УДК 518.65

Чебишовське наближення степенево-експоненційним виразом із відносною похибкою

Нестор Данчак[1], Петро Малачівський[2], Енвер Оразов[3]

[1] Центр математичного моделювання ІППММ НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005
[2] д. т. н., професор, Центр математичного моделювання ІППММ НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: psmal@cmm.lviv.ua
[3] Українська академія друкарства, вул. Підголоско, 19, Львів, 79020

Досліджено властивості чебишовського наближення степенево-експоненційним виразом. Встановлено достатню умову існування чебишовського наближення таким виразом з найменшою відносною похибкою. Запропоновано й обґрунтовано метод визначення параметрів такого наближення.

Ключові слова: чебишовське (рівномірне) наближення, точки чебишовського альтернансу, відносна похибка, характеристична властивість.

Вступ. Розглянемо задачу чебишовського наближення степенево-експоненційним виразом

$$S_n(a,x) = Ax^{a_0} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^i + cx^p\right), \quad x > 0, \qquad c \neq 0, \quad p \neq k \quad \left(k = \overline{0,n}\right), \qquad (1)$$

щодо невідомих параметрів A, c, p і $a_i \left(i = \overline{0,n}\right)$. Наближення степенево-експоненційним виразом використовують для опису різних фізичних залежностей, зокрема, термометричних характеристик германієвого сенсора [1], а також опису швидкості хімічних реакцій [2]. Частинний випадок чебишовського наближення степенево-експоненційним виразом для $n = 0$ досліджено у праці [3]. Вираз (1) не задовольняє умову Гаара [4], і тому виникає питання існування та єдиності чебишовського наближення таким виразом. У зв'язку з цим необхідно дослідити властивості чебишовського наближення виразом (1) і визначити клас функцій, для якого таке чебишовське наближення існує.

1. Існування чебишовського наближення степенево-експоненційним виразом

Клас функцій $f(x)$, для яких існує чебишовське наближення виразом (1) із відносною похибкою, встановлює теорема.

Теорема. Достатньою умовою існування чебишовського наближення виразом (1) для додатної функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[\alpha, \beta]$, $\alpha > 0$ $\left(f(x) \in C[\alpha,\beta],\, f(x) > 0\right)$ із відносною похибкою на $[\alpha, \beta]$ є виконання нерівностей

$$W^{(n+1)} > 0\ , \quad W^{(n+1)} \neq W_r^{(n+1)}\ , \quad r = \overline{0,\, n}\,, \tag{2}$$

де

$$W^{(n+1)} = \frac{D_{n+2}\left(\overline{f}; z_2, z_3, ..., z_{n+5}\right)}{D_{n+2}\left(\overline{f}; z_1, z_2, ..., z_{n+4}\right)}, \tag{3}$$

$$D_k\left(U; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+k+1}\right) = \frac{D_{k-1}\left(U; z_{j+1}, z_{j+2}, ..., z_{j+k+1}\right)}{D_{k-1}\left(s_{k-1}; z_{j+1}, z_{j+2}, .., z_{j+k+1}\right)} -$$

$$-\frac{D_{k-1}\left(U; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+k}\right)}{D_{k-1}\left(s_{k-1}; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+k}\right)}, \quad k = 3, 4, ..., \quad j = \overline{1,\, n-k+3}\,; \tag{4}$$

$$D_2\left(U;\, z_j, ..., z_{j+3}\right) = \frac{D_1\left(U; z_{j+1}, z_{j+3}\right)}{D_1\left(\bar{l}; z_{j+1},\, z_{j+3}\right)} - \frac{D_1\left(U; z_j, z_{j+2}\right)}{D_1\left(\bar{l}; z_j, z_{j+2}\right)}\,; \tag{5}$$

$$D_1\left(U; z_j, z_{j+2}\right) = U\left(z_{j+2}\right) - U\left(z_j\right), \quad j = \overline{1,\ n+2}\,; \tag{6}$$

$$W_r^{(n+1)} = \frac{D_{n+2}\left(l_r; z_2, z_3, ..., z_{n+5}\right)}{D_{n+2}\left(l_r; z_1, z_2, ..., z_{n+4}\right)}\,; \tag{7}$$

$$s_k(x) = x^k\,; \quad l_k(x) = x^k \ln(x)\,; \quad \overline{f}(x) = \ln\left(f(x)\right); \quad \bar{l}(x) = \ln(x)\,,$$

а $z_j\left(j = \overline{1, n+5}\right)$ — довільні, впорядковані за зростанням числа з відрізка $\left[\alpha, \beta\right]$.

Доведення. За характеристичною властивістю [4] для існування чебишовського наближення функції $f(x)$ виразом (1) із відносною похибкою на відрізку $[\alpha,\, \beta]$ достатньо, щоб система рівнянь

$$\frac{f\left(z_j\right) - A\, z_j^{a_0} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z_j^i + c z_j^p\right)}{f\left(z_j\right)} = (-1)^j\, \mu \tag{8}$$

мала єдиний розв'язок щодо невідомих параметрів $A, c, p,\ a_i\left(i = \overline{0, n}\right)$ і похибки μ для будь-яких впорядкованих за зростанням чисел $z_j\left(j = \overline{1, n+5}\right)$ з відрізка $\left[\alpha, \beta\right]$. Покажемо, що в разі виконання умови (2) система рівнянь (8) має єдиний розв'язок.

Виключивши з системи рівнянь (8) невідомі A та μ, отримаємо щодо c, p й $a_i\left(i = \overline{0, n}\right)$ систему рівнянь

$$\frac{z_{j+2}^{a_0}\exp\left(\sum_{i=1}^{n}a_i z_{j+2}^{i}+cz_{j+2}^{p}\right)}{f\left(z_{j+2}\right)}=\frac{z_j^{a_0}\exp\left(\sum_{i=1}^{n}a_i z_j^{i}+cz_j^{p}\right)}{f\left(z_j\right)}, \quad j=\overline{1,n+3}. \tag{9}$$

Оскільки за умовою теореми функція $f(x)$ додатна, то ця система рівнянь еквівалентна

$$\begin{aligned}&a_0\left(\ln\left(z_{j+2}\right)-\ln\left(z_j\right)\right)+\sum_{i=1}^{n}a_i\left(z_{j+2}^{i}-z_j^{i}\right)+c\left(z_{j+2}^{p}-z_j^{p}\right)=\\&=\ln\left(f\left(z_{j+2}\right)\right)-\ln\left(f\left(z_j\right)\right), \quad j=\overline{1,\,n+3}.\end{aligned} \tag{10}$$

Із врахуванням співвідношення (6) систему рівнянь (10) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}&a_0D_1\left(\bar{l};z_j,z_{j+2}\right)+\sum_{i=1}^{n}a_iD_1\left(s_i;z_j,z_{j+2}\right)+cD_1\left(\phi;z_j,z_{j+2}\right)=\\&=D_1\left(\bar{f};z_j,z_{j+2}\right), \quad j=\overline{1,\,n+3},\end{aligned} \tag{11}$$

де $\phi(p,x)=x^p$.

Із системи рівнянь (11) виключимо невідомі $a_i\left(i=\overline{0,n}\right)$ і c, які входять лінійно. Виключення параметрів $a_i\left(i=\overline{0,n}\right)$ проводитимемо в порядку зростання індексу. Починаючи з $i=0$, з кожного рівняння системи (11) визначаємо a_i, а потім, попарно віднімаючи j-ті рівняння від ($j+1$)-их, $j=\overline{1,n+1-i}$, отримуємо систему щодо решти невідомих параметрів $a_r\left(r=\overline{i+1,n}\right)$, c та p. Після виключення з системи рівнянь (11) невідомого a_0 отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n}a_iD_2\left(s_i;z_j,...,z_{j+3}\right)+cD_2\left(\phi;z_j,..,z_{j+3}\right)=D_2\left(\bar{f};z_j,..,z_{j+3}\right), \quad j=\overline{1,\ n+2}. \tag{12}$$

Таке виключення невідомого a_0 можливе, бо коефіцієнти $D_1\left(\bar{l};z_j,z_{j+2}\right)$ біля нього в усіх рівняннях системи (11) не набувають значення нуль, оскільки за умовою теореми числа $z_j\left(j=\overline{1,n+5}\right)$ — це різні впорядковані за зростанням числа з відрізка $[\alpha,\beta]$, $\alpha>0$.

Для продовження виключення решти параметрів $a_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ із системи рівнянь (12) необхідно переконатися, що коефіцієнти біля них також відмінні від нуля. Оцінимо спочатку значення коефіцієнта біля a_1. Для цього розглянемо вирази

$$\frac{D_1\left(s_i; z_j, z_{j+2}\right)}{D_1\left(\bar{l}; z_j, z_{j+2}\right)}, \quad i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,n+3}. \tag{13}$$

Значення виразу (13) для $i=\overline{1,n}$ дорівнює відношенню приростів степеневої функції $s_i(x)=x^i$ до приростів логарифму

$$\frac{D_1\left(s_i; z_j, z_{j+2}\right)}{D_1\left(\bar{l}; z_j, z_{j+2}\right)} = \frac{z_{j+2}^i - z_j^i}{\ln z_{j+2} - \ln z_j}.$$

За теоремою Коші [5] про відношення приростів неперервно диференційовних функцій значення цього відношення дорівнює степеневій функції ix^i у деякій середній точці ξ_j з інтервалу $\left(z_j, z_{j+2}\right)$. Це означає, що коефіцієнти біля невідомого a_1 в усіх рівняннях системи (12) дорівнюють

$$D_2\left(s_1; z_j, ..., z_{j+3}\right) = \xi_{j+1} - \xi_j, \quad j=\overline{1,n+2}. \tag{14}$$

Оскільки числа $z_j\left(j=\overline{1,n+5}\right)$ впорядковані за зростанням, то точки ξ_j $\left(j=\overline{1,n+4}\right)$ також будуть впорядкованими за зростанням [6]. Окрім того, ці точки належать відрізку $[\alpha, \beta]$. Отже, коефіцієнти біля невідомого a_1 в усіх рівняннях системи (12) набувають лише додатних значень. Тому невідоме a_1 можна виключити з системи рівнянь (12).

Аналогічно можна переконатися в тому, що коефіцієнти біля решти невідомих $a_i\left(i=\overline{2,n}\right)$ також не набуватимуть нульових значень у процесі їхнього послідовного виключення із системи рівнянь (12). Так, під час виключення невідомого a_k, коефіцієнти біля нього будуть такими

$$D_{k+1}\left(s_k; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+k+2}\right) = \frac{D_k\left(s_k; z_{j+1}, z_{j+2}, ..., z_{j+k+2}\right)}{D_k\left(s_{k-1}; z_{j+1}, z_{j+2}, .., z_{j+k+2}\right)} -$$
$$-\frac{D_k\left(s_k; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+k+1}\right)}{D_k\left(s_{k-1}; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+k+1}\right)}, \quad j=\overline{1, n-k+3}. \tag{15}$$

Послідовно k раз застосувавши до кожного з доданків у правій частині виразу (15) теорему Коші про відношення приростів функцій [5], можна переконатися, що коефіцієнти біля невідомого a_k дорівнюють різниці k-их похідних степеневої функції $s_k(z)=z^k$ у деяких середніх точках відповідних інтервалів, а саме

$$D_{k+1}\left(s_k; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+k+2}\right) = k\left(\varsigma_{j+1} - \varsigma_j\right), \quad j=\overline{1,n-k+3}, \tag{16}$$

де $\varsigma_j \in \left(z_j, z_{j+k}\right)$, $j = \overline{1, n-k+4}$.

Оскільки k-та похідна степеневої функції $s_k(z) = z^k$ строго монотонна і точки $z_j\left(j = \overline{1, n+5}\right)$ упорядковані за зростанням, то числа $\varsigma_j\left(j = \overline{1, n-k+4}\right)$ також будуть упорядкованими за зростанням [6]. Звідси випливає, що коефіцієнти біля невідомого a_k в усіх рівняннях відповідної системи рівнянь набувають лише додатних значень.

Отже, із системи рівнянь (12) можна послідовно виключити невідомі параметри $a_i\left(i = \overline{2, n}\right)$. Щодо невідомих c і p отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} cD_{n+2}\left(\phi; z_2, z_3, ..., z_{n+5}\right) = D_{n+2}\left(\overline{f}; z_2, z_3, ..., z_{n+5}\right), \\ cD_{n+2}\left(\phi; z_1, z_2, ..., z_{n+4}\right) = D_{n+2}\left(\overline{f}; z_1, z_2, ..., z_{n+4}\right). \end{cases} \tag{17}$$

Дослідимо вільні члени рівнянь цієї системи та коефіцієнти біля невідомого c. Для цього розглянемо вирази

$$\frac{D_{n+1}\left(\phi; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+n+2}\right)}{D_{n+1}\left(s_n; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+n+2}\right)}, \quad j = \overline{1, 3}, \tag{18}$$

де $\phi(p, x) = x^p$. Аналогічно, як і у випадку з виразами (13) і (15), послідовно застосувавши (n + 1) раз теорему Коші [5], можна показати, що вирази (18) є розділені різниці n-ого порядку степеневої функції pz^p на множині точок $\{z_i\}_{i=j}^{j+n+2}$. Отже, кожен із цих виразів дорівнює n-ій похідній функції pz^p у деякій середній точці ζ_j з інтервалу $\left(z_j, z_{j+n+2}\right)$. Це означає, що коефіцієнти біля невідомого параметра c у системі рівнянь (17) дорівнюють приросту n-ої похідної степеневої функції px^p по x. Оскільки n-*та* похідна степеневої функції строго монотонна, то коефіцієнти біля c у рівняннях системи (17) не набувають нульового значення.

Оцінимо значення $D_{n+2}\left(\overline{f}; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+n+3}\right)$, $j = 1, 2$ — вільних членів рівнянь системи (17). Повторюючи міркування, викладені у випадку оцінки значення виразів (13) і (18) щодо значень вільних членів рівнянь системи (17), отримаємо, що вони дорівнюють приростам n-ої похідної функції

$$\Phi(x) = x f'(x) / f(x), \tag{19}$$

тобто

$$D_{n+2}\left(\overline{f}; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+n+3}\right) = \Phi^{(n)}\left(\xi_{j+1}\right) - \Phi^{(n)}\left(\xi_j\right), \quad j = 1, 2. \tag{20}$$

Тут $\xi_j \in \left(z_j, z_{j+n+2}\right)$, $j = \overline{1, 3}$.

Оскільки за умовою (2) $W^{(n+1)} > 0$, то відношення приростів n-их похідних функції $\Phi(x)$ додатне, тому відповідно й самі прирости відмінні від нуля. Це означає, що вільні члени рівнянь системи (17) також не набувають нульових значень. Отже, система рівнянь (17) має дійсний відмінний від нульового розв'язок щодо невідомого c.

Поділивши перше рівняння системи (17) на друге, отримаємо щодо p трансцендентне рівняння

$$\omega_{n+1}(p) = W^{(n+1)}, \tag{21}$$

де $\omega_{n+1}(p) = \dfrac{D_{n+2}\left(\phi; z_2, z_3, ..., z_{n+5}\right)}{D_{n+2}\left(\phi; z_1, z_2, ..., z_{n+4}\right)}$, а вираз $W^{(n+1)}$ визначається за формулою (3).

Враховуючи те, що значення виразів (18) дорівнюють значенню n-ої похідної степеневої функції px^p по x у деякій середній точці відповідних інтервалів, ліву частину рівняння (21) можна подати у вигляді

$$\omega_{n+1}(p) = \frac{\tau_3^{p-n} - \tau_2^{p-n}}{\tau_2^{p-n} - \tau_1^{p-n}}. \tag{22}$$

Тут $\tau_i \in \left(z_i, z_{i+n+2}\right)$. Оскільки n-та похідна степеневої функції є строго монотонна на відрізку $[\alpha, \beta]$ для $\alpha > 0$, то відповідно до роботи [6] для чисел $\tau_i \left(i = \overline{1,3}\right)$ справджуються співвідношення $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$. Отже, у лівій частині рівняння (21) можна сформувати відношення розділених різниць. Для цього ліву частину рівняння (21) помножимо та поділимо на відповідні прирости аргументу — $\left(\tau_2 - \tau_1\right)/\left(\tau_3 - \tau_2\right)$. Після заміни отриманих розділених різниць відповідними похідними в середніх точках отримаємо

$$\omega_{n+1}(p) = K\left(\zeta_2/\zeta_1\right)^{p-n-1}, \tag{23}$$

де

$$K = \frac{\tau_3 - \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}, \quad \zeta_1 \in \left(z_1, z_{n+4}\right), \quad \zeta_2 \in \left(z_2, z_{n+5}\right).$$

Отже, для будь-яких впорядкованих за зростанням чисел $z_j \left(j = \overline{1, n+5}\right)$ з відрізка $[\alpha, \beta]$ ліва частина рівняння (21) є строго монотонна функція та набуває лише додатних значень. З вигляду лівої частини $\omega_{n+1}(p)$ рівняння (21) слідує, що вона має розриви першого роду в точках $p = i,\ i = \overline{0, n}$. Оскільки

$$\lim_{p\to-\infty} \omega_{n+1}(p) = 0,\ \lim_{p\to-r} \omega_{n+1}(p) = \lim_{p\to+r} \omega_{n+1}(p) = W_r^{(n+1)},\ r = \overline{0, n},\ \lim_{p\to\infty} \omega_{n+1}(p) = \infty,$$

то для $p \in (-\infty, 0)$ ліва частина рівняння (21) набуває значення $\omega_{n+1}(p) \in \left(0, W_0^{(n+1)}\right)$, для $p \in (n, \infty)$ — $\omega_{n+1}(p) \in \left(W_n^{(n+1)}, \infty\right)$, а для $p \in (r, r+1)$ — $\omega_{n+1}(p) \in \left(W_r^{(n+1)}, W_{r+1}^{(n+1)}\right)$, $r = \overline{0, n-1}$. Тому, у разі виконання умови (2), рівняння (21) і відповідно система рівнянь (8) має єдиний дійсний розв'язок щодо невідомих $a_i\left(i = \overline{0, n}\right)$, A, c, p і μ для будь-яких впорядкованих за зростанням чисел $z_j\left(j = \overline{1, n+5}\right)$ з відрізка $\left[\alpha, \beta\right]$. Отже, виконання умови (2) є достатнє для існування чебишовського наближення функції $f(x)$ виразом (1) із відносною похибкою на відрізку $\left[\alpha, \beta\right]$, $\alpha > 0$. *Теорему доведено*.

Для знаходження значень параметрів чебишовського наближення виразом (1) можна використати алгоритм Ремеза [4].

Дослідимо достатню умову (2) існування чебишовського наближення виразом (1). Значення виразу $W^{(n+1)}$ співпадає з $W_r^{(n+1)}$, $r = \overline{1, n}$, для функцій $f(x)$, що мають вигляд

$$Bx^{b_0 x^r}, \qquad x > 0, \tag{24}$$

де b_0 і B — будь-які дійсні числа.

Під час доведення теореми було встановлено, що нерівності $W^{(n+1)} > 0$ задовольняють функції $f(x)$, для яких n-та похідна функцій $\Phi(x)$ вигляду (19) строго монотонна на відрізку $\left[\alpha,\beta\right]$. Тому достатній умові (2) існування чебишовського наближення степенево-експоненційним виразом (1) із відносною похибкою на відрізку $\left[\alpha,\beta\right]$ задовольняють, зокрема, знакопостійні функції $f(x)$, неперервно диференційовані до n + 1-ого порядку $\left(f(x) \in C^{n+1}\left[\alpha,\beta\right]\right)$, для яких n-та похідна $\Phi(x)$ є строго монотонна на $\left[\alpha,\beta\right]$, за винятком функцій вигляду (24).

Варто зазначити, що умова (2) не є необхідна для існування чебишовського наближення функції $f(x)$ виразом (1) із відносною похибкою. Її виконання необхідне лише в точках чебишовського альтернансу. У разі використання алгоритму Ремеза, для знаходження параметрів чебишовської апроксимації виразом (1), умова (2) повинна справджуватися в усіх точках проміжних наближень до точок альтернансу.

2. Визначення параметрів чебишовського наближення степенево-експоненційним виразом

Якщо функція $f(x)$ задовольняє умову теореми, а $z_i\left(i = \overline{1, n+5}\right)$ — точки чебишовського альтернансу, то параметри A, c *і* $a_i\left(i = \overline{0, n}\right)$ чебишовського наближення функції $f(x)$ виразом (1) із відносною похибкою визначають за формулами

$$c = D_{n+2}\left(\overline{f}; z_1, z_2, ..., z_{n+4}\right) \Big/ D_{n+2}\left(\phi; z_1, z_2, ..., z_{n+4}\right); \tag{25}$$

$$a_k = \frac{D_{k+1}\left(\overline{f}; z_1, ..., z_{k+3}\right) - \sum_{i=k+1}^{n} a_i D_{k+1}\left(s_i; z_1, ..., z_{k+3}\right) - cD_{k+1}\left(\phi; z_1, ..., z_{k+3}\right)}{D_{k+1}\left(s_k; z_1, ..., z_{k+3}\right)},$$

$$k = \overline{0, n}; \tag{26}$$

$$A = \frac{2f\left(z_1\right) f\left(z_2\right)}{f\left(z_2\right) z_1^{a_0} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z_1^i + cz_1^p\right) + f\left(z_1\right) z_2^{a_0} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i z_2^i + cz_2^p\right)}, \tag{27}$$

де $\phi(p, x) = x^p$. Для визначення точок альтернансу можна використати ітераційну схему Ремеза, а для уточнення точок альтернансу алгоритм Валле-Пуссена [4].

Значення параметра p визначають як розв'язок рівняння (21). Розв'язування рівняння (21) проводять з урахуванням того, що у випадку, якщо значення величини $W^{(n+1)}$ задовольняє нерівностям

$$W_k^{(n+1)} < W^{(n+1)} < W_{k+1}^{(n+1)}, \tag{28}$$

то його розв'язок належить одному з інтервалів $\left(k, k+1\right)$, $\left(k = \overline{0, n-1}\right)$. Тому спочатку необхідно перевірити чи належить корінь рівняння одному з цих інтервалів. Якщо значення параметра p належить одному з цих інтервалів, то його можна визначити за методом хорд чи ділення навпіл. У протилежному випадку значення параметра p належить одному з інтервалів $(-\infty, 0)$ або (n, ∞) .

Із співвідношення (23) випливає, що ліва частина рівняння (21) для $\phi(p, x) = x^p$ є степенева функція, і відповідно це рівняння можна подати у такому вигляді

$$K\left(\zeta_2 / \zeta_1\right)^{p-n-1} = W^{(n+1)}. \tag{29}$$

Тут K, ζ_1, ζ_2 і $W^{(n+1)}$ визначають так само, як і у формулі (23). Враховуючи степеневий характер залежності лівої частини рівняння (21) від p, його розв'язок в інтервалах $(-\infty, 0)$ і (n, ∞) доцільно шукати як корінь рівняння

$$g_{n+1}(p) = V^{(n+1)}, \tag{30}$$

де $g_{n+1}(p) = \ln\left(\omega_{n+1}(p)\right)$, $V^{(n+1)} = \ln\left(W^{(n+1)}\right)$. Розв'язок рівняння (30) можна обчислити за ітераційним методом Ньютона

$$p_{i+1} = p_i - \frac{g_n\left(p_i\right) - V^{(n+1)}}{g'_{n+1}\left(p_i\right)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots. \tag{31}$$

Тут

$$g'_{n+1}(p)=\frac{D_{n+2}\left(\bar{\phi};z_2,z_3,\ldots,z_{n+5}\right)}{D_{n+2}\left(\phi;z_2,z_3,\ldots,z_{n+5}\right)}-\frac{D_{n+2}\left(\bar{\phi};z_1,z_2,\ldots,z_{n+4}\right)}{D_{n+2}\left(\phi;z_1,z_2,\ldots,z_{n+4}\right)};$$

$$\bar{\phi}(p,x)=x^p\ln(x);\quad \phi(p,x)=x^p;$$

$$p_0=\begin{cases}p^*, & \text{якщо}\quad W^{(n+1)}<W_0^{(n+1)},\\ n+1+p^*, & \text{якщо}\quad W^{(n+1)}>W_n^{(n+1)};\end{cases}\qquad (32)$$

$$p^*=\frac{\left|\ln W^{(n+1)}\right|}{\ln\left(z_{n+5}+z_2\right)-\ln\left(z_{n+4}+z_1\right)}.$$

Вибір початкового значення p_0 (32) є достатньо близьким до розв’язку рівняння (30) і забезпечує збіг їхніх знаків, що необхідно для дотримання стійкості ітераційного методу (31). Функція $g_{n+1}(p)$, в якій $\phi(p,x)=x^p$, має розриви у точках $p=\overline{0,n}$ і перехід проміжних значень p_i через одну з цих точок може порушити збіжність методу (31). Попередня перевірка умови (28) і вибір початкового значення p_0 за формулою (32) забезпечують обминання згаданих точок розриву лівої частини рівняння (30) під час знаходження його розв’язку за ітераційною схемою (31). Запропоноване застосування комбінації ітераційних методів для обчислення розв’язку рівняння (30) забезпечує достатньо швидку їхню збіжність, зокрема, ітераційний процес (31) забезпечував досягнення точності обчислення кореня рівняння для тестових прикладів із похибкою 0,3 % за три-чотири ітерації.

Висновки. Достатньою умовою існування чебишовського наближення степенево-експоненційним виразом (1) із відносною похибкою є справджування нерівностей (2). У разі виконання цієї умови параметри чебишовського наближення степенево-експоненційним виразом (1) визначають за формулами (25)-(27). Значення параметра p знаходять як розв’язок трансцендентного рівняння (21) із використанням методу ділення навпіл або методу Ньютона (31).

Література

[1] *Mitin V. F., Kholevchuk V. V., Kolodych B. P.* Ge-on-GaAs film resistance thermometers: Low-temperature conduction and magnetoresistance // Cryogenics. — 2011. — Vol. 51, Issue 1. — P. 68-73.

[2] *Ибрагимова Л. В.* Константы скорости химических реакций в высокотемпературном газе CO_2 // Математическое моделирование. — 2000. — Т. 12, № 4. — С. 3-19.

[3] Chebyshev Approximation by Exponential-Power Expression / *P. S. Malachivskyy, Ya. V. Pizyur, N. V. Danchak, E. B. Orazov* // Cybernetics and Systems Analysis. — 2013. — Vol. 49, Issue 6. — P. 877-881.

[4] *Попов Б. А., Теслер Г. С.* Приближение функций для технических приложений. — Киев: Наук. думка, 1980. — 352 с.

[5] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников. — Москва: Мир, 1977. — 831 с.

[6] *Малачівський П. С., Скопецький В. В.* Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення. — Київ: Наук. думка, 2013. — 270 с.

[7] *Попов Б. А.* Равномерное приближение сплайнами. — Киев: Наук. думка, 1989. — 272 с.

Chebyshev approximation by means of power-exponential expression with the relative error

Nestor Danchak, Petro Malachivskyy, Enver Orazov

The properties of Chebyshev approximation by power-exponential expression are studied. A sufficient condition of the existence of Chebyshev approximation by means of such expression with the smallest relative error is established. A method of the determination of the parameters of this approximation is suggested and approved.

Чебышевское приближение степенно-экспоненциальным выражением с относительной погрешностью

Нестор Данчак, Петро Малачивский, Энвер Ора́зов

Исследованы свойства чебышевского приближения степенно-экспоненциальным выражением. Установлено достаточное условие существования чебышевского приближения таким выражением с относительной погрешностью. Предложен и обоснован метод определения параметров такого приближения.

Отримано 15.05.14