

Термонапружений стан біматеріалу з періодичною системою міжфазних тріщин, заповнених теплопровідною речовиною

Христина Середницька¹, Ростислав Мартиняк²

¹ Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

² д. ф.-м. н., с. н. с, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Досліджено термопружну поведінку біматеріалу, послабленого періодичною системою міжфазних тріщин, заповнених теплопровідним середовищем. Із використанням методу комплексних потенціалів задачу зведено до нелінійної системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь стосовно стрибка температури між берегами тріщин та їх розкриття. Побудовано аналітично-числовий розв'язок цієї системи. Проаналізовано вплив заповнювача тріщин і тріщинуватості міжфазної границі на розкриття тріщин і коефіцієнти інтенсивності міжфазних напружень.

Ключові слова: біматеріал, міжфазні тріщини, теплопровідний заповнювач, розкриття тріщин, коефіцієнти інтенсивності напружень.

Вступ. У працях [1, 2] започатковано дослідження в галузі термопружності тіл із тріщиноподібними дефектами, між поверхнями яких відбувається теплообмін. Вони базувалися на моделі Я. С. Підстригача теплового контакту тіл через тонкий прошарок, в якій вплив заповнювача дефекту враховується його усередненими термічними характеристиками.

У монографіях [3, 4] наведено розв'язки низки плоских і просторових задач термопружності для однорідних тіл із тріщинами, усереднені термічні характеристики яких фіксовані та не залежать від їх розкриття, зумовленого навантаженням. Теплові напруження у біматеріальних тілах із міжфазними дефектами з фіксованим термоопором вивчено у працях [5-7], де, зокрема, виявлено, що такий термоопір може зумовити частковий контакт їх берегів. Досліджено виникнення контакту берегів міжфазної термоізолюваної тріщини на привершинних ділянках внаслідок термічних деформацій [8].

Термонапружений стан композитних тіл із цілком або частково закритими дефектами з урахуванням шорсткості їх поверхонь і зумовленої нею залежності термоопору від контактного тиску поверхонь досліджено у працях [9-12]. Вивчено термомеханічну поведінку біматеріалу з поодинокую міжфазною тріщиною, що містить теплопроникний заповнювач, термоопір якого залежить від її розкриття [13].

У працях [14, 15] окрім змінного термоопору заповнювача дефекту враховано ще й термоопір плівок на його берегах.

Нижче досліджено термонапружений стан біматеріалу з періодичною системою міжфазних тріщин, які заповнені теплопровідним середовищем.

1. Формулювання задачі

Розглянемо біматеріальне тіло, складене з півплощин D_1 і D_2 , матеріали яких характеризуються однаковими модулями зсуву G та коефіцієнтами Пуассона ν і різними коефіцієнтами теплопровідності λ_1, λ_2 та коефіцієнтами лінійного теплового розширення α_1, α_2 . На лінії з'єднання компонент біматеріалу з періодом d розташовані міжфазні тріщини однакової довжини $2a$ ($2a < d$) (рис. 1). На безмежності біматеріал піддається дії перпендикулярних до міжфазної лінії розтягувальних зусиль p і стаціонарного однорідного теплового потоку q , що зумовлюють розкриття тріщин. Порожнини тріщин заповнені теплопровідним середовищем із коефіцієнтом теплопровідності λ_c . Вважаємо, що заповнювач тріщин не чинить опору деформуванню тіла.

Вплив заповнювача тріщин на теплообмін між їх поверхнями будемо враховувати [13] термоопором $r(x)$, який пропорційний розкриттю тріщин $h(x)$, набутому після навантаження, й обернено пропорційний коефіцієнту теплопровідності заповнювача λ_c : $r(x) = h(x)/\lambda_c$.

На міжфазних ділянках поза тріщинами виконуються умови ідеального теплового та механічного контакту півплощин D_1 і D_2 .

Щоб запобігти глобальному викривленню тіл, зумовленому тепловим потоком q , та видовженню тіл вздовж осі $0x$, зумовленому різницею температур на берегах тріщин, до кожної з півплощин D_n ($n = 1, 2$) прикладено лінійно розподілені по координаті y зусилля $\sigma_{x_n}^\infty = \sigma_{n0} + \sigma_{n1}y$.

Крайові умови сформульованої задачі теплопровідності та термопружності мають вигляд:

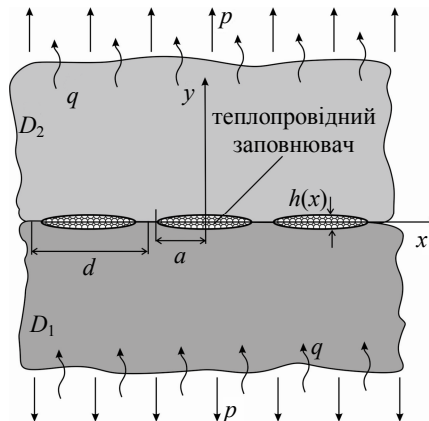


Рис. 1

на ділянках контакту півплощин ($y = 0$, $x \in (a + kd, -a + (k + 1)d$), $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$T^+ = T^-, \quad q_y^+ = q_y^-, \quad (1)$$

$$\sigma_y^+ = \sigma_y^-, \quad \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^-, \quad u^+ = u^-, \quad v^+ = v^-, \quad (2)$$

на ділянках з тріщинами ($y = 0$, $x \in (-a + kd, a + kd$), $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$T^- - T^+ = q_y^+ \frac{h(x)}{\lambda_c}, \quad q_y^+ = q_y^-, \quad (3)$$

$$\sigma_y^+ = 0, \quad \sigma_y^- = 0, \quad \tau_{xy}^+ = 0, \quad \tau_{xy}^- = 0, \quad (4)$$

на нескінченності в кожній з півплощин:

$$q_y^\infty = q, \quad q_x^\infty = 0, \quad (5)$$

$$\sigma_y^\infty = p, \quad \tau_{xy}^\infty = 0, \quad \sigma_{x_n}^\infty = \sigma_{n0} + \sigma_{n1} y \quad (n = 1, 2). \quad (6)$$

Тут T — температура, q_x, q_y — компоненти вектора теплового потоку, $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ — компоненти тензора напружень, u, v — компоненти вектора переміщень, індексами «+» і «-» позначено граничні значення функції на осі Ox у верхній і нижній півплощинах відповідно.

2. Методика розв'язування задачі

Застосовуючи метод комплексних потенціалів, температуру, теплові потоки, напруження та похідні від переміщень у біматеріалі подамо через нормальне розкриття тріщин $h(x) = -(v^- - v^+)$ і стрибки температури $\gamma(x) = T^- - T^+$ і дотичних переміщень $U(x) = -(u^- - u^+)$ між берегами тріщин:

$$T = \operatorname{Re} \left[F(z) + \frac{iqz}{\lambda_n} + \frac{(-1)^{n+1}}{2} \gamma_{ef} \right], \quad q_x - i q_y = -\lambda_n F'(z) - i q, \quad (7)$$

$$2G \frac{\partial}{\partial x} (u + iv) = \kappa \Phi_n(z) + \Phi_n(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi_n'(z)} + 2\alpha_n(1 + \nu)GF(z), \quad (8)$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re}[\Phi_n(z)] + \sigma_{x_n}^\infty + p, \quad (9)$$

$$\sigma_y - i \tau_{xy} = \Phi_n(z) - \Phi_n(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi_n'(z)} + p, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) = -\Phi_2(z) = & \frac{(-1)^n}{K} 2\alpha_n(1 + \nu)F(z) - \\ & - \frac{(-1)^n}{Kd} \left[i \int_{-a}^a U'(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-z)}{d} \right) dt + \int_{-a}^a h'(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-z)}{d} \right) dt \right], \end{aligned} \quad (11)$$

$$F(z) = \frac{\lambda i}{2\lambda_n d} \int_{-a}^a (\gamma(t) - \gamma_{ef}) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-z)}{d} \right) dt, \quad z \in D_n \quad (n = 1, 2), \quad (12)$$

де $z = x + iy$ — комплексна змінна, $\lambda = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, $\eta_n = \frac{\alpha_n(1+\nu)}{\lambda_n}$, $K = \frac{(1+\kappa)}{G}$,
 $\kappa = 3 - 4\nu$, $\sigma_{x_n}^\infty = \frac{2G\eta_n q y}{1-\nu} + (-1)^n \frac{G\eta_n \lambda}{1-\nu} \gamma_{ef}$, $\gamma_{ef} = \frac{1}{d} \int_{-a}^a \gamma(x) dx$ — усереднений між-
 фазний стрибок температури.

Параметр η_n , що називається термічною дистортивністю матеріалу, характеризує термічне викривлення прямолінійного елемента, зумовлене перпендикулярним до нього тепловим потоком одиничної інтенсивності.

Для визначення невідомих функцій $\gamma(x)$, $h(x)$, $U(x)$ отримаємо нелінійну систему сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь з ядром Гільберта, яку після заміни змінних $\xi = \operatorname{tg}(\pi x/d)$, $\eta = \operatorname{tg}(\pi t/d)$, $\alpha = \operatorname{tg}(\pi a/d)$ зведемо до системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь з ядром Коші:

$$\frac{\gamma(\xi)}{(1+\xi^2)(h(\xi)/\lambda_c)} - \frac{\lambda}{2d} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\gamma'(t)}{t-\xi} dt = \frac{q}{(1+\xi^2)}, \quad |\xi| < \alpha, \quad \gamma(\pm\alpha) = 0, \quad (13)$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(t)}{t-\xi} dt + \frac{\lambda(\eta_2 - \eta_1)d}{2} \frac{\gamma(\xi) - \gamma_{ef}}{1+\xi^2} = -\frac{d}{2} \frac{Kp}{1+\xi^2}, \quad |\xi| < \alpha, \quad h(\pm\alpha) = 0, \quad (14)$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{U'(t)}{t-\xi} dt - \frac{\lambda(\eta_1 + \eta_2)d}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\gamma(t)}{(1+t^2)(t-\xi)} dt =$$

$$= \frac{\lambda(\eta_1 + \eta_2)d}{2\pi} \frac{\xi}{1+\xi^2} \gamma_{ef}, \quad |\xi| < \alpha, \quad U(\pm\alpha) = 0. \quad (15)$$

З рівняння (15) визначаємо функцію $U'(\xi)$ через функцію $\gamma(\xi)$:

$$U'(\xi) = \frac{\lambda d(\eta_1 + \eta_2)}{2\pi(1+\xi^2)} \left[\gamma(\xi) - \frac{\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}} \gamma_{ef} \right], \quad |\xi| < \alpha. \quad (16)$$

Отже, задача зводиться до нелінійної системи рівнянь (13), (14), для розв'язування якої використовуємо аналітично-числову процедуру, запропоновану в праці [13] для біматеріалу з одною заповненою тріщиною.

За відомими функціями $\gamma(x)$, $h(x)$ визначаємо [15] коефіцієнти інтенсивності нормальних K_I і дотичних K_{II} міжфазних напружень:

$$K_I = -2 \lim_{x \rightarrow a} \left[\sqrt{\frac{\pi(a^2 - x^2)}{a}} h'(x) \right], \quad K_{II} = -\frac{(\eta_1 + \eta_2)\lambda\sqrt{d}\gamma_{ef}}{\sqrt{\operatorname{tg}(\pi a/d)}}.$$

У працях [13, 15] для біматеріалу з поодинокую міжфазною тріщиною з теплопровідним заповнювачем виявлено ефект напрямленості теплового потоку, який полягає у тому, що термомеханічна поведінка берегів тріщини істотно

залежить від того, чи потік скерований від матеріалу з меншою термічною дистортивністю до матеріалу з більшою термічною дистортивністю (тобто $q(\eta_2 - \eta_1) > 0$), чи від матеріалу з більшою термічною дистортивністю до матеріалу з меншою термічною дистортивністю (тобто $q(\eta_2 - \eta_1) < 0$). Тут будемо аналізувати, як проявляється ефект напрямленості у біматеріалі з періодичною системою міжфазних тріщин.

3. Аналіз числових результатів

Для числових розрахунків введемо в розгляд безрозмірні величини $\bar{x} = x/d$, $\bar{a} = a/d$, $\bar{h} = h/d$, $\bar{p} = pK$, $\bar{\gamma} = \gamma\lambda(\eta_2 - \eta_1)$, $\bar{q} = qd(\eta_2 - \eta_1)$, $\bar{\lambda}_c = \lambda_c/\lambda$, $\bar{K}_I = K_I K / \sqrt{d}$, $\bar{K}_{II} = \frac{(\eta_2 - \eta_1)K}{(\eta_2 + \eta_1)\sqrt{d}} K_{II}$.

Безрозмірний тепловий потік додатний ($\bar{q} > 0$), якщо потік скерований до матеріалу з більшою термічною дистортивністю, і від'ємний ($\bar{q} < 0$), якщо потік скерований до матеріалу з меншою термічною дистортивністю.

Частку міжфазної лінії, зайняту тріщинами, характеризуватимемо коефіцієнтом міжфазної тріщинуватості $\bar{k}_t = 2a/d$ ($0 < \bar{k}_t < 1$).

На рис. 2 зображено залежність максимального розкриття тріщини \bar{h}_{max} , яке досягається посередині тріщини ($\bar{h}_{max} = \bar{h}(0)$), від теплопровідності заповнювача $\bar{\lambda}_c$ для фіксованих зусиль $\bar{p} = 0,01$ і густини потоку $|\bar{q}| = 0,009$ та різних значень коефіцієнта тріщинуватості \bar{k}_t ($\bar{k}_t = 0,4$; $\bar{k}_t = 0,6$). Бачимо, що максимальне розкриття тріщини \bar{h}_{max} зростає з ростом теплопровідності заповнювача $\bar{\lambda}_c$ у випадку, коли тепловий потік скеровано до матеріалу з меншою термічною дистортивністю ($\bar{q} < 0$), і спадає для протилежного напрямку теплового потоку ($\bar{q} > 0$). Зі збільшенням міжфазної тріщинуватості максимальне розкриття \bar{h}_{max}

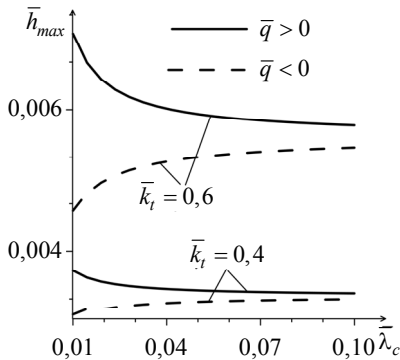


Рис. 2

зростає незалежно від напрямку теплового потоку, а різниця між значеннями максимального розкриття тріщини для двох протилежних напрямів теплового потоку тим більша, чим більший коефіцієнт тріщинуватості \bar{k}_t .

На рис. 3, 4 проілюстровано залежності коефіцієнтів інтенсивності нормальних \bar{K}_I і дотичних \bar{K}_{II} міжфазних напружень від теплопровідності заповнювача $\bar{\lambda}_c$ для фіксованих зусиль $\bar{p} = 0,01$ і густини потоку $|\bar{q}| = 0,009$ та різних

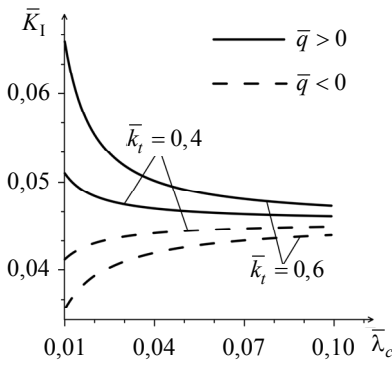


Рис. 3

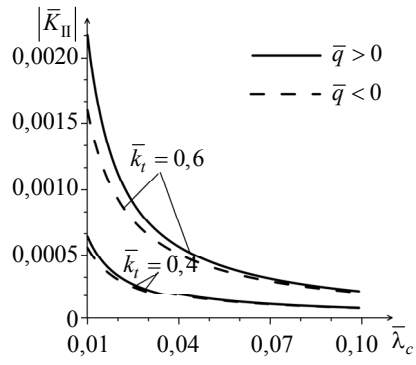


Рис. 4

коефіцієнтів міжфазної тріщинуватості \bar{k}_t . Коефіцієнт інтенсивності \bar{K}_I спадає з ростом теплопровідності заповнювача $\bar{\lambda}_c$ та зменшенням коефіцієнта тріщинуватості \bar{k}_t у випадку теплового потоку, скерованого до матеріалу з більшою термічною дистортивністю ($\bar{q} > 0$). Якщо ж тепловий потік скерований до матеріалу з меншою термічною дистортивністю ($\bar{q} < 0$), то коефіцієнт інтенсивності \bar{K}_I зростає з ростом теплопровідності заповнювача $\bar{\lambda}_c$ і спадає з ростом тріщинуватості \bar{k}_t . Абсолютне значення коефіцієнта інтенсивності \bar{K}_{II} зменшується з ростом теплопровідності заповнювача $\bar{\lambda}_c$ та збільшується з ростом коефіцієнта тріщинуватості \bar{k}_t для обох напрямів теплового потоку.

Висновки. Задачу термопружності для біматеріалу, компоненти якого мають однакові механічні та різні термічні властивості, з періодичною системою міжфазних тріщин, що містять теплопровідний заповнювач, зведено до нелінійної системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь столсовно стрибків температури між поверхнями тріщин і їх розкриття. На основі аналітично-числового розв'язку цієї системи проаналізовано, як кількісно проявляється ефект напрямленості теплового потоку в такій структурі зі зміною коефіцієнта теплопровідності заповнювача та міжфазної тріщинуватості. Зокрема, виявлено, що зі збільшенням теплопровідності заповнювача розкриття тріщин, коефіцієнти інтенсивності нормальних і дотичних міжфазних напружень спадають у випадку, коли тепловий потік скерований до матеріалу з більшою термічною дистортивністю. Якщо ж тепловий потік скерований до матеріалу з меншою термічною дистортивністю, то зі збільшенням теплопровідності заповнювача розкриття тріщин і коефіцієнт інтенсивності нормальних міжфазних напружень зростають, а коефіцієнт інтенсивності дотичних міжфазних напружень спадає. Показано, що збільшення міжфазної тріщинуватості приводить до зростання нормального розкриття тріщин і підсилення ефекту напрямленості теплового потоку.

Роботу виконано за часткової фінансової підтримки ДФФД (проект № Ф 53.1/026)

Література

- [1] Кит Г. С., Подстригач Я. С. Определение стационарного температурного поля и напряжений в окрестности щели, обладающей термосопротивлением // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 1966. — Т. 2, № 3. — С. 247-252.
- [2] Подстригач Я. С., Кит Г. С. Определение температурных полей и напряжений в окрестности теплопроводящих трещин // Тепловые напряжения в элементах конструкций. — 1967. — Вып. 7. — С. 194-201.
- [3] Кит Г. С., Кривциун М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. — Киев: Наукова думка, 1983. — 278 с.
- [4] Кит Г. С., Хай М. В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. — Киев: Наукова думка, 1989. — 288 с.
- [5] Задача термоупругости для биматериала с межфазной трещиной, берега которой контактируют на центральном участке / Г. С. Кит, Р. М. Мартыняк, С. П. Нагалка, Х. И. Гончар // Теорет. и прикладная механика. — 2002. — Вып. 36. — С. 83-90.
- [6] Мартиняк Р. М. Термічне розкриття початково закритої міжфазної тріщини за неідеального теплового контакту берегів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 1999. — № 5. — С. 14-22.
- [7] Мартиняк Р. М., Гончар Х. І., Нагалка С. П. Моделювання термомеханічного закриття початково розкритої міжфазної тріщини, наділеної термоопором // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2003. — № 5. — С. 59-66.
- [8] Kharun I. V., Loboda V. V. A thermoelastic problem for interface crack with contact zones // Int. J. Solids and Struct. — 2004. — Vol. 41, No 1. — P. 159-175.
- [9] Кит Г.С., Мартиняк Р. М., Нагалка С. П. Термопружні ефекти в тілі з тріщиною, закритою зосередженими силами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1999. — Т. 42, № 2. — С. 101-107.
- [10] Мартиняк Р. М. Термонапружений стан біматеріалу із закритою міжфазною тріщиною з шорсткими поверхнями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2010. — Т. 53, № 1. — С. 71-79.
- [11] Giannopoulos G. I., Anifantis N. K. A BEM analysis for thermomechanical closure of interfacial cracks incorporating friction and thermal resistance // Comput. Meth. in Appl. Mech. and Eng. — 2007. — Vol. 196, No 4-6. — P. 1018-1029.
- [12] Keppas L. K., Anifantis N. K. Boundary element prediction on TBC fracture resistance // Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. — 2010. — Vol. 33, No 3. — P. 174-182.
- [13] Мартыняк Р. М., Гончар Х. И. Термоупругое деформирование биматериала с межфазным дефектом, заполненным теплопроводной средой // Теорет. и прикладная механика. — 2005. — Вып. 41. — С. 58-62.
- [14] Мартиняк Р. М., Гончар Х. І. Моделювання термопружної поведінки біматеріалу з теплопроникною міжфазною тріщиною // Прикл. пробл. мех. і мат. — 2005. — Вып. 3. — С. 83-88.
- [15] Мартыняк Р. М., Середницькая Х. И. Термоупругость кусочно-однородного тела с межфазной теплопроницаемой трещиной // Теорет. и прикладная механика. — 2012. — Вып. 4 (50). — С. 91-98.

Thermostressed state of bimaterial with periodic system of interfacial cracks filled with heat-conductive substance

Christina Serednytska, Rostyslav Martynyak

Thermoelastic behavior of a bimaterial weakened by a periodic system of interfacial cracks with heat-conductive filler has been investigated. Using the method of complex potentials, the problem has been reduced to a nonlinear system of singular integro-differential equations for a temperature jump between cracks' edges and their opening. The analytical-numerical solution of the system has been constructed. Effect of the filler and the cracking of the interface upon the opening of the cracks and the interfacial stress intensity factors have been analyzed.

Термонапряженное состояние биматериала с периодической системой межфазных трещин, заполненных теплопроводным веществом

Христина Середницкая, Ростислав Мартыняк

Исследовано термоупругое поведение биматериала, ослабленного периодической системой межфазных трещин, которые заполнены теплопроводной средой. С использованием метода комплексных потенциалов задача сведена к нелинейной системе сингулярных интегродифференциальных уравнений относительно скачка температуры между берегами трещин и их раскрытия. Построено аналитико-численное решение этой системы. Проанализировано влияние заполнителя трещин и межфазной трещиноватости на раскрытие трещин и коэффициенты интенсивности межфазных напряжений.

Отримано 06.05.14