

Застосування різномасштабного методу скінченних елементів до розв'язування одновимірної задачі адвекції-дифузії

Наталія Сподар¹, Ярема Савула²

¹ Львівський національний університет ім. І. Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000

² д. ф.-м. н., професор, Львівський національний університет ім. І. Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: savula@franko.lviv.ua

Для одновимірної задачі адвекції-дифузії знайдено вирази для різномасштабних базисних функцій і побудовано відповідну різномасштабну схему методу скінченних елементів. Проведено обчислювальні експерименти, які підтверджують ефективність застосування побудованої схеми.

Ключові слова: різномасштабний метод скінченних елементів, задача адвекції-дифузії, обчислювальний експеримент.

Вступ. Задачі адвекції-дифузії є важливим інструментом моделювання процесів переносу забруднень у середовищі. Навіть в одновимірному формулюванні вони мають широке застосування [1]. Відомо, що розв'язування цих задач числовими методами, зокрема методом скінченних елементів (МСЕ), у випадку чисел Пекле, більших 10, сильно ускладнюється з огляду на нестійкість обчислювального процесу. Проблематичним є застосування МСЕ і для випадку поєднання двох факторів: великих чисел Пекле та неоднорідності середовища. У роботі [2] запропоновано спеціальну модифікацію МСЕ для випадку неоднорідного середовища під назвою різномасштабний МСЕ (РМСЕ). У цій праці РМСЕ застосовано до однієї одновимірної задачі адвекції-дифузії з достатньо великими числами Пекле.

1. Формулювання задачі

Розглянемо одновимірну крайову задачу стаціонарної адвекції-дифузії

$$-(k(x)u'(x))' + Pe k(x)u'(x) = f(x), \quad x \in (a, b), \quad (1)$$

$$u(a) = u(b) = 0, \quad (2)$$

де $k(x)$ — функція, яка характеризує неоднорідності [3], $u(x)$ — шукана функція, Pe — число Пекле, $f \in L_2(a, b)$ — задана права частина.

Уведемо простір

$$V = \{u(x) : u(x) \in W_2^{(1)}, u(a) = 0, u(b) = 0\}.$$

Домножимо рівняння (1) на довільну функцію $v \in V$ та зінтегруємо на відрізьку (a, b) . Отримаємо варіаційне формулювання задачі, яке полягає у наступному. Знайти таку функцію $u(x) \in V$, що задовольняє рівняння

$$(Lu, v) = (f, v) \quad \forall v \in V. \quad (3)$$

$$\text{Тут } (Lu, v) = \int_a^b k(x)u'(x)(v'(x) + Pev(x))dx, \quad x \in (a, b), \quad (f, v) = \int_a^b f v dx.$$

2. Різномасштабний метод скінченних елементів

Уведемо розбиття τ відрізьку $[a, b]$ на скінченні елементи точками $x_i, i = \overline{0, n}$, $x_0 = a, x_n = b$. Задамо у вузлах розбиття кусково-лінійні базисні функції методу скінченних елементів ϕ_i^0 [4]. Позначимо через S_i носій функції ϕ_i^0 : $S_i = [x_{i-1}, x_{i+1}]$, $i = \overline{1, n-1}$, $S_0 = [x_0, x_1]$, $S_n = [x_{n-1}, x_n]$. Для кожного скінченного елемента $K_j = [x_{j-1}, x_j]$, $j = \overline{1, n}$, такого, що $K_j \subset S_i$, різномасштабні базисні функції ϕ_i визначимо так:

$$L\phi_i = 0 \text{ в } K_j, \quad \phi_i = \phi_i^0 \text{ на межі } K_j, \quad i = \overline{0, n}. \quad (4)$$

З рівняння (4) випливає, що різномасштабні базисні функції збігаються з кусково-лінійними базисними функціями МСЕ на межі кожного скінченного елемента K_j та зберігають різномасштабні особливості розв'язку всередині елемента $K_j, j = \overline{1, n}$.

Будемо шукати розв'язок задачі (1), (2) у вигляді

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^n u_i \phi_i(x).$$

Покладемо у формулі (3) $v = \phi_j^0 \in V, j = \overline{1, n}$. Отримаємо систему рівнянь

$$Au_{nodal} = b, \quad (5)$$

де $A = (a_{ij})$ — матриця з елементами $a_{ij} = \sum_{r=1}^n \int_{K_r} L\phi_i(x)\phi_j^0(x)dx, i, j = \overline{1, n}$; $u_{nodal} = (u_i)$ — стовпець невідомих значень функції u_i у вузлах x_i розбиття $\tau, i = \overline{1, n}$; $b = (b_j)$ — стовпець правих частин з елементами $b_j = \int_a^b f(x)\phi_j^0(x)dx, j = \overline{1, n}$.

Врахувавши вигляд скалярного добутку (Lu, v) , отримаємо:

$$a_{ij} = \sum_{r=1}^n \int_{K_r} k(x)(\phi_i(x))' \left[(\phi_j^0(x))' + Pev_j^0(x) \right] dx, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (6)$$

Отже, алгоритм різномасштабного методу скінченних елементів матиме вигляд:

1. для кожного скінченного елемента K_r , $r = \overline{1, n}$, для кожного вузла i на скінченному елементі будемо базисну функцію ϕ_i^r як розв'язок рівняння $L(\phi_i^r) = 0$ всередині K_r із крайовими умовами $\phi_i^r = \phi_i^0$ на межі K_r ;
 2. обчислюємо матрицю \mathbf{A} та вектор правих частин \mathbf{b} системи рівнянь (5);
 3. розв'язуємо систему рівнянь (5).
- Різнномасштабні базисні функції знайдемо, розв'язавши задачу (4), тобто

$$\begin{cases} -(k(x)\phi_i'(x))' + Pek(x)\phi_i'(x) = 0, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \phi_i(x_{i-1}) = 0, \quad \phi_i(x_i) = 1; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} -(k(x)\phi_i'(x))' + Pek(x)\phi_i'(x) = 0, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ \phi_i(x_i) = 1, \quad \phi_i(x_{i+1}) = 0; \end{cases} \quad (8)$$

Для обчислення матриці \mathbf{A} не потрібно знати явний вигляд функцій $\phi_i(x)$, а достатньо лише знайти $k(x)\phi_i'(x)$ (це випливає з рівняння (6)).

Зі співвідношень (7), (8) випливає, що $k(x)\phi_i'(x) = Ce^{Pex}$, де $C = const$, причому ці константи відрізняються на відрізках $[x_{i-1}, x_i]$ й $[x_i, x_{i+1}]$. Константи можна легко обчислити, записавши $\phi_i'(x) = Ce^{Pex}/k(x)$. Інтегруючи цей вираз на відрізках $[x_{i-1}, x_i]$ й $[x_i, x_{i+1}]$, отримаємо:

$$k(x)\phi_i'(x) = e^{Pex} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{e^{Pex} dx}{k(x)} \quad \text{на } [x_{i-1}, x_i], \quad (9)$$

$$k(x)\phi_i'(x) = -e^{Pex} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{e^{Pex} dx}{k(x)} \quad \text{на } [x_i, x_{i+1}]. \quad (10)$$

Враховавши у виразі (6) локальну визначеність базисних функцій, запишемо елементи матриці \mathbf{A} та вектора \mathbf{b} :

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)(\phi_i(x))' \left[(\phi_j^0(x))' + Pek\phi_j^0(x) \right] dx + \\ &+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x)(\phi_i(x))' \left[(\phi_j^0(x))' + Pek\phi_j^0(x) \right] dx, \quad i, j = \overline{1, n}, \\ b_j &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\phi_j^0(x) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\phi_j^0(x) dx, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Підставивши формули (9), (10) у вираз для a_{ij} , отримаємо

$$a_{ij} = \frac{1}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{Pex} dx/k(x)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{Pex} \left[(\phi_j^0(x))' + Pe\phi_j^0(x) \right] dx - \\ - \frac{1}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{Pex} dx/k(x)} \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{Pex} \left[(\phi_j^0(x))' + Pe\phi_j^0(x) \right] dx, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Застосуємо тут формулу інтегрування частинами.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{Pex} Pe\phi_j^0(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_j^0(x) de^{Pex} = e^{Pex} \phi_j^0(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{Pex} (\phi_j^0(x))' dx.$$

Отримаємо

$$a_{ij} = \frac{e^{Pex} \phi_j^0(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i}}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{Pex} dx/k(x)} - \frac{e^{Pex} \phi_j^0(x) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}}}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{Pex} dx/k(x)}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Оскільки

$$e^{Pex} \phi_{i-1}^0(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = -e^{Pex_{i-1}}, \quad e^{Pex} \phi_i^0(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = e^{Pex_i}, \\ e^{Pex} \phi_i^0(x) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = -e^{Pex_i}, \quad e^{Pex} \phi_{i+1}^0(x) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = e^{Pex_{i+1}},$$

то запишемо остаточно вирази для знаходження елементів матриці \mathbf{A} та вектора правих частин \mathbf{b} :

$$a_{ii-1} = -\frac{e^{Pex_{i-1}}}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{e^{Pex} dx}{k(x)}}, \quad a_{ii} = \frac{e^{Pex_i}}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{e^{Pex} dx}{k(x)}} + \frac{e^{Pex_i}}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{e^{Pex} dx}{k(x)}}, \quad a_{ii+1} = -\frac{e^{Pex_{i+1}}}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{e^{Pex} dx}{k(x)}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (11)$$

$$b_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \phi_i^0(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \phi_i^0(x) dx, \quad i = \overline{1, n}. \quad (12)$$

Із наведених співвідношень випливає, що матриця \mathbf{A} є несиметрична та тридіагональна.

Зауважимо, що для знаходження елементів матриці \mathbf{A} та стовпця правих частин \mathbf{b} потрібно обчислювати інтеграли, а це ускладнює процес реалізації алгоритму. Тому для обчислення інтегралів у виразах (11), (12) використаємо формулу

лівих прямокутників. Для цього введемо на кожному елементі K_r , $r = \overline{1, n}$, сітку, що визначається точками

$$x_j = x_{r-1} + hj, \quad j = \overline{0, m}, \quad m \geq n, \quad (13)$$

де h — крок розбиття елемента K_r .

У цьому випадку отримаємо

$$\int_{K_r} \frac{e^{Pex}}{k(x)} dx \approx h \sum_{j=0}^m \frac{e^{Pex_j}}{k(x_j)}, \quad \int_{K_r} f(x) \phi_i^0(x) dx \approx h \sum_{j=0}^m f(x_j) \phi_i^0(x_j), \quad i, r = \overline{1, n}.$$

Знайшовши із системи рівнянь (5) коефіцієнти u_{nodal} , отримаємо розв'язок задачі (1), (2) $\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^n u_i \phi_i(x)$.

У разі необхідності різномасштабні базисні функції $\phi_i(x)$ можна знайти застосуванням класичного методу скінченних елементів із використанням кусково-лінійних базисних функцій до крайових задач (7), (8) окремо на кожному скінченному елементі K_r , $r = \overline{1, n}$, використовуючи розбиття (13).

3. Результати обчислювальних експериментів

Розглянемо застосування різномасштабного методу скінченних елементів до розв'язування такої задачі

$$-(k(x)u(x)')' + Pek(x)u(x)' = 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Тут $u(x)$ — невідома функція, $f(x) = 1$, $[a, b] = [0, 1]$, $k(x) = k(x/\varepsilon) = \frac{1}{4 + p \sin(2\pi x/\varepsilon)}$, ε — деяке мале число, $p = const$ — відомий параметр, який

контролює величину осциляції (для цього прикладу візьмемо $p = 12$).

Наведемо результати обчислювальних експериментів для випадку значення параметра $\varepsilon = 0,015$.

На рис. 1, 2 наведено графіки різномасштабних базисних функцій для різних чисел Пекле (тут $m = 100$ — кількість елементів розбиття (13)). Після порівняння різномасштабних базисних функцій із кусково-лінійними базисними функціями МСЕ [4] можна переконатися у тому, що різномасштабні базисні функції зберігають особливості неоднорідного середовища, яке характеризується функцією $k(x/\varepsilon)$.

Спочатку розглянемо випадок $Pe = 0$. Для цього випадку можемо знайти аналітичний розв'язок задачі (1), (2) та порівняти отримані результати.

Оскільки розв'язок різномасштабним МСЕ близький до розв'язку класичним МСЕ для випадку, коли розмір скінченного елемента h менший за ε , будемо розглядати випадок $h > \varepsilon$. З теорії гомогенізації [3] отримаємо, що різномасштабний

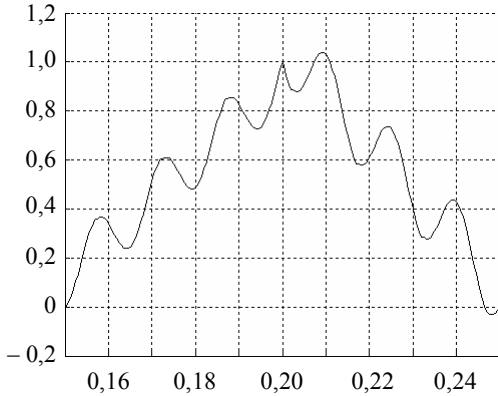


Рис. 1. Вигляд різномасштабної базисної функції для $Pe = 0$

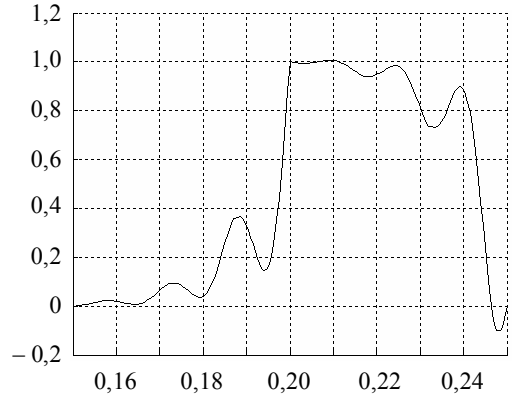


Рис. 2. Вигляд різномасштабної базисної функції для $Pe = 100$

розв'язок у цьому випадку апроксимує аналітичний розв'язок із другим порядком, якщо $\varepsilon \rightarrow 0$. MSE у цьому випадку дає оцінку апроксимації $O(h^2/\varepsilon^2)$.

На рис. 3 наведено графік аналітичного розв'язку та розв'язків класичним і різномасштабним MSE. Для побудови розв'язку RMSE використовувалось розбиття відрізка $[0, 1]$ на 20 скінченних елементів. Це забезпечує добре узгодження розв'язку, отриманого RMSE, й аналітичного розв'язку. Знайдені обома методами розв'язки збігаються з аналітичним із різною точністю. Для класичного методу скінченних елементів похибка є дуже велика навіть після згущення сітки. Отримані результати підтверджують, що різномасштабний метод скінченних елементів дозволяє розв'язувати завдання з більшою точністю та меншими затратами обчислювальних ресурсів.

Розглянемо випадок $k(x) = 1$, $Pe = 100$. На рис. 4 подано графік різномасштабної базисної функції. Вона відповідає вигляду базисних функцій, що використовуються у протипотокових схемах MSE [5].

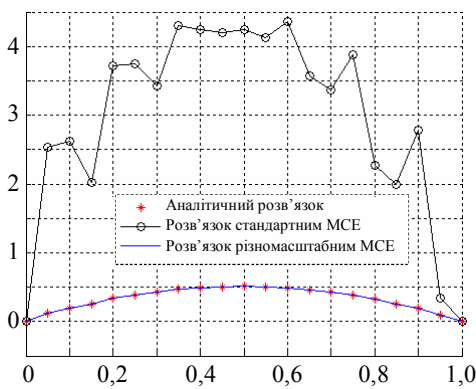


Рис. 3. Графічна ілюстрація розв'язку MSE та RMSE для $Pe = 0$

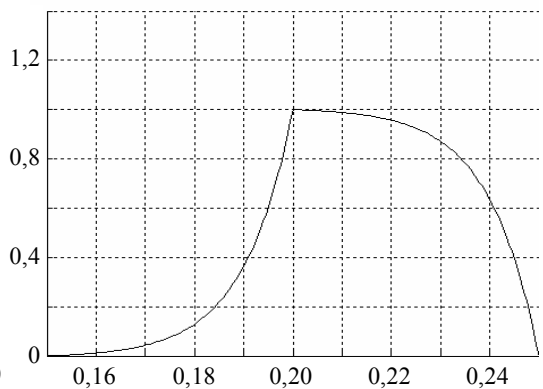


Рис. 4. Вигляд різномасштабної базисної функції для $k(x) = 1$, $Pe = 100$

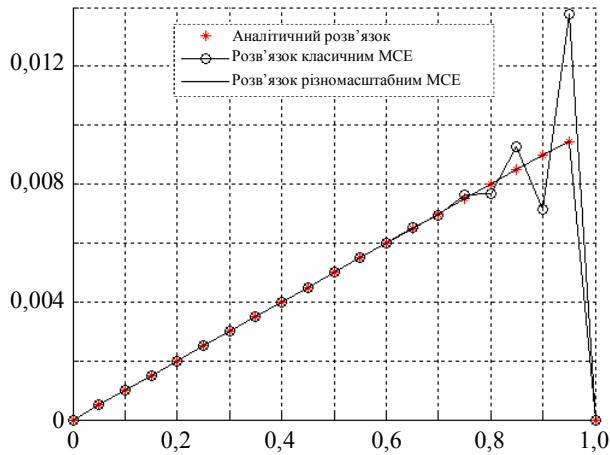


Рис. 5. Графічна ілюстрація розв'язку МСЕ та РМСЕ для $k(x) = 1$, $Pe = 100$

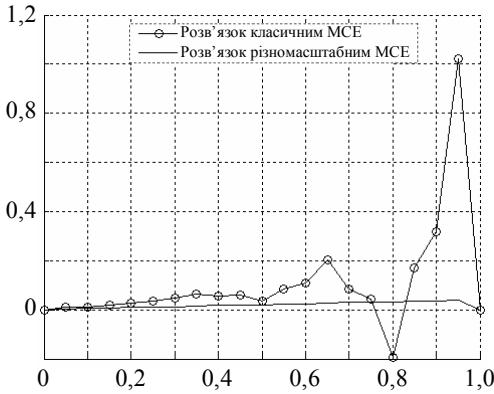


Рис. 6. Графічна ілюстрація розв'язку МСЕ та РМСЕ для $k(x) = \frac{1}{4 + p \sin(2\pi x/\epsilon)}$, $Pe = 100$

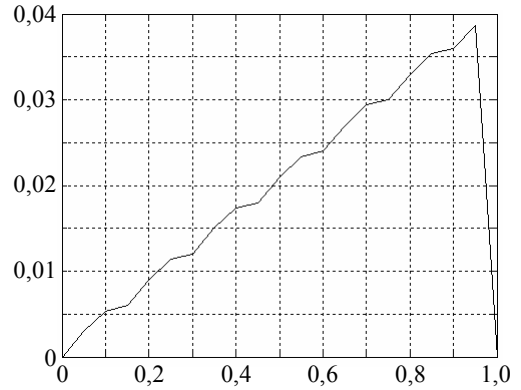


Рис. 7. Графічна ілюстрація розв'язку РМСЕ для $k(x) = \frac{1}{4 + p \sin(2\pi x/\epsilon)}$, $Pe = 100$

На рис. 5 подано для порівняння розв'язку задачі класичним і різномасштабним МСЕ для цього ж випадку. Зауважимо, що згущення сітки не призводить до зникнення осциляцій класичного методу скінченних елементів у кінці відрізка $[0, 1]$.

$$\text{Розглянемо випадок } k(x) = k(x/\epsilon) = \frac{1}{4 + p \sin(2\pi x/\epsilon)}, Pe = 100.$$

Порівнюючи графіки на рис. 6, 7, можемо зробити висновок, що розв'язок РМСЕ є стійким, тоді як розв'язок МСЕ містить неприродні осциляції. Отримані результати демонструють ефективність різномасштабного методу скінченних елементів.

Висновок. Для одного класу одновимірних задач адвекції-дифузії у неоднорідному середовищі побудовано різномасштабні базисні функції з компактним носієм. Відповідну різномасштабну схему методу скінченних елементів використано для

проведення обчислювальних експериментів. Показано, що результати обчислень добре узгоджуються з аналітичними розв'язками для задач, для яких вдається знайти аналітичні розв'язки, та різномасштабний метод дає стійкі розв'язки для інших задач.

Література

- [1] An introduction to water quality modelling. Second edition; ed. by *A. James*. — New York: John Wiley and Sons, 1993. — 311 p.
- [2] *Efendiev Y., Hou T.* Multiscale finite element methods. Theory and application. — New York: Springer, 2009. — 234 p. — (Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences; vol. 4).
- [3] *Hou T. Y., Wu X.-H., Cai Z.* Convergence of a multiscale finite element method for elliptic problems with rapidly oscillating coefficients // *Mathematics of Computation*. — 1999. — Vol. 68, No 227. — P. 913-943.
- [4] *Савула Я. Г.* Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. — Львів: видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. — 221 с.
- [5] *Morton K. W.* Numerical solution of convection-diffusion problems. — London, 1996. — 278 p.

Application of multiscale finite element method for solving the one-dimensional advection-diffusion problem

Nataliia Spodar, Yarema Savula

One-dimensional advection-diffusion problem is considered. Expressions of multiscale basis functions are obtained and the corresponding multiscale finite element scheme is constructed to solve the advection-diffusion problem. Numerical experiments that confirm the effectiveness of applying the constructed scheme are carried out.

Применение разномасштабного метода конечных элементов к решению одномерной задачи адвекции-диффузии

Наталія Сподар, Ярема Савула

Рассмотрена одномерная задача адвекции-диффузии. Для этой задачи получены выражения для разномасштабных базисных функций и построена соответствующая разномасштабная схема метода конечных элементов. Выполнены вычислительные эксперименты, подтверждающие эффективность применения построенной схемы.

Отримано 23.04.14