

Квазістатичний термопружний стан безмежного трискладового термочутливого тіла за дії джерела тепла

Борис Процюк¹, Олег Горун²

¹ д. ф.-м. н., с. н. с. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: dept19@iapmm.lviv.ua

² Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: oleggorun@gmail.com

Для визначення квазістатичного термопружного стану трискладового безмежного термочутливого тіла за дії джерел тепла запропоновано чисельно-аналітичний підхід, який базується на використанні перетворення Кірхгофа, узагальнених функцій, функцій Гріна трискладового простору у вигляді функціональних рядів і лінійних сплайнів. Наведено результати числових досліджень температури, напружень і переміщень.

Ключові слова: температурні поля, термочутливість, термопружний стан, трискладові тіла, функції Гріна.

Вступ. У сучасних галузях промисловості широко використовують шаруваті елементи конструкцій, перебування яких під впливом високотемпературної дії, зокрема, джерел тепла, зумовлює врахування температурної залежності (термочутливості) їх фізико-механічних характеристик. Аналітичні та чисельно-аналітичні підходи розв'язання відповідних задач теплопровідності та термопружності у випадку одно- та багатошарових тіл відображені у роботах вітчизняних і зарубіжних авторів [1-7 та ін.]. Зокрема, у праці [7] визначення одновимірного нестационарного температурного поля в багатошаровій плиті, зумовленого тепловим потоком зведено до розв'язання систем нелінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерра другого роду. При цьому використано перетворення Кірхгофа, апарат узагальнених функцій, лінійні сплайни та функції Гріна нестационарної задачі для багатошарової плити зі сталими теплофізичними характеристиками у вигляді рядів за власними функціями.

У цій роботі запропоновано підхід до розв'язання квазістатичних задач термопружності для трискладового необмеженого термочутливого тіла з плоскопаралельними поверхнями поділу за дії джерела тепла. При цьому, на відміну від роботи [7], використано матриці Гріна для трискладового простору у вигляді функціональних рядів, що значно спрощує числову реалізацію, зокрема, для малих часів.

1. Формулювання задачі термопружності

Розглянемо віднесене до циліндричної системи координат r, φ, z необмежене трискладове циліндричне тіло із залежними від температури фізико-механічними характеристиками складників. На плоско-паралельних поверхнях поділу $z = z_1 = 0$ та $z = z_2 = h$ виконуються умови ідеального термомеханічного контакту, а поверхня $r = R$ є гладко закріплена (відсутні радіальні переміщення та дотичні напруження). Визначимо в такому тілі нестационарне температурне поле, напруження та переміщення, зумовлені дією джерела тепла $w_i(z, \tau)$ за припущення, що початкова температура складників дорівнює нулю.

2. Розв'язання задачі теплопровідності

Для визначення температурного поля маємо рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_t^{(i)}(t_i) \frac{\partial t_i}{\partial z} \right] = c_V^{(i)}(t_i) \frac{\partial t_i}{\partial \tau} - w_i(z, \tau) \quad (i = \overline{1,3}), \quad (1)$$

умови контакту:

$$t_i(z, \tau) = t_{i+1}(z, \tau), \quad \text{якщо } z = z_i \quad (i = 1, 2),$$

$$\lambda_t^{(1)} \frac{\partial t_1(0, \tau)}{\partial z} = \lambda_t^{(2)} \frac{\partial t_2(0, \tau)}{\partial z}, \quad \lambda_t^{(2)} \frac{\partial t_2(h, \tau)}{\partial z} = \lambda_t^{(3)} \frac{\partial t_3(h, \tau)}{\partial z}, \quad (2)$$

граничні та початкові умови

$$t_1(z, \tau)|_{z \rightarrow -\infty} = 0, \quad t_3(z, \tau)|_{z \rightarrow +\infty} = 0, \quad t_i|_{\tau=0} = 0. \quad (3)$$

До співвідношень (1)-(3) застосуємо перетворення Кірхгофа [6]:

$$\theta_i = \frac{1}{\lambda_{0i}} \int_0^{t_i} \lambda_t^{(i)}(x) dx, \quad (4)$$

вважаючи, що функції $\theta_i = \theta_i(t_i)$ мають обернені $t_i = t_i(\theta_i)$. Приймаючи, що коефіцієнти теплопровідності лінійно залежать від температури $\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{0i}(1 + \beta_i t_i)$, а коефіцієнти об'ємної теплоємності мають вигляд $c_V^{(i)}(t_i) = c_{0i} c_i(t_i)$, $i = \overline{1,3}$, отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_{0i} \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \right] = c_{0i} c_i(t_i) (1 + \beta_i t_i) \frac{\partial \theta_i}{\partial \tau} - w_i(z, \tau), \quad (5)$$

$$\theta_i|_{\tau=0} = 0, \quad \theta_1(z, \tau)|_{z \rightarrow -\infty} = 0, \quad \theta_3(z, \tau)|_{z \rightarrow +\infty} = 0, \quad (6)$$

$$\theta_{i+1}(z, \tau) - \theta_i(z, \tau) = F_{i+1}(\tau), \quad \text{якщо } z = z_i,$$

$$\lambda_{0,1} \frac{\partial \theta_1(0, \tau)}{\partial z} = \lambda_{0,2} \frac{\partial \theta_2(0, \tau)}{\partial z}, \quad \lambda_{0,2} \frac{\partial \theta_2(h, \tau)}{\partial z} = \lambda_{0,3} \frac{\partial \theta_3(h, \tau)}{\partial z}, \quad (7)$$

$$F_{i+1}(\tau) = \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_{i+1}} \right) \left[\theta_{i+1}(z_i, \tau) - \beta_{i+1}^{-1} \left(\sqrt{1 + 2\beta_{i+1}\theta_{i+1}(z_i, \tau)} - 1 \right) \right].$$

Систему рівнянь (5), (6) із врахуванням (7) і «простої» нелінійності (коефіцієнт температуропровідності незначно залежить від температури та його можна вважати сталим, що справджується для ряду металів [8]) у просторі узагальнених функцій подамо наступним чином [7]:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_0(z) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] = c_0(z) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^2 \lambda_{0,j+1} F_{j+1}(\tau) \delta'(z - z_j) - w_t(z, \tau), \quad (8)$$

$$\theta(z, \tau) \Big|_{z \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad \theta(z, \tau) \Big|_{\tau=0} = 0, \quad (9)$$

де $\theta(z, \tau) = \theta_1(z, \tau) + \sum_{k=1}^2 (\theta_{k+1}(z, \tau) - \theta_k(z, \tau)) S(z - z_k)$, $\delta'(z)$ — похідна від дельта-функції Дірака, $\lambda_0(z)$ та $c_0(z)$ мають вигляд

$$p_0(z) = p_{0,1} + \sum_{i=1}^2 (p_{0,i+1} - p_{0,i}) S(z - z_i), \quad (10)$$

індексу $i = 1$ відповідають величини, які належать першому складнику $-\infty \leq z \leq 0$, $i = 2$ — другому (проміжковому шару) $0 \leq z \leq h$, $i = 3$ — третьому $h \leq z \leq +\infty$.

За допомогою функцій Гріна $G(z, \zeta, \tau)$ [9] розв'язок задачі (8), (9) подається у вигляді:

$$\begin{aligned} \theta(z, \tau) = & \sum_{j=1}^2 \lambda_{0,j+1} \int_0^{\tau} \frac{\partial G(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=z_j+0} F_{j+1}(\tau') d\tau' + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\tau} q_0 G(z, \zeta, \tau - \tau') w_t(\zeta, \tau') d\zeta d\tau'. \end{aligned} \quad (11)$$

Спосіб визначення $\theta_{j+1}(z_j, \tau)$, які входять у функції $F_{j+1}(\tau)$, в інтегральному поданні (11) проілюструємо для випадку, якщо джерело тепла $w_t(z, \tau)$ зосереджено на поверхні поділу $z = 0$ і має імпульсний характер зміни інтенсивності:

$$w_t(z, \tau) = q_0 \sum_{p=0}^{m-1} \left[S(\tau - b_p) - S(\tau - b_p - \tau_1^*) \right] \delta(z), \quad (12)$$

де $S(z)$ — функція Гевісайда, q_0 — потужність джерела тепла, $b_p = p(\tau_1^* + \tau_2^*)$, τ_1^* — тривалість імпульсу, τ_2^* — тривалість паузи, m — кількість імпульсів, $\delta(z)$ — дельта-функція Дірака. Перейдемо у співвідношеннях (11) до безрозмірних змінних та апроксимуємо функцію $F_{j+1}(Fo)$ лінійним сплайном [7]:

$$F_{j+1}(\text{Fo}) = s_{j1}^{(1)}\text{Fo} + s_{j1}^{(0)} + \sum_{k=1}^{K_\tau-1} \left(s_{j,k+1}^{(1)}\text{Fo} + s_{j,k+1}^{(0)} - s_{j,k}^{(1)}\text{Fo} - s_{j,k}^{(0)} \right) S(\text{Fo} - \overline{\text{Fo}}_k),$$

$$s_{j1}^{(1)} = \left[F_{j+1}(\overline{\text{Fo}}_i) - F_{j+1}(\overline{\text{Fo}}_{i-1}) \right] / \Delta \overline{\text{Fo}}_i,$$

$$s_{j1}^{(0)} = \left[-F_{j+1}(\overline{\text{Fo}}_i)\overline{\text{Fo}}_{i-1} + F_{j+1}(\overline{\text{Fo}}_{i-1})\overline{\text{Fo}}_i \right] / \Delta \overline{\text{Fo}}_i,$$

$$\Delta \overline{\text{Fo}}_i = \overline{\text{Fo}}_i - \overline{\text{Fo}}_{i-1} \quad (i = \overline{1, K_\tau}), \quad 0 = \overline{\text{Fo}}_0 < \overline{\text{Fo}}_1 < \overline{\text{Fo}}_2 \dots < \overline{\text{Fo}}_{K_\tau}.$$

Тут $\text{Fo} = a_0 \tau / l_0^2$, l_0 — деякий лінійний розмір, a_i — коефіцієнт температуро-провідності i -ого складника.

Підставивши вирази для функцій Гріна та знайшовши відповідні інтеграли, отримаємо такі співвідношення для змінної Кірхгофа:

$$\Theta_i(\bar{z}, \text{Fo}) = f_i(\bar{z}, \text{Fo}) + \eta_{i,1} \gamma_{i,1}(\bar{z}, \text{Fo}) + \eta_{i,2} \gamma_{i,2}(\bar{z}, \text{Fo}), \quad (13)$$

де

$$\gamma_{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}) = s_{11}^{(0)} \psi_1^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}) + s_{11}^{(1)} \psi_2^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}) + \sum_{k=1}^{K_\tau-1} \left[\left(s_{1,k+1}^{(0)} - s_{1,k}^{(0)} \right) \times \right. \\ \left. \times \psi_3^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo} - \overline{\text{Fo}}_k) + \left(s_{1,k+1}^{(1)} - s_{1,k}^{(1)} \right) \psi_4^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo} - \overline{\text{Fo}}_k) \right],$$

$$\eta_{1,1} = \frac{\lambda_{0,2} a_{02}^*}{2(\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2} a_{12}^*)}, \quad \eta_{1,2} = -\frac{\lambda_{0,2} \lambda_{0,3} a_{03}^*}{(\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2} a_{12}^*)(\lambda_{0,2} + \lambda_{0,3} a_{23}^*)},$$

$$\eta_{2,1} = \frac{a_{02}^*}{4}, \quad \eta_{2,2} = \frac{\lambda_{0,3} a_{03}^*}{\lambda_{0,2} + \lambda_{0,3} a_{23}^*}, \quad \eta_{3,1} = \frac{\lambda_{0,2} a_{02}^*}{2(\lambda_{0,2} + \lambda_{0,3} a_{23}^*)}, \quad \eta_{3,2} = \frac{a_{03}^*}{4},$$

$$\psi_\rho^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}) = l_\rho^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}) \quad \text{для } \rho = 1, 2;$$

$$\psi_\rho^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo} - \overline{\text{Fo}}_k) = l_\rho^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo} - \overline{\text{Fo}}_k) \quad \text{для } \rho = 3, 4;$$

$$l_\rho^{1,1}(\bar{z}, \xi) = \varphi_{\rho,1}^0(\bar{z}, \xi) - \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \varphi_{\rho,1}^1(a_{12}^* 2n\bar{h} - \bar{z}, \xi) - v_2 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \times \\ \times \varphi_{\rho,1}^1(2a_{12}^*(1+n)\bar{h} - \bar{z}, \xi),$$

$$l_\rho^{1,2}(\bar{z}, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \varphi_{\rho,1}^1(a_{12}^*(1+2n)\bar{h} - \bar{z}, \xi),$$

$$l_\rho^{2,1}(\bar{z}, \xi) = (v_1 + 1) \varphi_{\rho,2}^1(\bar{z}, \xi) - v_2 \varphi_{\rho,2}^1(2\bar{h} - \bar{z}, \xi) + v_1 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \varphi_{\rho,2}^1(\bar{z} + 2n\bar{h}, \xi) - \\ - v_2 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \varphi_{\rho,2}^1(2\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}, \xi) + v_1 v_2 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \left[\varphi_{\rho,2}^1(\bar{z} + 2(1+n)\bar{h}, \xi) - \right. \\ \left. - \varphi_{\rho,2}^1(2(1+n)\bar{h} - \bar{z}, \xi) \right],$$

$$l_{\rho}^{2,2}(\bar{z}, \xi) = \varphi_{\rho,2}^1(\bar{z} - \bar{h}, \xi) - \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \varphi_{\rho,2}^1(2n\bar{h} - \bar{z} + \bar{h}, \xi) + v_1 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \times \\ \times \varphi_{\rho,2}^1(2n\bar{h} + \bar{z} + \bar{h}, \xi),$$

$$l_{\rho}^{3,1}(\bar{z}, \xi) = \varphi_{\rho,2}^1(a_{23}^*(\bar{z} - \bar{h}) + \bar{h}, \xi) + \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \varphi_{\rho,2}^1(a_{23}^*(\bar{z} - \bar{h}) + 2n\bar{h} + \bar{h}, \xi) + \\ + v_1 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \varphi_{\rho,2}^1(a_{23}^*(\bar{z} - \bar{h}) + (1 + 2n)\bar{h}, \xi),$$

$$l_{\rho}^{3,2}(\bar{z}, \xi) = (1 - v_2) \varphi_{\rho,3}^1(\bar{z} - \bar{h}, \xi) - v_2 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \varphi_{\rho,3}^1(2n\bar{h}a_{32}^* + \bar{z} - \bar{h}, \xi) + \\ + v_1 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \varphi_{\rho,3}^1(2(1 + n)\bar{h}a_{32}^* + \bar{z} - \bar{h}, \xi),$$

$$\varphi_{\rho,i}^{\rho'}(\zeta, \xi) = 2(S(\xi))^{\delta_{\rho 3}} a_{i0}^* \left[(-1)^{\rho'+1} - \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{\xi}} \right) \right], \quad \text{якщо } \rho = 1, 3,$$

$$\varphi_{2,i}^{\rho'}(\zeta, \text{Fo}) = -2 \frac{\zeta}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\text{Fo}} \exp \left(-\frac{\zeta^2}{4a_{i0}^{*2} \text{Fo}} \right) + \left[(-1)^{\rho'+1} - \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{\text{Fo}}} \right) \right] \times \\ \times \left(\zeta^2 a_{i0}^* + 2a_{i0}^* \text{Fo} \right),$$

$$\varphi_{4,i}^{\rho'}(\zeta, \text{Fo} - \overline{\text{Fo}}_k) = S(\text{Fo} - \overline{\text{Fo}}_k) \left\{ -2 \frac{\zeta}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\text{Fo} - \overline{\text{Fo}}_k} \exp \left(-\frac{\zeta^2}{4a_{i0}^{*2} (\text{Fo} - \overline{\text{Fo}}_k)} \right) + \right. \\ \left. + \left[(-1)^{\rho'+1} - \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{\text{Fo} - \overline{\text{Fo}}_k}} \right) \right] \left(\zeta^2 a_{i0}^* + 2a_{i0}^* \text{Fo} \right) \right\},$$

$$f_1(\bar{z}, \text{Fo}) = \frac{\bar{q}_0}{2\delta_1} \left[\phi^+(\bar{z}, \text{Fo}) + v_1 \phi^+(\bar{z}, \text{Fo}) + v_1 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \phi^-(2n\bar{h}a_{12}^* - \bar{z}, \text{Fo}) - \right. \\ \left. - v_2 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \phi^-(2(1 + n)\bar{h}a_{12}^* - \bar{z}, \text{Fo}) \right],$$

$$f_2(\bar{z}, \text{Fo}) = \frac{\bar{q}_0}{(\delta_1 + \delta_2)} \left[\phi^-(a_{12}^* \bar{z}, \text{Fo}) + \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \phi^-(a_{12}^*(\bar{z} + 2n\bar{h}), \text{Fo}) - \right. \\ \left. - v_2 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \phi^-(a_{12}^*(2\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}), \text{Fo}) \right],$$

$$f_3(\bar{z}, Fo) = \frac{2\delta_2\bar{q}_0}{(\delta_1 + \delta_2)(\delta_2 + \delta_3)} \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1\nu_2)^n \phi^-\left(a_{12}^*(1+2n)\bar{h} + a_{13}^*(\bar{z} - \bar{h}), Fo\right),$$

$$\phi^\pm(\zeta, Fo) = \sum_{p=0}^{m-1} \left\{ S(Fo - \bar{b}_i) \left[\pm \zeta a_{01}^* + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Fo - \bar{b}_i} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4a_{10}^*(Fo - \bar{b}_i)}\right) \right] + \right.$$

$$+ \zeta \sqrt{a_{s1}} \operatorname{erf}\left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{Fo - \bar{b}_i}}\right) \left. - S(Fo - \bar{b}_i - \bar{\tau}_1^*) \left[\pm \zeta a_{01}^* + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Fo - \bar{b}_i - \bar{\tau}_1^*} \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4a_{10}^* (Fo - \bar{b}_i - \bar{\tau}_1^*)}\right) + \zeta a_{01}^* \operatorname{erf}\left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{Fo - \bar{b}_i - \bar{\tau}_1^*}}\right) \right] \right\}.$$

Тут $\bar{q}_0 = \frac{q_0 l_0}{a_0}$, $\bar{b}_i = \frac{b_i a_0}{l_0^2}$, $\bar{\tau}_i^* = \frac{\tau_i^* a_0}{l_0^2}$, $a_{ij}^* = \sqrt{\frac{a_i}{a_j}}$, $\delta_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{a_i}}$, $\nu_1 = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1 + \delta_2}$,
 $\nu_2 = \frac{\delta_3 - \delta_2}{\delta_3 + \delta_2}$, $\bar{z} = \frac{z}{l_0}$, $\bar{h} = \frac{h}{l_0}$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера.

Підставивши у співвідношеннях (13) у $\theta_i(\bar{z}, Fo)$ ($i = 2, 3$) відповідно $\bar{z} = \bar{z}_i$ ($\bar{z}_i = z_i/l_0$) та $Fo = \overline{Fo}_k$ ($k = \overline{1, K_\tau}$), одержимо рекурентну систему двох нелінійних алгебраїчних рівнянь, після розв'язання якої знаходимо шукані значення $\theta_{j+1}(\bar{z}_j, \overline{Fo}_k)$. За відомими виразами для змінної Кірхгофа, температурне поле $t_i(\bar{z}, Fo)$ на основі формули (4) визначаємо зі співвідношення:

$$t_i(\bar{z}, Fo) = \beta_i^{-1} \left(\sqrt{1 + 2\beta_i \theta_i(\bar{z}, Fo)} - 1 \right).$$

Як частковий випадок, у співвідношеннях (13) для $\bar{h} = 0$, $a_2 = a_3$, $\lambda_i^{(2)} = \lambda_i^{(3)}$ отримаємо розв'язок задачі теплопровідності для двоскладового простору ($i = 1, 2$), на поверхні поділу якого діє джерело тепла (12)

$$\theta_i(\bar{z}, Fo) = f_i(\bar{z}, Fo) + 2(\nu_1 + 1)^{i-1} \eta_{i,1} \left\{ s_{11}^{(0)} \Phi_{1,i}^{i-1}(\bar{z}, Fo) + s_{11}^{(1)} \Phi_{2,i}^{i-1}(\bar{z}, Fo) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{K_\tau-1} \left[\left(s_{1,k+1}^{(0)} - s_{1,k}^{(0)} \right) \Phi_{3,i}^{i-1}(\bar{z}, Fo - \overline{Fo}_k) + \left(s_{1,k+1}^{(1)} - s_{1,k}^{(1)} \right) \Phi_{4,i}^{i-1}(\bar{z}, Fo - \overline{Fo}_k) \right] \right\},$$

$$f_1(\bar{z}, Fo) = \frac{\bar{q}_0(1 + \nu_1)}{2\delta_1} \phi^+(\bar{z}, Fo), \quad f_2(\bar{z}, Fo) = \frac{\bar{q}_0}{(\delta_1 + \delta_2)} \phi^-(a_{12}^* \bar{z}, Fo),$$

який співпадає з отриманим у роботі [10], якщо $m = 1$.

3. Розв'язок задачі термопружності

Оскільки температурне поле у тілі змінюється за товщиною, то в ньому виникатимуть лише радіальні та кільцеві напруження [11]:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\phi\phi} = \sigma_0(\bar{z}, Fo) = -\frac{\bar{E}(\bar{z}, Fo)}{1 - \bar{\nu}(\bar{z}, Fo)} \bar{\Phi}(\bar{z}, Fo). \quad (14)$$

При цьому радіальні переміщення відсутні, а осьові (без урахування переміщень тіла як твердого цілого) визначають із співвідношення

$$w(\bar{z}, Fo) = \int_{h/2}^{\bar{z}} \frac{1 + \bar{\nu}(z, Fo)}{1 - \bar{\nu}(z, Fo)} \bar{\alpha}_t(z, Fo) t(z, Fo) dz. \quad (15)$$

Тут функції $\bar{\nu}(\bar{z}, Fo)$, $\bar{E}(\bar{z}, Fo)$, $\bar{\Phi}(\bar{z}, Fo)$, $\bar{\alpha}_t(z, Fo)$ мають вигляд

$$\bar{p}(\bar{z}, Fo) = p_1(t_1) + \sum_{i=1}^3 [p_{i+1}(t_{i+1}) - p_i(t_i)] S(\bar{z} - \bar{z}_i),$$

де $\nu_i(t_i)$ — коефіцієнт Пуассона, $E_i(t_i)$ — модуль пружності, $\Phi_i(t_i) = \int_0^{t_i(\bar{z}, Fo)} \alpha_{ii}(\eta) d\eta$, $\alpha_{ii}(t_i)$ — коефіцієнт лінійного розширення i -ого складника.

4. Числові результати

На основі отриманих співвідношень (13)-(15) досліджували поведінку температурного поля, напружень і переміщень, якщо термомеханічні характеристики першого та третього складників відповідали ніобію ($E_1(t_1) = (100 - 918 \cdot 10^{-5} t_1 - 411 \times 10^{-8} t_1^2) 10^9$ Н/м², $a_1 = 23,9 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\lambda_1^{(1)} = 49,89(1 + 0,226 \cdot 10^{-3} t_1)$, $\alpha_{11}(t_1) = (5,541 + 0,00236 t_1) 10^{-6}$ С⁻¹, $\nu_1 = 0,33$), а проміжкового шару — платині ($E_2(t_2) = (168 - 338 \cdot 10^{-4} t_2) 10^9$ Н/м², $a_2 = 24,4 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\lambda_2^{(2)} = 67,271(1 + 0,207 \cdot 10^{-3} t_2)$ Вт/(м·°С), $\nu_2 = 0,35$, $\alpha_{22}(t_2) = (7,916 + 0,00278 t_2) 10^{-6}$ С⁻¹), $q_0 = 12 \cdot 10^{-6}$ Вт/м², $m = 2$, $\tau_1^* = 2$ с, $\tau_2^* = 3$ с, $h = 10^{-3}$ м.

Із метою вибору кількості розбиттів у співвідношенні (13), у табл. 1 наведено значення температури на поверхні поділу $z = 0$ для фіксованих моментів часу за різних K_τ . Збільшення K_τ (зменшення кроку сітки) практично не впливає на величину температури, що спостерігалось і в інших точках тіла. Тому для подальших досліджень обмежувалися $K_\tau = 5$.

Таблиця 1

$t \backslash K_\tau$	5	10	30	100	200
$t(0, 2)$	782,758677	782,758748	782,758770	782,758770	782,758770
$t(0, 7)$	995,160642	995,160447	995,157288	995,157049	995,157022
$t(0, 15)$	359,454531	359,456319	359,454757	359,455606	359,455597
$t(0, 50)$	179,130226	179,130978	179,128535	179,128553	179,128593

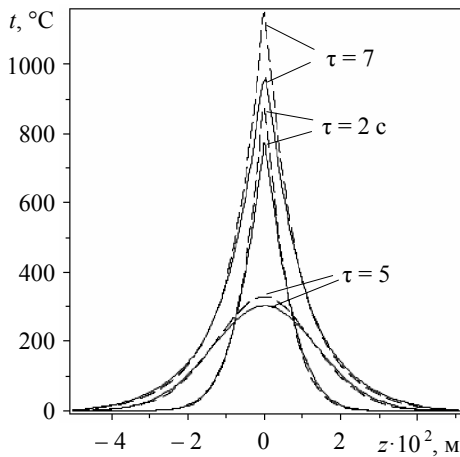


Рис. 1

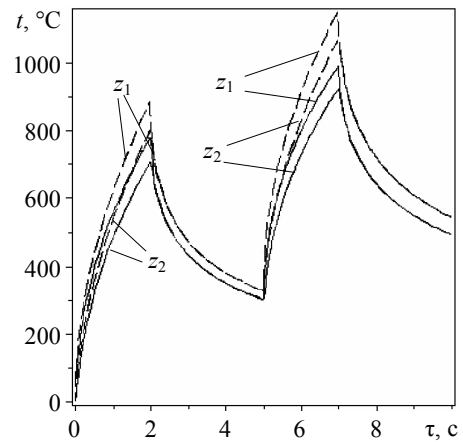


Рис. 2

На рис. 1, 2 зображено залежності температури від часу на поверхнях поділу та залежності від координати в кінці дії імпульсів і в момент початку дії другого відповідно. Тут і далі пунктирні лінії відповідають сталим, а суцільні — залежним від температури фізико-механічним характеристикам. Чим вища температура, тим більший вплив термочутливості. Якщо в кінці дії першого імпульсу температура за урахування температурної залежності характеристик приблизно на 100, то в кінці другого на 150°C нижча, ніж за сталих. Для $|z| > 0,04$ м температура у півбезмежних складниках близька до нуля.

На рис. 3 зображено залежність напружень від часу на поверхнях поділу. У тілі виникають стискуючі стрибкоподібні напруження. Вплив термочутливості для кожного складника проявляється по-різному. Він найпомітніший в області, що прилягає до поверхні дії джерела тепла. Максимум абсолютних значень напружень, який досягається в кінці другого імпульсу, в проміжковому шарі за температурозалежних характеристик на 20 % менший, ніж за сталих, а у першому складнику — на 4 %.

Залежності переміщень від координати в кінці дії імпульсів і в момент початку другого зображено на рис. 4. На відміну від температури та напружень абсолютні значення переміщень за температурозалежних характеристик є більшими, ніж за сталих, а для $|z| > 0,04$ м, як і слід було очікувати, співпадатимуть. Розподіл переміщень є асиметричний щодо середини проміжкового шару.

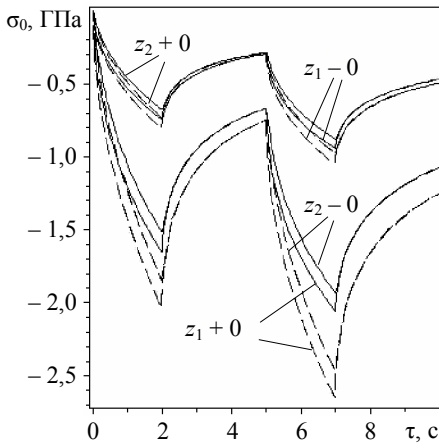


Рис. 3

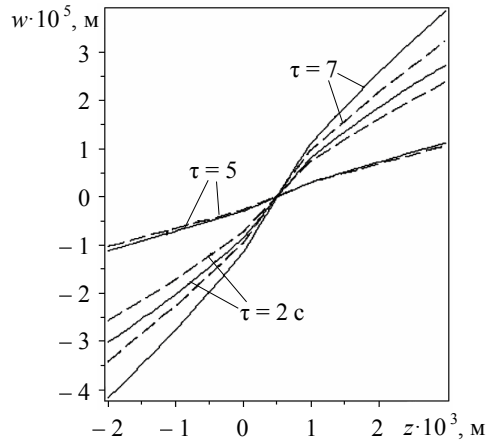


Рис. 4

Слід зазначити, що характер розподілів температури та напружень за товщиною проміжкового шару для кожного моменту часу може бути різний, а для переміщень спостерігався лише лінійний.

Висновки. Запропоновано й апробовано підхід до розв’язання квазістатичних задач термомпружності для трискладових безмежних термочутливих тіл за дії джерела тепла. Із використанням перетворення Кірхгофа, узагальнених функцій, функцій Гріна та лінійних сплайнів розв’язок задачі теплопровідності зведено до розв’язання рекурентної системи двох нелінійних алгебраїчних рівнянь щодо значень змінної Кірхгофа на поверхнях поділу у вузлах сітки.

Числові дослідження засвідчили, що нехтування температурною залежністю характеристик зумовлює суттєве завищення абсолютних значень температури та напружень, але зниження — переміщень.

Література

- [1] *Tao L. N.* The heat conduction problem with temperature-dependent material properties // International Journal of Heat and Mass Transfer. — March, 1989. — Vol. 32. — P. 487-491.
- [2] *Ünal H. C.* Temperature distribution in a plate with temperature-dependent thermal conductivity and internal heat generation // International Journal of Heat and Mass Transfer. — October, 1989. — Vol. 32, Issue 10. — P. 1917-1926.
- [3] *Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R., Oka N.* Transient heat conduction and material thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature dependent properties // J. of Thermal Stresses. — 1996. — Vol. 19, Issue 1. — P. 77-102.
- [4] Численно-аналитический метод решения нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности / *В. Д. Белик, Б. А. Урюков, Г. А. Фролов, Г. В. Ткаченко* // Инженерно-физический журнал. — 2008. — Т. 81, № 6. — С. 1058-1062.
- [5] Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл; під заг. ред. *Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра*; в 5 т. Т. 3. Термомпружність термочутливих тіл / *Р. М. Кушнір, В. С. Попович*. — Львів: СПОЛОМ, 2009. — 412 с.
- [6] Методы теории теплопроводности: учебное пособие для вузов; в 2-х частях. Ч. 2. / *Н. М. Беляев, А. А. Рядно*. — Москва: Высшая школа, 1982. — 304 с.

- [7] Процюк Б. В. Квазистатические температурные напряжения в многослойной термочувствительной пластине при нагреве тепловым потоком // Теоретическая и прикладная механика. — 2003. — Вып. 38 — С. 63-69.
- [8] Зиновьев В. Е. Теплофизические свойства металлов при высоких температурах [справочник]. — Москва, 1989. — 384 с.
- [9] Процюк Б. В., Верба І. І. Нестационарне одновимірне температурне поле тришарових тіл з плоско-паралельними межами поділу // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. математики та інформатики. — 1999. — Вип. 1. — С. 200-205.
- [10] Процюк Б. В., Синюта В. М. Квазистатичні температурні напруження в кусково-однорідному термочутливому просторі // Мат. проблеми механіки неоднорідних структур: Доп. VI Міжнарод. наук. конф. (Львів, 26-29 травня 2003 р.). — Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики НАН України. — 2003. — С. 213-215.
- [11] Кушнір Р. М., Процюк Б. В., Синюта В. М. Температурні напруження та переміщення в багатошаровій пластині з нелінійними умовами теплообміну // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2002. — № 6. — С. 31-38.

The quasistatic thermoelastic state of the infinite three-layer thermosensitive body under the action of a heat source

Borys Protsyuk, Oleg Gorun

To determine the quasistatic thermoelastic state of the three-layer infinite thermosensitive body under the action of heat sources, a numerical-analytical approach is suggested, which is based on the use of the Kirchhoff transformation, generalized functions, Green's functions of a three-layer space in the form of functional series and linear splines. The results of numerical researches of the temperature, stresses and displacements are presented.

Квазистатическое термоупругое состояние неограниченного трехсоставного термочувствительного тела при действии источника тепла

Борис Процюк, Олег Горун

Для определения квазистатического термоупругого состояния трехсоставного неограниченного термочувствительного тела при действии источников тепла предложено численно-аналитический подход, который базируется на использовании преобразования Кирхгофа, обобщенных функций, функций Грина трехсоставного пространства в виде функциональных рядов и линейных сплайнов. Приведены результаты численных исследований температуры, напряжений и перемещений.

Представлено професором Б. Герою

Отримано 17.03.14