

## Вплив гнучкого покриття на міцність пластини із зірчастим розрізом

Іван Шацький<sup>1</sup>, Тарас Даляк<sup>2</sup>

<sup>1</sup> к. ф.-м. н., с. н. с., Івано-Франківський відділ ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Микитинецька, 3, Івано-Франківськ, 76002, e-mail: ipshatsky@gmail.com

<sup>2</sup> к. ф.-м. н., м. н. с., Івано-Франківський відділ ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Микитинецька, 3, Івано-Франківськ, 76002, e-mail: tdalyak@gmail.com

*Досліджено задачу про розтяг пластини із зірчастим розрізом, підсиленої покриттям. Гнучке покриття моделюється шарніром, який з'єднує береги розрізу на одній із лицьових поверхонь пластини. Методом сингулярних інтегральних рівнянь визначено напружений стан пластини біля вершин тріщини, досліджено розподіл шарнірної реакції в покритті. Граничну рівновагу пластини з тріщиною проаналізовано з урахуванням обмеженої міцності підкріплення.*

**Ключові слова:** пластина, зірчаста тріщина, гнучке покриття, міцність.

**Вступ.** Одним із способів реновації тонкостінних конструкцій із метою подовження їх ресурсу чи відтворення герметичності є нанесення на дефектну ділянку тонких латок. Раніше [1, 2] розроблено модель для оцінки впливу одностороннього гнучкого покриття на міцність пластини з наскрізною тріщиною. У працях [3-7] модель апробовано для окремих випадків розташування дефектів у пластинках та оболонках. Мета цього дослідження — вивчити вплив одностороннього гнучкого покриття на напружено-деформований стан і міцність пластини з дефектом зіркоподіної форми, характерної для розтріскування пластин від локального поперечного навантаження. Окремі результати роботи прозвучали у доповіді [8].

### 1. Постановка й інтегральне рівняння задачі

Розглянемо безмежну ізотропну пластину  $(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times [-h, h]$ , послаблену циклічно симетричною системою  $N$  радіальних розрізів завдовжки  $l$ , внутрішні вершини яких сполучаються в одній точці (рис. 1). Сукупність дефектів назвемо зірчастим розрізом (тріщиною), яка складається з  $N$  віток, а спільну вершину — її центр. Нехай на одну з лицьових поверхонь пластини  $z = sh$  ( $s = +1$  або  $s = -1$ ) нанесено гнучке покриття, яке деформується разом з основою та здатне витримати достатньо

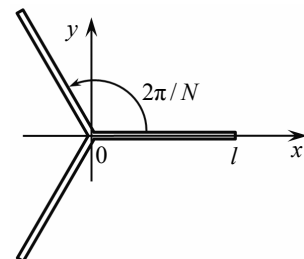


Рис. 1. Зірчаста тріщина в пластині

великі напруження. Пластина перебуває під дією всебічного розтягу на безмежності рівномірно розподіленими зусиллями  $p = const$ ; інші поверхні об'єкта вільні від зовнішнього навантаження. Досліджуємо вплив покриття на міцність пластини із зірчастою тріщиною.

Гнучке покриття моделюємо шарніром, який з'єднує береги розрізу на одній із лицьових поверхонь пластини. Прогин пластини, породжений її підкріпленням в околі тріщини, описується додатковим рівнянням класичної теорії згину. Таким чином, слід розв'язати два бігармонічні рівняння

$$\Delta\Delta\phi = 0, \quad \Delta\Delta w = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L, \quad (1)$$

де  $\phi$  — функція Ері,  $w$  — прогин пластини,  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $L = \bigcup_{k=0}^{N-1} L_k$  — сукупність віток тріщини.

Сформулюємо взаємозв'язані крайові умови задачі на розрізі з шарнірно з'єднаними кромками [1]. За циклічної симетрії такі умови достатньо записати тільки на одній ділянці дефекту, наприклад, на відрізку  $L_0 = (0, l)$ , що належить осі абсцис:

$$\left[ u_y \right] - sh \left[ \vartheta_y \right] = 0, \quad M_y - sh N_y = 0, \quad (x, y) \in L_0. \quad (2)$$

Тут  $\left[ u_y \right]$ ,  $\left[ \vartheta_y \right]$  — розриви переміщень у серединній площині пластини та кута повороту нормалі,  $N_y$  — мембранне зусилля,  $M_y$  — згинальний момент.

Для мембранних зусиль і згинальних моментів на безмежності вимагаємо виконання таких умов:

$$N_x = N_y = p, \quad N_{xy} = 0, \quad M_x = M_{xy} = M_y = 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Отож, (1)-(3) — крайова задача для пари бігармонічних рівнянь із взаємопов'язаними крайовими умовами на гіллястому розрізі. Для її розв'язання використано метод сингулярних інтегральних рівнянь [9, 10]. Інтегральні подання мембранних зусиль і згинальних моментів на лінії тріщини мають вигляд:

$$N_y(x, 0) = p + \frac{B}{4\pi} \int_{L_0} K_{11}(\xi, x) \left[ u_y \right]'(\xi) d\xi, \\ M_y(x, 0) = -\frac{Da}{4\pi} \int_{L_0} K_{33}(\xi, x) \left[ \vartheta_y \right]'(\xi) d\xi; \quad (4)$$

$$K_{11}(\xi, x) = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{z_x}{r^2} \left( 1 + \frac{2z_y^2}{r^2} \right) \cos \frac{2\pi k}{N} - \frac{z_y}{r^2} \left( 1 - \frac{2z_y^2}{r^2} \right) \sin \frac{2\pi k}{N} \right\}, \\ K_{33}(\xi, x) = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{z_x}{r^2} \left( 1 - \kappa_0 \frac{2z_y^2}{r^2} \right) \cos \frac{2\pi k}{N} + \kappa_0 \frac{z_y}{r^2} \left( 1 - \frac{2z_y^2}{r^2} \right) \sin \frac{2\pi k}{N} \right\}, \\ z_x = \xi \cos \frac{2\pi k}{N} - x, \quad z_y = \xi \sin \frac{2\pi k}{N}, \quad r^2 = z_x^2 + z_y^2.$$

Тут  $B = 2Eh$ ,  $D = 2Eh^3 / (3(1 - \nu^2))$ ,  $a = (3 + \nu)(1 - \nu)$ ,  $\kappa_0 = (1 - \nu) / (3 + \nu)$ ,  $E$  і  $\nu$  — модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини.

Підставляючи вирази (4) у крайові умови (2) та виключаючи функцію  $[u_y]$ , приходимо до інтегрального рівняння для визначення розкриття тріщини:

$$\frac{B}{4\pi} \int_{L_0} \{K_{11}(\xi, x) + \kappa^{-1} K_{33}(\xi, x)\} [u_y]'(\xi) d\xi = -p, \quad x \in L_0, \quad \kappa = \frac{3(1 + \nu)}{3 + \nu}. \quad (5)$$

Шуканий розв'язок підкоряємо додатковим умовам

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} [u_y]'(x) = 0, \quad [u_y](l) = 0. \quad (6)$$

Перша з них наближено відображає слабшу, ніж коренева, особливість похідної від стрибка переміщень, що є наслідком нерухомої особливості в ядрі інтегрального рівняння у початку координат.

## 2. Аналіз

Числовий розв'язок задачі (5), (6) отримали методом квадратур [9, 10], взявши за вузли інтерполяції та колокації нулі поліномів Чебишова відповідно першого та другого роду. За знайденим стрибком переміщень визначали функцію  $[u_y]$ , а потім коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів в околі вершин тріщин:

$$K_N = -\frac{B}{4} \lim_{x \rightarrow l} \sqrt{2(l-x)} [u_y]'(x), \quad K_M = \frac{Da}{4} \lim_{x \rightarrow l} \sqrt{2(l-x)} [u_y]'(x).$$

Задля точнішого обчислення шарнірної реакції в довільній точці розрізу використано подання, яке не містить сингулярних інтегралів

$$N_y(x, 0) = \frac{\kappa^{-1}}{1 + \kappa^{-1}} \left\langle p + \frac{B}{4\pi} \int_{L_0} \{K_{11}(\xi, x) - K_{33}(\xi, x)\} [u_y]'(\xi) d\xi \right\rangle.$$

Розподіл шарнірної реакції за довжиною розрізу для різної кількості віток подано на рис. 2. Максимальні напруження у покритті досягаються на периферії зіркоподібного дефекту; їхні значення монотонно зростають із збільшенням  $N$ . Нанесення гнучкого покриття призводить до істотного зменшення значень коефіцієнта інтенсивності зусиль і до появи ненульового коефіцієнта інтенсивності моментів (рис. 3). Подібно до випадку пластини без покриття напруження поблизу вістря тріщин зменшуються у разі збільшення кількості віток [11-13].

Дослідимо граничну рівновагу пластини з тріщиною з урахуванням обмеженої міцності покриття відповідно до схеми, описаної у роботах [2, 5, 6]. Руйнівне навантаження  $p_{1*}$ , яке спричинює ріст тріщини зі збереженням цілісності покриття, знайдемо з енергетичного критерію за комбінованого розтягу та згину

$$\frac{\pi}{4h^2 E} \left\{ K_N^2 + \kappa \left( K_M / h \right)^2 \right\} = 2\gamma_*, \quad (7)$$

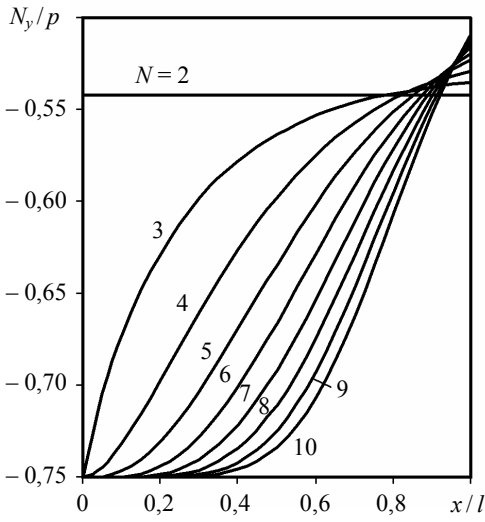


Рис. 2. Розподіл нормальних зусиль у покритті вздовж лінії розрізу

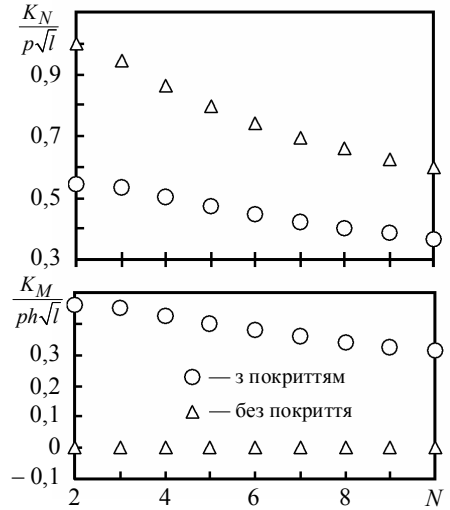


Рис. 3. Залежність коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів від кількості променів

де  $\gamma_*$  — густина ефективної поверхневої енергії матеріалу пластини.

Зусилля  $p_{2*}$ , яке відповідає розтріскуванню покриття, визначимо за класичною теорією міцності

$$\max_{x \in L_0} N_y(x) = N_y(0) \leq N_* \quad (8)$$

Тут  $N_*$  — допустиме зусилля в покритті.

Нарешті, для зіставлення, у пластинці без покриття критичне зусилля  $p_{3*}$  визначається з енергетичного критерію за плоского напруженого стану

$$\frac{\pi K_N^2}{4h^2 E} = 2\gamma_* \quad (9)$$

За реальне значення граничного навантаження слід прийняти

$$p_* = \max \{ \min \{ p_{1*}, p_{2*} \}, p_{3*} \} \quad (10)$$

На рис. 4 показано залежність безрозмірного руйнівного навантаження  $p_{i*}/p_0$  ( $p_0 = 2h\sqrt{2E\gamma_*}/\pi l$  — гріфитсове зусилля

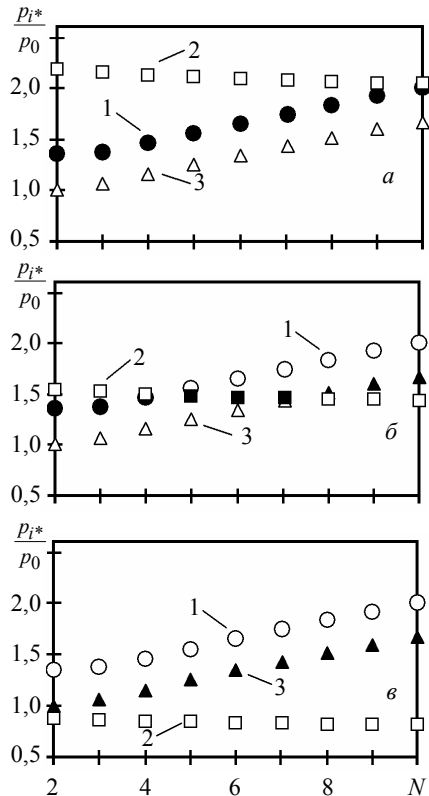


Рис. 4. Залежність руйнівного навантаження від кількості променів

для ізольованої тріщини завдовжки  $2l$  ( $N=2$ ) у пластині без покриття) від кількості віток зірчастої тріщини. Криві 1 відповідають критерію (7), лінії 2 — критерію (8) для  $N_*/p_0 = 1; 0,7; 0,4$  ( $a, b, c$  відповідно), криві 3, побудовані за критерієм (9), відповідають класичному розв'язку циклічно симетричної задачі для пластини без покриття. Затіненими маркерами подано підсумкові результати, знайдені за співвідношенням (10).

**Висновки.** Застосування моделі гнучкого покриття як шарнірного з'єднання кромки розрізу сукупно з двокритеріальним підходом до оцінки міцності дало такі результати.

Високоміцне покриття ( $N_*/p_0 \approx 1$ ) призводить до суттєвого підвищення несучої здатності пластини для значної кількості віток тріщини. Підкріплювальний ефект покриття середньої міцності ( $N_*/p_0 \approx 0,7$ ) спостерігається за обмеженої кількості променів (у цьому прикладі для  $N \leq 4$ ), а слабке покриття ( $N_*/p_0 \approx 0,4$ ) взагалі не підвищує несучої здатності пластини. Тенденція підвищення міцності пластини зі збільшенням числа променів зіркоподібної тріщини у разі великих  $N$  нівелюється через посилення концентрації напружень у покритті.

### Література

- [1] *Шацький І. П.* Растяжение пластины, содержащей прямолинейный разрез с шарнирно соединенными кромками // Журн. прикл. механики и техн. физики. — 1989. — № 5. — С. 163-165.
- [2] *Шацький І.* Модель тріщини в пластинці з гнучким покриттям // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2000. — Вип. 57. — С. 42-47.
- [3] *Шацький І. П.* Взаємодія колінеарних розрізів з шарнірно з'єднаними берегами у розтягнутій пластинці // Мат. методи і фіз.-мех. поля. — 1992. — Вип. 36. — С. 93-97.
- [4] *Шацький І. П.* Периодическая система параллельных разрезов с шарнирно соединенными кромками в растянутой пластине // Теорет. и прикл. механика. — 1992. — Вип. 23. — С. 40-45.
- [5] *Шацький І., Перепічка В.* Вплив гнучкого покриття на міцність пластинки з крайовими тріщинами // Машинознавство. — 1999. — № 9(27). — С. 44-47.
- [6] *Шацький І. П., Щербій А. Б.* Вплив гнучкого покриття на міцність пологої оболонки з тріщиною вздовж лінії кривини // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій (вип. 2): В 3-х т.; під заг. ред. В. В. Панасюка. — Львів: Каменяр, 1999. — Т. 2. — С. 333-335.
- [7] *Шацький І. П., Даляк Т. М.* Влияние гибкого покрытия на прочность пластины с циклической системой трещин // Вісник Донец. нац. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. — 2008. — № 1. — С. 84-87.
- [8] *Шацький І. П., Даляк Т. М.* Циклічно-симетричні задачі пружності для пластини із взаємопов'язаними умовами на зірчастому розрізі // XVIII Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми прикл. математики та інформатики" (Львів, 4-5 жовт. 2012 р.). Матер. конф. — Львів, 2012. — С. 161.
- [9] *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. — Киев: Наук. думка, 1981. — 324 с.
- [10] *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. — Киев: Наук. думка, 1976. — 444 с.
- [11] *Westmann R. A.* Pressurized star crack // J. Math. and Phys. — 1964. — Vol. 43, No 3. — P. 191-198.
- [12] *Williams W. E.* A star-shaped crack deformed by an arbitrary internal pressure // Int. J. Eng. Sci. — 1971. — Vol. 9, No 8. — P. 705-712.
- [13] *Саврук М. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. — Киев: Наук. думка, 1988. — 617 с. (Механика разрушения и прочность материалов: В 4 т.; Т. 2).

## **Influence of flexible coating on strength of plate with star-shaped cut**

Ivan Shatsky, Taras Dalyak

*The problem of a plate stretching with star-shaped cut, which is strengthened with coating, is investigated. The flexible covering is modeled by means of a joint which articulates cutting edges on the plate front surface. The stressed state of the plate near crack tips and joint reaction in covering are defined using singular integral equations method. The limit equilibrium of the plate with a crack has been analyzed with account of limited durability of its strengthening.*

## **Влияние гибкого покрытия на прочность пластины со звездоподобным разрезом**

Иван Шацкий, Тарас Даляк

*Исследована задача растяжения пластины со звездоподобным разрезом, усиленной покрытием. Гибкое покрытие моделируется шарниром, который соединяет берега разреза в одной из лицевых поверхностей пластины. Методом сингулярных интегральных уравнений исследовано напряженное состояние пластины вблизи вершин трещины и распределение контактной реакции в шарнире. Анализ предельного равновесия пластины с трещиной выполнен с учетом ограниченной прочности покрытия.*

Представлено доктором фізико-математичних наук Р. Маргиняком

Отримано 23.04.14