УДК 517.5

Дослідження властивостей спектральних розкладів у базисах ортогональних, квазіортогональних і біортогональних поліномів

Ярослав П'янило[1], Валентина Собко[2]

[1] д. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: pjanylo@cmm.lviv.ua
[2] Міжнародний економіко-гуманітарний університет імені академіка Степана Дем'янчука, вул. акад. Степана Дем'янчука, 4, Рівне, 33027, e-mail: vg_sobko@ukr.net

У праці досліджено властивості спектральних розкладів на базі ортогональних многочленів Чебишева. Знайдено зв'язок між різними побудованими базисами та відповідними спектральними розкладами.

Ключові слова: спектральні розклади, ортогональні та біортогональні многочлени, квазіспектральні задачі, інтегральні оператори, власні значення.

Вступ. У теорії ортогональних многочленів чітко виділяється головна її частина — класичні ортогональні многочлени, тобто многочлени Чебишева, Лежандра, Чебишева-Ерміта, Чебишева-Лагера та загальні многочлени Якобі. Ці многочлени знайшли широке застосовуються в теоретичних дослідженнях математиків, математичній фізиці, обчислювальній математиці, квантовій механіці та прикладній математиці. З іншого боку, класичні ортогональні многочлени можна розглядати як найпростіші спеціальні функції математичної фізики. Разом із тим, застосування класичних ортогональних многочленів не завжди дозволяє задовольнити умови, поставлені перед задачами, які необхідно розв'язати. У таких випадках або застосовують інші методи розв'язування, або будують нові ортогональні системи функцій. Перспективною в цьому напрямі є побудова біортогональних систем функцій. Є незначна кількість робіт, які стосуються дослідження та використання біортогональних розкладів. Це, в основному, пояснюється тим, що побудова біортогональних базисів пов'язана зі значними обчислювальними труднощами та є малодосліджена.

У роботі [1] на базі ортогональних многочленів Чебишова першого роду з використанням результатів робіт [2-4] розроблено алгоритм побудови квазіортогональних і біортогональних многочленів. Отримані результати апробовані в ході обчислювального експерименту на модельних задачах. Для ефективного застосування побудованих ортогональних спектрів необхідно дослідити їх властивості.

Метою роботи є дослідження властивостей спектральних розкладів у базисах ортогональних, квазіортогональних і біортогональних многочленів та співвідношення між ними.

У роботі [1] досліджено оператор інтегрування $L: L_{2,\rho}[-1,1] \to L_{2,\rho}[-1,1]$ із ваговою функцією $\rho = 1\Big/\sqrt{1-x^2}$, який для функції $f \in L_{2,\rho}[-1,1]$ ставить у відповідність вираз

$$Lf(x) = \int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} f(x_2)\,dx_2 = \int_{-1}^{x} (x - x_1)\, f(x_1)\,dx_1 \,.$$

На базі цього оператора побудовані квазіотогональні та біортогональні многочлени.

1. Формулювання квазіспектральних задач

1.1. Квазіспектральна задача для інтегрального оператора. Для заданого $n = 1, 2, ...$ знайти такі значення параметра λ, для яких рівняння

$$\int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} U(x_2)\,dx_2 = -\lambda U(x) + \tau_1 T_{n+1}(x) + \tau_2 T_{n+2}(x) + w_0 T_0(x) \tag{1}$$

має ненульові поліноміальні розв'язки $U = U(x) \in \tilde{L}_{2,1}[-1,1]$ степеня $\le n$, де τ_1, τ_2, w_0 — деякі параметри, а $T_n(x)$ — поліноми Чебишева порядку n.

1.2. Квазіспектральна задача для диференційного оператора. Нехай

$$V(x) = \int_{-1}^{x} U(x_1)\,dx_1 \quad \left(\frac{dV(x)}{dx} = U(x) \right). \tag{2}$$

Враховуючи рівність (2), з рівняння (1) одержимо

$$\int_{-1}^{x} V(x_1)\,dx_1 = -\lambda \frac{dV(x)}{dx} + \tau_1 T_{n+1}(x) + \tau_2 T_{n+2}(x) + w_0 T_0(x)\,.$$

З останньої рівності отримуємо диференціальне рівняння щодо функції $V(x)$

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = -\frac{1}{\lambda} V(x) + \frac{\tau_1}{\lambda} \frac{dT_{n+1}(x)}{dx} + \frac{\tau_2}{\lambda} \frac{dT_{n+2}(x)}{dx}\,. \tag{3}$$

Надалі для зручності викладок вважатимемо число n парним і рівним $2s$.

1.3. Спряжена квазіспектральна задача для інтегрального оператора. Для рівняння (1) існує спряжене квазіспектральне рівняння

$$\sqrt{1-x^2}\int\limits_{-1}^{x}dx_1\int\limits_{-1}^{x_1}\frac{\bar U(x_2)}{\sqrt{1-x_2^2}}dx_2=-\lambda\bar U(x)+\frac{\bar c_1}{2}\left(\frac{T_1(x)}{2}-\sum_{i=2}^{s}\frac{T_{2i-1}(x)}{2i(i-1)}-\right.$$
$$\left.-\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{\pi}{2}\sqrt{1-x^2}\right)+\bar\tau_1T_{n+1}(x)+$$
$$+\frac{\bar c_2}{8}\left[T_0(x)-\sum_{i=1}^{s}\frac{2T_{2i}(x)}{(2i+1)(2i-1)}\right]+\bar\tau_2T_{n+2}(x)\,. \tag{4}$$

1.4. Спряжена квазіспектральна задача для диференційного оператора. Нехай

$$\bar V(x)=-\sqrt{1-x^2}\int\limits_{-1}^{x}\frac{\bar U(x_1)}{\sqrt{1-x_1^2}}dx_1\ .$$

Оскільки

$$-\frac{d}{dx}\left(\bar V(x)\Big/\sqrt{1-x^2}\right)=\bar U(x)\Big/\sqrt{1-x^2}\ , \tag{5}$$

то, внаслідок підстановки рівностей (5) у рівняння (4) отримаємо співвідношення

$$-\int\limits_{-1}^{x}\frac{\bar V(x_1)}{\sqrt{1-x_1^2}}dx_1=\lambda\frac{d}{dx}\left(\frac{\bar V(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right)+$$
$$+\frac{\bar c_1}{2}\left[\frac{T_1(x)}{2\sqrt{1-x^2}}-\sum_{i=2}^{s}\frac{T_{2i-1}(x)}{2i(i-1)\sqrt{1-x^2}}-\arcsin x-\frac{\pi}{2}\right]+$$
$$+\bar\tau_1\frac{T_{n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\bar c_2}{8}\left[\frac{T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}-\sum_{i=1}^{s}\frac{2T_{2i}(x)}{(2i+1)(2i-1)\sqrt{1-x^2}}\right]+\bar\tau_2\frac{T_{n+2}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Продиференціювавши за змінною x обидві частин останнього рівняння, одержимо рівність

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\bar V(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right)=-\frac{1}{\lambda}\bar V(x)-\frac{1}{\lambda}\frac{\bar c_1}{2}\frac{T_n(x)}{n(1-x^2)}-\frac{\bar\tau}{\lambda}\frac{(s+1)T_n(x)-sT_{n+2}(x)}{(1-x^2)}-$$
$$-\frac{\bar c_2}{8\lambda}\frac{T_{n+1}(x)}{(n+1)(1-x^2)}-\frac{\bar\tau_2}{\lambda}\frac{(n+3)T_{n+1}(x)-(n+1)T_{n+3}(x)}{2(1-x^2)}\,. \tag{6}$$

Для фіксованого λ, кожне з рівнянь вигляду (1), (3), (4), (6) розщеплюється на два, парну та непарну частини відповідно

$$\int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} U_{2i}^{2s}\left(x_2\right) dx_2 = -\lambda_{2i}^{n} U_{2i}^{2s}(x) + \tau_{2i}^{n} T_{n+2}(x) + w_2 T_0(x)\,, \tag{7}$$

$$\int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} U_{2i-1}^{2s-1}\left(x_2\right) dx_2 = -\lambda_{2i-1}^{n} U_{2i-1}^{2s-1}(x) + \tau_{2i-1}^{n} T_{n+1}(x) + w_1 T_0(x)\,,$$

$$\frac{d^2 V_{2i}^{2s}(x)}{dx^2} = -\frac{1}{\lambda_{2i-1}^{n}} V_{2i}^{2s}(x) + \frac{\tau_{2i-1}^{n}}{\lambda_{2i-1}^{n}} \frac{dT_{n+1}(x)}{dx}\,,$$

$$\frac{d^2 V_{2i-1}^{2s+1}(x)}{dx^2} = -\frac{1}{\lambda_{2i}^{n}} V_{2i-1}^{2s+1}(x) + \frac{\tau_{2i}^{n}}{\lambda_{2i}^{n}} \frac{dT_{n+2}(x)}{dx}\,. \tag{8}$$

Тут $V_n^m(x)$ визначається згідно формули (2), а саме

$$V_{2i}^{2s}(x) = \int_{-1}^{x} U_{2i-1}^{2s-1}\left(x_1\right) dx_1\,, \tag{9}$$

$$V_{2i-1}^{2s+1}(x) = \int_{-1}^{x} U_{2i}^{2s}\left(x_1\right) dx_1\,.$$

Далі

$$\sqrt{1-x^2}\int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} \frac{\overline{U}_{2i}^{2s}\left(x_2\right)}{\sqrt{1-x_2^2}} dx_2 = -\lambda_{2i}^{n} \overline{U}_{2i}^{2s}(x) +$$

$$+\frac{\overline{c}_2^{2i}}{8}\left[T_0(x) - \sum_{j=1}^{s} \frac{2T_{2j}(x)}{(2j+1)(2j-1)}\right] + \overline{\tau}_{2i}^{n} T_{n+2}(x)\,,$$

$$\sqrt{1-x^2}\int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} \frac{\overline{U}_{2i-1}^{2s-1}\left(x_2\right)}{\sqrt{1-x_2^2}} dx_2 = -\lambda \overline{U}_{2i-1}^{2s-1}(x) + \frac{\overline{c}_1^{2i-1}}{2}\left[\frac{T_1(x)}{2} - \right.$$

$$\left. -\sum_{j=2}^{s} \frac{T_{2j-1}(x)}{2j(j-1)} - \sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{\pi}{2}\sqrt{1-x^2}\right] + \overline{\tau}_{2i-1}^{n} T_{n+1}(x)\,,$$

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\overline{V}_{2i}^{2s}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{1}{\lambda_{2i-1}^{n}} \overline{V}_{2i}^{2s}(x) -$$

$$-\frac{1}{\lambda_{2i-1}^{n}} \frac{\overline{c}_1^{2i-1}}{2} \frac{T_n(x)}{n\left(1-x^2\right)} - \frac{\overline{\tau}_{2i-1}^{n}}{\lambda_{2i-1}^{n}} \frac{(s+1)T_n(x) - sT_{n+2}(x)}{\left(1-x^2\right)}\,, \tag{10}$$

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\overline{V}_{2i-1}^{2s+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{1}{\lambda_{2i}^{n}} \overline{V}_{2i-1}^{2s+1}(x) - \frac{1}{\lambda_{2i}^{n}} \frac{\overline{c}_2^{2i}}{8} \frac{T_{n+1}(x)}{(n+1)\left(1-x^2\right)} -$$

$$-\frac{\overline{\tau}_{2i}^{n}}{\lambda_{2i}^{n}}\frac{(n+3)T_{n+1}(x)-(n+1)T_{n+3}(x)}{2\left(1-x^{2}\right)}. \tag{11}$$

В останніх рівностях позначено:

$$\overline{V}_{2i}^{2s}(x)=-\sqrt{1-x^{2}}\int_{-1}^{x}\frac{\overline{U}_{2i-1}^{2s-1}\left(x_{1}\right)}{\sqrt{1-x_{1}^{2}}}dx_{1}\,, \tag{12}$$

$$\overline{V}_{2i-1}^{2s+1}(x)=-\sqrt{1-x^{2}}\int_{-1}^{x}\frac{\overline{U}_{2i}^{2s}\left(x_{1}\right)}{\sqrt{1-x_{1}^{2}}}dx_{1}\,.$$

2. Властивості квазіортогональних і біортогональних функцій

2.1. Біортогональність поліномів $V_i(x)$ та $\overline{V}_i(x)$.

Твердження. Многочлени $U_i(x),\overline{U}_i(x)$ і $V_i(x),\overline{V}_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, утворюють біортогональні системи з вагою $\rho(x)=\left(1-x^{2}\right)^{-1/2}$ на проміжку $[-1,1]$.

Справджується рівність [1]

$$\int_{-1}^{1}\rho(x)U_{i}(x)\overline{U}_{j}(x)dx=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ \sigma_{i}, & i=j.\end{cases}. \tag{13}$$

Помножимо обидві частини рівняння (7) на $\overline{U}_{2i}^{2s}(x)$. Зінтегруємо знайдену рівність за змінною *x* з вагою $\rho(x)$. Дістанемо

$$\int_{-1}^{1}\rho(x)\overline{U}_{2i}^{2s}(x)\int_{-1}^{x}dx_{1}\int_{-1}^{x_{1}}U_{2i}^{2s}\left(x_{2}\right)dx_{2}dx=-\lambda_{2i}^{n}\int_{-1}^{1}\rho(x)\overline{U}_{2i}^{2s}(x)U_{2i}^{2s}(x)dx+$$

$$+\tau_{2i}^{n}\int_{-1}^{1}\rho(x)\overline{U}_{2i}^{2s}(x)T_{n+2}(x)dx+w_{2}\int_{-1}^{1}\rho(x)\overline{U}_{2i}^{2s}(x)T_{0}(x)dx\,.$$

Степінь многочленів $\overline{U}_{2i}^{2s}(x)$ не перевищує *n*. Внаслідок ортогональності поліномів Чебишова другий і третій інтеграли у правій частині дорівнюють нулеві. Враховуючи рівність (13) та означеня (8) і (11), з останнього співвідношення отримаємо

$$\int_{-1}^{1}\rho(x)\overline{V}_{2i-1}^{2s+1}(x)V_{2i-1}^{2s+1}(x)dx=-\lambda_{2i}^{n}\sigma_{2i}^{n}\,.$$

З урахуванням (13), (9), (12) маємо

$$\int_{-1}^{1} \rho(x)\overline{V}_{2i}^{2s}(x)V_{2i}^{2s}(x)dx = -\lambda_{2i-1}^{n}\sigma_{2i-1}^{n} .$$

Таким чином, многочлени $V_i(x)$ та $\overline{V}_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, є біортогональні на проміжку $[-1,1]$ з вагою $\rho(x)=\left(1-x^2\right)^{-1/2}$

$$\int_{-1}^{1} \rho(x)\overline{V}_{2i-1}^{2s+1}(x)V_{2i-1}^{2s+1}(x)dx = \begin{cases} 0, & i\neq j, \\ -\lambda_{2i}^{n}\sigma_{2i}^{n}, & i=j, \end{cases},$$

$$\int_{-1}^{1} \rho(x)\overline{V}_{2i}^{2s}(x)V_{2i}^{2s}(x)dx = \begin{cases} 0, & i\neq j, \\ -\lambda_{2i-1}^{n}\sigma_{2i-1}^{n}, & i=j, \end{cases}$$

і володіють властивостями $V_i(-1)=V_i(1)=0$, $\overline{V}_i(-1)=\overline{V}_i(1)=0$.

2.2. Подання поліномів Чебишова через біортогональні функції. Для поліномів Чебишова та їх похідних справджуються рівності

$$T_n'(1)=n^2, \quad T_n'(-1)=(-1)^{n-1}T_n'(1), \quad T_n(1)=1, \quad T_n(-1)=(-1)^n,$$

$$\int_{-1}^{1}\rho(x)\left(T_n(x)\right)^2 dx=\frac{\pi}{2}, \quad \int_{-1}^{1}\rho(x)\left(T_0(x)\right)^2 dx=\pi, \quad \int_{-1}^{1}\rho(x)\left(T_n'(x)\right)^2 dx=n^3\pi .$$

Враховуючи останні співвідношення, домножимо обидві частини рівності (9) на поліном Чебишова $T_{2s}(x)$ та зінтегруємо за змінною x із вагою $\rho(x)$. Отримаємо

$$\int_{-1}^{1}\rho(x)T_{2s}(x)\frac{d^2V_{2i}^{2s}(x)}{dx^2}dx = -\frac{1}{\lambda_{2i-1}^{n}}\int_{-1}^{1}\rho(x)T_{2s}(x)V_{2i}^{2s}(x)dx + $$

$$+\frac{\tau_{2i-1}^{n}}{\lambda_{2i-1}^{n}}\int_{-1}^{1}\rho(x)T_{2s}(x)T_{n+1}'(x)dx, \quad i=\overline{1,s}. \tag{14}$$

Степінь поліномів $V_{2i}^{2s}(x)$ не перевищує $2s$. Внаслідок ортогональності поліномів Чебишова інтеграл у лівій частині дорівнює нулеві. Оскільки

$$\int_{-1}^{1}\rho(x)T_{2s}(x)T_{2s+1}'(x)dx=(2s+1)\pi, \tag{15}$$

то зі співвідношення (14) матимемо

$$\int_{-1}^{1}\rho(x)T_{2s}(x)V_{2i}^{2s}(x)dx=\tau_{2i-1}^{n}(2s+1)\pi . \tag{16}$$

Аналогічно з рівності (10) дістанемо

$$\int_{-1}^{1}\rho(x)T_{2s}(x)\overline{V}_{2i}^{2s}(x)dx=-\overline{\tau}_{2i-1}^{n}(2s)\pi\,. \tag{17}$$

Із рівностей (15)-(17) випливають формули

$$T_{2s+\overline{i}}(x)-\frac{1}{\left(2s+1+\overline{i}\right)^{2}}\frac{d}{dx}T_{2s+1+\overline{i}}(x)=$$
$$=-\left(2s+1+\overline{i}\right)\pi\sum_{i=1}^{s}\tau_{2i-1+\overline{i}}^{n}\frac{\overline{V}_{2i-\overline{i}}^{2s+\overline{i}}(x)}{\lambda_{2i-1+\overline{i}}^{n}\sigma_{2i-1+\overline{i}}^{n}},$$
$$T_{2s+\overline{i}}(x)-\frac{1}{\left(2s+1+\overline{i}\right)^{2}}\frac{d}{dx}T_{2s+1+\overline{i}}(x)=\left(2s+\overline{i}\right)\pi\sum_{i=1}^{s}\overline{\tau}_{2i-1+\overline{i}}^{n}\frac{V_{2i-\overline{i}}^{2s+\overline{i}}(x)}{\lambda_{2i-1+\overline{i}}^{n}\sigma_{2i-1+\overline{i}}^{n}}, \tag{18}$$

де $\overline{i}=0$ — для парних функцій та $\overline{i}=1$ — для непарних функцій.

Так само отримуються формули

$$T_{2s-\overline{i}}(x)=2\left(2s+2-\overline{i}\right)\left(2s+1-\overline{i}\right)\pi\sum_{i=1}^{s}\tau_{2i-\overline{i}}^{n}\frac{\overline{U}_{2i-\overline{i}}^{2s-\overline{i}}(x)}{\sigma_{2i-\overline{i}}^{n}},$$
$$T_{2s-\overline{i}}(x)+\frac{1-\overline{i}}{\left(2s-1\right)\left(2s+1\right)}=2\left(2s+1-\overline{i}\right)\left(2s-\overline{i}\right)\pi\sum_{i=1}^{s}\overline{\tau}_{2i-\overline{i}}^{n}\frac{U_{2i-\overline{i}}^{2s-\overline{i}}(x)}{\sigma_{2i-\overline{i}}^{n}}.$$

Внаслідок ортогональності поліномів маємо

$$T_{2s-2+\overline{i}}(x)-\frac{1}{\left(2s+1+\overline{i}\right)^{2}}\frac{d}{dx}T_{2s+1+\overline{i}}(x)=-\left(2s+1+\overline{i}\right)\pi\times$$
$$\times\sum_{i=1}^{s}\tau_{2i-1+\overline{i}}^{n}\left(1-4\left(2s+\overline{i}\right)\left(2s-1+\overline{i}\right)\lambda_{2i-1+\overline{i}}^{n}\right)\frac{\overline{V}_{2i-\overline{i}}^{2s+\overline{i}}(x)}{\lambda_{2i-1+\overline{i}}^{n}\sigma_{2i-1+\overline{i}}^{n}}, \tag{19}$$
$$T_{2s-2+\overline{i}}(x)-\frac{1}{\left(2s+1+\overline{i}\right)^{2}}\frac{d}{dx}T_{2s+1+\overline{i}}(x)=$$
$$=\pi\sum_{i=1}^{s}\left\{\left(2s-2+\overline{i}\right)\overline{\tau}_{2i-1+\overline{i}}^{n}\left[1-4\left(2s+\overline{i}\right)\left(2s-1+\overline{i}\right)\lambda_{2i-1+\overline{i}}^{n}\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{\overline{c}_{1+\overline{i}}^{2i-1+\overline{i}}}{2\left[s\left(3\overline{i}+1\right)+2\overline{i}\right]}\right\}\frac{\overline{V}_{2i-\overline{i}}^{2s+\overline{i}}(x)}{\lambda_{2i-1+\overline{i}}^{n}\sigma_{2i-1+\overline{i}}^{n}},$$

$$T_{2s-2-\bar{i}}(x) = 4\left(2s+2-\bar{i}\right)\left(2s-\bar{i}\right)\pi \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{s} \tau_{2i-\bar{i}}^{n}\left[1-2\left(2s+1-\bar{i}\right)\left(2s-1-\bar{i}\right)\lambda_{2i-\bar{i}}^{n}\right]\frac{\bar{U}_{2i-\bar{i}}^{2s-\bar{i}}(x)}{\sigma_{2i-\bar{i}}^{n}},$$

$$T_{2s-2-\bar{i}}(x) + \frac{1}{\left(2s-3\right)\left(2s-1\right)} = \pi\sum_{i=1}^{s}\left\{4\left(2s-\bar{i}\right)\left(2s-2-\bar{i}\right)\bar{\tau}_{2i-\bar{i}}^{n} \times\right.$$
$$\left.\times\left[1-2\left(2s+1-\bar{i}\right)\left(2s-1-\bar{i}\right)\lambda_{2i-\bar{i}}^{n}\right] - \left(1+\bar{i}\right)\frac{\left(2s-2-\bar{i}\right)\bar{c}_{2-\bar{i}}^{2i-\bar{i}}}{4\left(2s+1-\bar{i}\right)\left(2-\bar{i}\right)}\right\}\frac{U_{2i-\bar{i}}^{2s-\bar{i}}(x)}{\sigma_{2i-\bar{i}}^{n}}.$$

3. Побудова рекурентних формул

3.1. Рекурентні формули для коефіцієнтів розкладу многочленів Чебишова в ряд за функціями $\bar{V}_{2i-\bar{i}}^{2s+\bar{i}}(x)$ та $V_{2i-\bar{i}}^{2s+\bar{i}}(x)$.

Оскільки

$$\bar{q}_{2i-\bar{i}}^{2s+\bar{i}} = \int_{-1}^{1}\rho(x)T_{2s+\bar{i}}(x)V_{2i-\bar{i}}^{2s+\bar{i}}(x)dx = \left(2s+1+\bar{i}\right)\pi\tau_{2i-1+\bar{i}}^{n}, \tag{20}$$

то з формули (19) випливає рівність

$$\bar{q}_{2i-\bar{i}}^{2s-2+\bar{i}} = \int_{-1}^{1}\rho(x)T_{2s-2+\bar{i}}(x)V_{2i-\bar{i}}^{2s+\bar{i}}(x)dx =$$
$$= \left(2s+1+\bar{i}\right)\pi\tau_{2i-1+\bar{i}}^{n}\left[1-4\left(2s+\bar{i}\right)\left(2s-1+\bar{i}\right)\lambda_{2i-1+\bar{i}}^{n}\right]. \tag{21}$$

Отже, якщо $T_{2s-2j+\bar{i}}(x) - \dfrac{T'_{2s+1+\bar{i}}(x)}{\left(2s+1+\bar{i}\right)^{2}} = \sum_{i=1}^{s} -\bar{q}_{2i-\bar{i}}^{2s-2j+\bar{i}}\dfrac{\bar{V}_{2i-\bar{i}}^{2s+\bar{i}}(x)}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^{n}\sigma_{2i-1+\bar{i}}^{n}}$, $j=\overline{2,s}$, то коефіцієнти $\bar{q}_{2i-\bar{i}}^{2s-2j+\bar{i}}$ знаходяться за рекурентною формулою

$$\bar{q}_{2i-\bar{i}}^{2s-2j+\bar{i}} = 2\frac{\left(2s-2j+2+\bar{i}\right)}{\left(2s-2j+3+\bar{i}\right)}\left[1-2\left(2s-2j+3+\bar{i}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(2s-2j+1+\bar{i}\right)\lambda_{2i-1+\bar{i}}^{n}\right]\bar{q}_{2i-\bar{i}}^{2s-2j+2+\bar{i}} - \frac{\left(2s-2j+1+\bar{i}\right)}{\left(2s-2j+3+\bar{i}\right)}\bar{q}_{2i-\bar{i}}^{2s-2j+4+\bar{i}}, \quad j=\overline{2,s}. \tag{22}$$

Згідно співвідношення (18) матимемо

$$q_{2i-\bar{i}}^{2s+\bar{i}} = \int_{-1}^{1}\rho(x)T_{2s+\bar{i}}(x)\bar{V}_{2i-\bar{i}}^{2s+\bar{i}}(x)dx = -\left(2s+\bar{i}\right)\pi\bar{\tau}_{2i-1+\bar{i}}^{n},$$

$$q_{2i-\bar{i}}^{2s-2+\bar{i}} = \int_{-1}^{1} \rho(x) T_{2s-2+\bar{i}}(x) \bar{V}_{2i-\bar{i}}^{2s+\bar{i}}(x) dx = -\left(2s-2+\bar{i}\right)\pi\bar{\tau}_{2i-1+\bar{i}}^{n} \times$$

$$\times\left[1-4\left(2s+\bar{i}\right)\left(2s-1+\bar{i}\right)\lambda_{2i-1+\bar{i}}^{n}\right] + \frac{\pi\bar{c}_{1+\bar{i}}^{2i-1+\bar{i}}}{2\left[s\left(2\bar{i}+1\right)+2\bar{i}\right]} \tag{23}$$

і для коефіцієнтів $q_{2i-\bar{i}}^{2s-2j+\bar{i}}$ отримуємо рекурентну формулу

$$q_{2i-\bar{i}}^{2s-2j+\bar{i}} = 2\frac{\left(2s-2j+\bar{i}\right)}{\left(2s-2j+3+\bar{i}\right)}\left[1-2\left(2s-2j+3+\bar{i}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(2s-2j+1+\bar{i}\right)\lambda_{2i-1+\bar{i}}^{n}\right] q_{2i-\bar{i}}^{2s-2j+2+\bar{i}} - \frac{\left(2s-2j+1+\bar{i}\right)\left(2s-2j+\bar{i}\right)}{\left(2s-2j+3+\bar{i}\right)\left(2s-2j+4+\bar{i}\right)}\times$$

$$\times q_{2i-\bar{i}}^{2s-2j+4+\bar{i}} + \frac{6\pi\bar{c}_{1+\bar{i}}^{2i-1+\bar{i}}}{\left(1+3\bar{i}\right)\left(2s-2j+3+\bar{i}\right)\left(2s-2j+4+\bar{i}\right)}, \quad j=\overline{2,s}. \tag{24}$$

3.2. Рекурентні формули для коефіцієнтів розкладу многочленів Чебишова в ряд за функціями $\bar{U}_{2i-\bar{i}}^{2s-\bar{i}}(x)$ та $U_{2i-\bar{i}}^{2s-\bar{i}}(x)$. Використовуючи рівності

$$\bar{g}_{2i-\bar{i}}^{2s-\bar{i}} = \int_{-1}^{1} \rho(x) T_{2s-\bar{i}}(x) U_{2i-\bar{i}}^{2s-\bar{i}}(x) dx = 2\left(2s+2-\bar{i}\right)\left(2s+1-\bar{i}\right)\pi\tau_{2i-\bar{i}}^{n}, \tag{25}$$

$$g_{2i-\bar{i}}^{2s-\bar{i}} = \int_{-1}^{1} \rho(x) T_{2s-\bar{i}}(x) \bar{U}_{2i-\bar{i}}^{2s-\bar{i}}(x) dx = 2\left(2s+1-\bar{i}\right)\left(2s-\bar{i}\right)\pi\bar{\tau}_{2i-\bar{i}}^{n}, \tag{26}$$

отримуємо такі рекурентні формули

$$\bar{g}_{2i-\bar{i}}^{2s-2j-\bar{i}} = 2\frac{\left(2s-2j+2+\bar{i}\right)}{\left(2s-2j+3+\bar{i}\right)}\left[1-2\left(2s-2j+3-\bar{i}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(2s-2j+1-\bar{i}\right)\lambda_{2i-\bar{i}}^{n}\right]\bar{g}_{2i-\bar{i}}^{2s-2j+2-\bar{i}} - \frac{\left(2s-2j+1-\bar{i}\right)}{\left(2s-2j+3-\bar{i}\right)}\bar{g}_{2i-\bar{i}}^{2s-2j+4-\bar{i}}, \quad j=\overline{2,s-1}, \tag{27}$$

$$g_{2i-\bar{i}}^{2s-2j-\bar{i}} = 2\frac{\left(2s-2j-\bar{i}\right)}{\left(2s-2j+3-\bar{i}\right)}\left[1-2\left(2s-2j+3-\bar{i}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(2s-2j+1-\bar{i}\right)\lambda_{2i-\bar{i}}^{n}\right] g_{2i-\bar{i}}^{2s-2j+2-\bar{i}} - \frac{\left(2s-2j+1-\bar{i}\right)\left(2s-2j-\bar{i}\right)}{\left(2s-2j+3-\bar{i}\right)\left(2s-2j+4-\bar{i}\right)}\times$$

$$\times g_{2i-\bar{i}}^{2s-2j+4-\bar{i}} - \frac{\left(1+\bar{i}\right)\left(2s-2j-\bar{i}\right)\pi\bar{c}_{2-\bar{i}}^{2i-\bar{i}}}{\left(2-\bar{i}\right)\left(2s-2j+3-\bar{i}\right)}, \quad j=\overline{2,s-1}. \tag{28}$$

4. Зведення рядів Фур'є-Чебишова до біортогональних розкладів

Нехай

$$f(x)=\sum_{i=1}^{s+1} f_{2i-2+\overline{i}}T_{2i-2+\overline{i}}(x). \tag{29}$$

Підставимо у розклад (29) знайдені подання многочленів Чебишова згідно з формулами (20)-(24). Після тотожних математичних перетворень матимемо

$$f(x)=\sum_{i=1}^{s}-\frac{\overline{V}_{2i-\overline{i}}^{2s+\overline{i}}(x)}{\lambda_{2i-1+\overline{i}}^{n}\sigma_{2i-1+\overline{i}}^{n}}\sum_{k=1}^{s+1} f_{2k-2+\overline{i}}\overline{q}_{2i-\overline{i}}^{2k-2+\overline{i}}+\sum_{k=1}^{s+1} f_{2k-2+\overline{i}}\frac{T'_{2s+1+\overline{i}}(x)}{\left(2s+1+\overline{i}\right)^2},$$

$$f(x)=\sum_{i=1}^{s}-\frac{V_{2i-\overline{i}}^{2s+\overline{i}}(x)}{\lambda_{2i-1+\overline{i}}^{n}\sigma_{2i-1+\overline{i}}^{n}}\sum_{k=1}^{s+1} f_{2k-2+\overline{i}}q_{2i-\overline{i}}^{2k-2+\overline{i}}+\sum_{k=1}^{s+1} f_{2k-2+\overline{i}}\frac{T'_{2s+1+\overline{i}}(x)}{\left(2s+1+\overline{i}\right)^2}.$$

Якщо ж $\tilde{f}(x)=\sum_{i=1}^{s}\tilde{f}_{2i-\overline{i}}T_{2i-\overline{i}}(x)$, то, використовуючи формули (25)-(28), отримаємо розклади

$$\tilde{f}(x)=\sum_{i=1}^{s}\frac{\overline{U}_{2i-\overline{i}}^{2s-\overline{i}}(x)}{\sigma_{2i-\overline{i}}^{n}}\sum_{k=1}^{s}\tilde{f}_{2k-\overline{i}}\overline{g}_{2i-\overline{i}}^{2k-\overline{i}},$$

$$\tilde{f}(x)=\sum_{i=1}^{s}\frac{U_{2i-\overline{i}}^{2s-\overline{i}}(x)}{\sigma_{2i-\overline{i}}^{n}}\sum_{k=1}^{s}\tilde{f}_{2k-\overline{i}}g_{2i-\overline{i}}^{2k-\overline{i}}-\sum_{k=1}^{s}\tilde{f}_{2k-\overline{i}}\frac{1-\overline{i}}{(2k-1)(2k+1)}.$$

Висновки. У роботі досліджено властивості спектральних розкладів, отриманих на базі многочленів Чебишова. Побудовано рекурентні формули для подання одного базису, що вивчається, через інший і формули переходу від одного спектрального розкладу до іншого.

Література

[1] *П'янило Я. Д., Собко В. Г.* Побудова та дослідження біортогональних поліномів на базі многочленів Чебишева // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2013. — Вип. 11. — С. 135-141.

[2] *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1998. — 370 с.

[3] *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — Москва: Наука, 1977. — 512 с.

[4] *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. — Москва: Наука, 1987. — 424 с.

Investigation of spectral decomposition characteristics in the bases of the orthogonal, quasiorthogonal and biorthogonal polynomials

Yaroslav Pjanylo, Valentyna Sobko

The characteristics of the spectral schedules based on the Chebyshev orthogonal polynomials are investigated in this work. The connections between the various constructed bases and the corresponding spectral schedules are found.

Исследование свойств спектральных разложений в базисах ортогональных, квазиортогональных и биортогональных полиномов

Ярослав Пьяныло, Валентина Собко

В работе исследованы свойства спектральных разложений на базе ортогональных многочленов Чебышева. Найдена связь между различными построенными базисами и соответствующими спектральными разложениями.

Отримано 04.06.14