E - t_C)(t_E - t_D) \right]}$.

У результаті отримуємо такий (третій) зв'язок параметрів t_E, t_C, t_D:

$$\int_{t_D}^{0} \frac{\sqrt{(t - t_B)(t_E - t)}}{1 - t} t dt = \int_{0}^{t_E} \frac{\sqrt{(t - t_C)(t - t_D)}}{1 - t} t dt. \tag{11}$$

Інтеграли, що входять у формулу (11), можна обчислити аналітично, але відповідні вирази є досить громіздкі та мало придатні для подальшого використання.

Розв'яжемо систему рівнянь (7), (9) стосовно t_E, t_C

$$t_C = t_B + \frac{1 - t_B}{4(t_D - t_B)} \left(\frac{K_{III}}{k\sqrt{b}} \right)^2,$$

$$t_E = t_D + \frac{1 - t_D}{4(t_D - t_B)} \left(\frac{K_{III}}{k\sqrt{b}} \right)^2$$

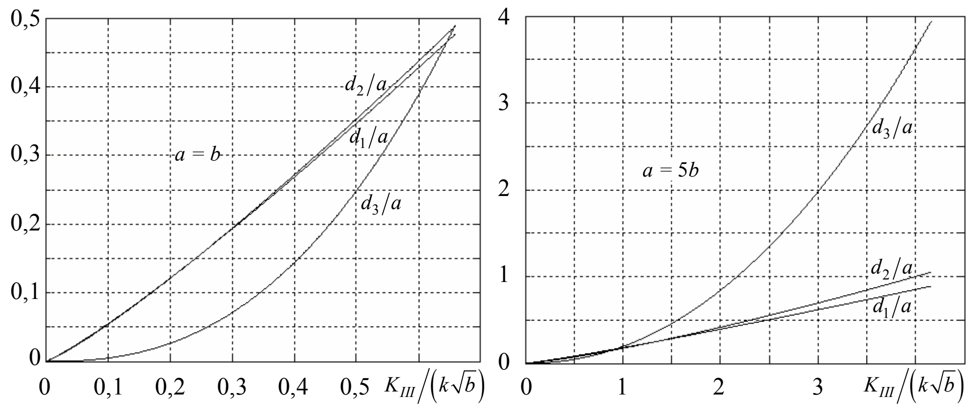

Рис. 4. Залежності довжин міжфазних пластичних шарів від навантаження

і отримаємо формули, що виражають параметри t_E, t_C через $t_D \in (t_C;0)$, який, своєю чергою, знайдемо з рівняння (10).

Маючи параметри t_E, t_C, t_D як функції коефіцієнта інтенсивності напружень півбезмежної прямолінійної тріщини поздовжнього зсуву K_{III}, отримуємо залежні від нього довжини міжфазних пластичних смуг:

$$d_1 = \frac{2b}{\pi}\left(\sqrt{t_E - t_E^2} + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{t_E}{1-t_E}}\right)\right), \quad d_2 = \frac{2b}{\pi}\left(-\sqrt{t_D^2 - t_D} + \ln\left(\sqrt{1-t_D} - \sqrt{-t_D}\right)\right),$$

$$d_3 = \frac{2b}{\pi}\left(-\sqrt{t_C^2 - t_C} + \ln\left(\sqrt{1-t_C} - \sqrt{-t_C}\right)\right) + a .$$

Залежності для довжин міжфазних пластичних смуг від навантаження K_{III} (рис. 4) мають сенс, поки не настало повне пластичне відшарування вздовж горизонтальних або вертикальних граней включення. Пластичні смуги, що розвиваються вздовж горизонтальних граней зімкнуться, якщо $t_C = t_D$, тобто якщо $K_{III}/(k\sqrt{b}) = 2/\sqrt{1-t_B}$. На цей момент вертикальні смуги ще не досягатимуть середини грані включення.

Висновки. Отримано аналітичний розв’язок задачі про пружно-пластичний напружено-деформований стан тіла з жорстким півбезмежними включенням скінченної ширини. Торець включення прямокутний. Уздовж обох довших граней включення наявні міжфазні тріщини, вершини яких знаходяться на певній відстані від кутових точок включення. Досліджено квазістатичний ріст пластичних смуг, що розвиваються від вершин тріщин і вершин включення. Знайдено умови, за яких відбувається злиття пластичних смуг, що виходять із вершин тріщин і вершин включення, та показано, що до цього моменту не наступатиме повне пластичне відшарування вздовж коротшої грані включення.

Якщо віддаль від вершини включення до вершини тріщини набагато більша, ніж ширина включення, то смуга на продовженні тріщини розвивається приблизно за квадратичним законом, аналогічно до смуги на продовженні окремої тріщини за відсутності включення. Зближення вершин включення та тріщини пришвидшує пластичне відшаровування, але до їх злиття певна центральна частина торця включення залишається невідшарованою.

Зі зменшенням товщини включення до нуля, НДС на відстанях, більших за відстань між вершинами включення та міжфазної тріщини, рівномірно наближається до НДС окремої тріщини, однак в околі торця включення поле напружень залишається суттєво відмінним від поля напружень для включення нульової товщини. Таким чином, у розрахунках на міцність з огляду на можливе руйнування при вершинах включення, які є концентраторами напружень, навіть досить тонке включення не можна наближено замінювати включенням нульової товщини.

Література

[1] *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями: монографія. — Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. — 716 с.

[2] *Kryven' V. A., Valyashek V. B.* Initial stage of plastic exfoliation of a rectangular inclusion under conditions of one-sided contact with a medium // Journal of Mathematical Sciences. — 2010. — Vol. 171, No 4. — P. 107-116.

[3] *Кривень В. А,. Яворська М. І.* Пластичні зони при зсуві біля прямокутного і закругленого вирізів сталої ширини // Математичні методи і фіз.-мех. поля. — 2001. — Т. 47, № 2. — С. 138-144.

[4] *Кривень В. А.* Узагальнене представлення зони пластичності при антиплоскій деформації пружнопластичного тіла із гострокінцевим концентратором напружень // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1983. — № 2. — С. 31-34.

[5] *Саврук М.П., Казберук А.* Механіка руйнування та міцність матеріалів: довідн. посіб.; за заг. ред. *В. В. Панасюка*. Т. 14: Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами. — Львів: СПОЛОМ, 2012. — 384 с.

[6] *Иванов В. И., Попов В. Ю.* Конформные отображения и их приложения. — Москва: Едиториал УРСС, 2002. — 324 с.

[7] *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. — Москва: Наука, 1979. — 744 с.

Plastic exfoliation of rigid semi-infinite inclusion of the finite width under shift load at the presence of interfacial cracks

Vasyl Kryven', Andriy Boyko

The analytic solution of an anti-plane problem of the quasistatic development of plastic strips along the boundary of the rigid semi-infinite inclusion of the finite width with the rectangular butt at the presence of interfacial cracks is found. The inclusion is located in an infinite ideal elastic-plastic medium. Before the loading, only a part of the inclusion near its butt was in ideal mechanical contact with the medium. Plastic strips evolve from the inclusion apex and from the apices of interfacial cracks. The function of stresses is defined as well as the dependence of the lengths of plastic strips on magnitude of the stress intensity factor.

Пластическое отслаивание жесткого полубесконечного включения конечной ширины под сдвиговой нагрузкой при наличии межфазных трещин

Васыль Крывень, Андрий Бойко

Найдено аналитическое решение антиплоской задачи о квазистатическом развитии пластических полос вдоль границы жесткого полубесконечного включения конечной ширины с прямоугольным торцом при наличии межфазных трещин. Включения находятся в неограниченной идеально упругопластической среде. До приложения нагрузки в идеальном механическом контакте со средой находилась только часть включения вблизи его торца. Пластические полосы развиваются от вершин включения и вершин межфазных трещин. Определена функция напряжений, найдены зависимости длин пластических полос от величины коэффициента интенсивности напряжений.

Представлено професором Г. Сулимом

Отримано 30.04.14