

Вплив локального зміщення маси на електромеханічні поля у діелектричному середовищі з циліндричним отвором

Ольга Грицина

Д. ф.-м. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудасва, 15, Львів, 79005, e-mail: gryt@cmm.lviv.ua

Співвідношення нелокальної теорії деформації твердих неферомагнітних діелектричних тіл, що враховує взаємозв'язок електромагнітних і деформаційних процесів з локальним зміщенням маси, застосовано для вивчення впливу останнього на приповерхневу неоднорідність напружено-деформованого стану та поляризації в безмежному ізотропному середовищі з циліндричним отвором. Досліджено вплив кривини поверхні на приповерхневу неоднорідність напружень, зв'язаного поверхневого заряду та поверхневу енергію деформації.

Ключові слова: нелокальна теорія деформації, електромеханічні поля, локальне зміщення маси, неферомагнітні діелектричні тіла, приповерхневі та масштабні ефекти, поверхнева енергія деформації.

Вступ. Дослідження поляризації та напружено-деформованого стану тонких діелектричних плівок, волокон, а також синтез нових п'єзоактивних нанопористих та нанокомпозитних матеріалів вимагає адекватного врахування у модельному описі приповерхневих та масштабних ефектів. У межах одноконтинуумного підходу згадані ефекти коректно описують нелокальні моделі механіки діелектричних середовищ [1-4]. Однією із таких є модель електротермомеханіки неферомагнітних діелектричних тіл, яка ґрунтується на врахуванні взаємозв'язку процесів деформування, теплопровідності й поляризації із локальним зміщенням маси. З останнім пов'язується можливість зміни структури матеріалу у межах фізично малого елемента тіла. Такі зміни структури матеріалу можна спостерігати, для прикладу, у приміжових областях твердих діелектричних тіл. Зумовлені вони порушенням силової рівноваги атомів у цих областях. Замкнену систему співвідношень згаданої нелокальної моделі механіки неферомагнітних поляризованих термопружних тіл одержано у працях [5-7]. Метою пропонованого дослідження є вивчення впливу локального зміщення маси на приповерхневу неоднорідність електромеханічних полів у твердому неферомагнітному безмежному середовищі з циліндричним отвором, а також використання одержаних результатів для аналізу впливу кривини поверхні на поверхневу енергію деформації твердих діелектричних тіл.

1. Розв'язувальна система рівнянь. Формулювання задачі

Вивчимо вплив вільної поверхні на напружено-деформований стан, електричний потенціал і поляризацію безмежного здатного до поляризації середовища з циліндричним отвором. Проаналізуємо вплив геометричних параметрів (радіуса кривини поверхні та її знаку) на приповерхневу неоднорідність напружень, зв'язаного поверхневого заряду та поверхневу енергію деформації. З цією метою розглянемо рівноважний стан вільного від зовнішньої дії ізотропного тіла, яке є ідеальними діелектриком і у циліндричній системі координат (r, φ, z) займає область (V) . Тіло обмежене замкнутою гладкою поверхнею $r = R$ і контактує з вакуумом — областю (V_v) . Приймаючи ізотермічне наближення, обмежимося розглядом електромагнітних процесів, деформування й локального зміщення маси.

Для ізотропних матеріалів лінеаризована система рівнянь нелокальної теорії деформації неферомагнітних діелектричних електропружних тіл охоплює рівняння руху, балансу наведеної маси та рівняння Максвелла [7]

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_{m\pi}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{ms} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}, \quad (3)$$

лінійні рівняння стану

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = 2G\hat{\boldsymbol{e}} + \left[\left(K - \frac{2}{3}G \right) e - K\alpha_\rho \rho_m \right] \hat{\mathbf{I}}, \quad (4)$$

$$\mu'_\pi = \mu_{\pi 0} + d_\rho \rho_m - \frac{1}{\rho_0} K\alpha_\rho e, \quad (5)$$

$$\mathbf{p} = \chi_E \mathbf{E} - \chi_{Em} \nabla \mu'_\pi, \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\pi}_m = -\chi_m \nabla \mu'_\pi + \chi_{Em} \mathbf{E}, \quad (7)$$

визначальні співвідношення для векторів \mathbf{D} та \mathbf{B} індукції електричного та магнітного полів

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \rho_0 \mathbf{p}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (8)$$

а також геометричні співвідношення, які пов'язують тензор деформації $\hat{\boldsymbol{e}}$ і вектор переміщення \mathbf{u}

$$\hat{\boldsymbol{e}} = \frac{1}{2} \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right]. \quad (9)$$

Тут $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ — тензор напружень; $e = \hat{\boldsymbol{e}} : \hat{\mathbf{I}}$; $\hat{\mathbf{I}}$ — одиничний тензор; \mathbf{E} , \mathbf{H} — вектори напруженостей електричного та магнітного полів; \mathbf{J}_e — вектор струму провідності

та конвективного струму; $\mathbf{J}_{ms} = \partial \mathbf{\Pi}_m / \partial t$; $\mathbf{\Pi}_m$ — вектор локального зміщення маси [8]; $\boldsymbol{\pi}_m = \mathbf{\Pi}_m / \rho_0$; $\mathbf{p} = \mathbf{P} / \rho_0$; \mathbf{P} — вектор поляризації (локального зміщення заряду); $\rho_{m\pi} = -\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_m$ — густина наведеної маси [5]; $\rho_m = \rho_{m\pi} / \rho_0$; $\mu'_\pi = \mu_\pi - \mu$; μ_π — міра зміни внутрішньої енергії системи, зумовленої локальним зміщенням маси [5]; μ — хімічний потенціал; $\mu_{\pi 0}$ і ρ_0 — значення потенціалу μ'_π та густини маси у природному стані безмежного однорідного середовища; ρ_e — густина вільного електричного заряду; ε_0 , μ_0 — електрична та магнітна сталі; K — модуль об'ємного стиску за сталої густини наведеної маси; G — модуль зсуву; α_ρ — коефіцієнт об'ємного розширення, спричиненого локальним зміщенням маси; χ_E — діелектрична сприйнятливість; χ_m і χ_{Em} — коефіцієнти, які характеризують відповідно локальне зміщення маси та поляризованість тіла, зумовлені градієнтом потенціалу μ'_π ; d_ρ — ізохоричний коефіцієнт залежності потенціалу μ'_π від питомої густини наведеної маси; t — час; ∇ — оператор Гамільтона.

Розв'язувальну систему рівнянь отримаємо, підставивши у рівняння (1)-(3) визначальні та геометричні співвідношення (4)-(9). За ключові функції вибираємо вектор переміщень \mathbf{u} , потенціал $\tilde{\mu}'_\pi$ та вектор напруженості електричного поля \mathbf{E} . Для стаціонарних задач нелокальної електромеханіки ідеальних діелектричних тіл розв'язувальна система рівнянь є такою

$$\left(\bar{K} + \frac{1}{3}G \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + G \Delta \mathbf{u} - K \frac{\alpha_\rho}{d_\rho} \nabla \tilde{\mu}'_\pi + \rho_0 \mathbf{F} = 0, \quad (10)$$

$$\Delta \tilde{\mu}'_\pi - \lambda_\mu^2 \tilde{\mu}'_\pi = \lambda_\mu^2 \frac{K \alpha_\rho}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\chi_{Em}}{\chi_m} \nabla \cdot \mathbf{E}, \quad (11)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} - \kappa_E \Delta \tilde{\mu}'_\pi = 0. \quad (12)$$

У співвідношеннях (10)-(12) введено позначення

$$\bar{K} = K - \frac{K^2 \alpha_\rho^2}{\rho_0 d_\rho}, \quad \lambda_\mu^2 = \frac{1}{d_\rho \chi_m}, \quad \kappa_E = \frac{\rho_0 \chi_{Em}}{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \rho_0 \chi_E.$$

Оскільки збурення електромеханічних полів у тілі спричинить випромінювання електричного поля у вакуум, то задачу на визначення вектора напруженості електричного поля розглядаємо як контактну. Тому до системи рівнянь (10)-(12) додаємо рівняння Максвелла у вакуумі

$$\nabla \times \mathbf{E}_v = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D}_v = 0. \quad (13)$$

Тут $\mathbf{D}_v = \varepsilon_0 \mathbf{E}_v$; \mathbf{E}_v , \mathbf{D}_v — вектори напруженості та індукції електричного поля у вакуумі.

Вважаємо, що задача характеризується осьюою симетрією, а тому шукані функції залежать лише від радіуса:

$$\mathbf{u} = (u_r(r), 0, 0), \quad \tilde{\mu}'_\pi = \tilde{\mu}'_\pi(r), \quad \mathbf{E} = (E_r(r), 0, 0), \quad \mathbf{E}_v = (E_{rv}(r), 0, 0). \quad (14)$$

Відтак, компоненти тензора деформації визначаються співвідношеннями:

$$e_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}. \quad (15)$$

Виходячи із рівнянь стану моделі (4)-(7) та співвідношень (15), для обчислення компонент тензора напружень, векторів поляризації та локального зміщення маси маємо формули

$$\sigma_{rr}(r) = \left(\bar{K} + \frac{4}{3}G \right) \frac{du_r}{dr} + \left(\bar{K} - \frac{2}{3}G \right) \frac{u_r}{r} - \frac{K\alpha_\rho}{d_\rho} \tilde{\mu}'_\pi, \quad (16)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r) = \left(\bar{K} + \frac{4}{3}G \right) \frac{u_r}{r} + \left(\bar{K} - \frac{2}{3}G \right) \frac{du_r}{dr} - \frac{K\alpha_\rho}{d_\rho} \tilde{\mu}'_\pi, \quad (17)$$

$$\sigma_{zz}(r) = \left(\bar{K} - \frac{2}{3}G \right) \left(\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} \right) - \frac{K\alpha_\rho}{d_\rho} \tilde{\mu}'_\pi, \quad (18)$$

$$p_r(r) = \chi_E E_r - \chi_{Em} \frac{d\tilde{\mu}'_\pi}{dr}, \quad (19)$$

$$\pi_m(r) = -\chi_m \frac{d\tilde{\mu}'_\pi}{dr} + \chi_{Em} E_r. \quad (20)$$

Тут $\mathbf{p} = (p_r(r), 0, 0)$, $\boldsymbol{\pi}_m = (\pi_m(r), 0, 0)$.

Ґрунтуючись на співвідношеннях (10)-(14), для визначення компонент векторів переміщення u_r , потенціалу $\tilde{\mu}'_\pi$, а також напруженостей електричного поля у тілі E_r і вакуумі E_{rv} маємо рівняння

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} - \frac{K\alpha_\rho}{\left(\bar{K} + \frac{4}{3}G \right) d_\rho} \tilde{\mu}'_\pi \right] = 0, \quad (21)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\tilde{\mu}'_\pi}{dr} \right) - \lambda_{\mu E}^2 \tilde{\mu}'_\pi = \lambda_{\mu E}^2 \frac{K\alpha_\rho}{\rho_0} \frac{1}{r} \frac{d(ru_r)}{dr}, \quad (22)$$

$$\frac{d}{dr} \left[r \left(E_r - \kappa_E \frac{d\tilde{\mu}'_\pi}{dr} \right) \right] = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in (V); \quad (23)$$

$$\frac{d(rE_{rv})}{dr} = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in (V_v), \quad (24)$$

де $\lambda_{\mu E}^2 = \lambda_\mu^2 (1 - \kappa_E \chi_{Em} / \chi_m)^{-1}$.

Крайові умови задачі запишемо так:

$$\forall \mathbf{r} \in (\Sigma) : \quad \sigma_{rr}(R) = \sigma_{r\varphi}(R) = \sigma_{rz}(R) = 0, \quad \tilde{\mu}'_{\pi}(R) = -\mu'_{\pi 0}, \quad (25)$$

$$\varepsilon_0 [E_r(R) - E_{rv}(R)] + \rho_0 p_r(R) = 0. \quad (26)$$

Зазначимо, що перше із співвідношень (25) відповідає умові відсутності на поверхні $r = R$ нормальних напружень, друге — рівності нулеві абсолютного значення потенціалу μ'_{π} , а співвідношення (26) є умовою відсутності на поверхні тіла стрибка радіальної компоненти вектора електричної індукції. Для забезпечення однозначності розв'язку сформульованої задачі до крайових умов (25), (26) слід додати також умову обмеженості полів у разі $r \rightarrow \infty$, якщо об'єктом дослідження є безмежне середовище з циліндричним отвором, чи $r \rightarrow 0$, якщо об'єктом дослідження є безмежне циліндричне тіло.

2. Розв'язок для безмежного середовища з циліндричною порожниною

Розглянемо безмежне середовище з циліндричною порожниною. Тоді області (V) відповідає $r > R$, а області (V_v) — $r < R$, $r = R$ — поверхня тіла. Розв'язок задачі (21)-(26), що задовольняє умові обмеженості полів u_r , $\tilde{\mu}'_{\pi}$, E_r на безмежності ($r \rightarrow \infty$) та напруженості електричного поля E_{rv} у вакуумі ($r = 0$), має вигляд

$$u_r(r) = \mu'_{\pi 0} \frac{K\alpha_{\rho}}{\tilde{\lambda}d_{\rho} \left(\bar{K} + \frac{4}{3}G \right)} \frac{K_1(\tilde{\lambda}R)}{K_0(\tilde{\lambda}R)} \left(\frac{K_1(\tilde{\lambda}r)}{K_1(\tilde{\lambda}R)} - \frac{R}{r} \right), \quad (27)$$

$$\tilde{\mu}'_{\pi}(r) = -\mu'_{\pi 0} \frac{K_0(\tilde{\lambda}r)}{K_0(\tilde{\lambda}R)}, \quad E_r(r) = \mu'_{\pi 0} \kappa_E \tilde{\lambda} \frac{K_1(\tilde{\lambda}r)}{K_0(\tilde{\lambda}R)} \quad \text{в області тіла } r > R; \quad (28)$$

$$E_{rv} = 0 \quad \text{в області вакууму } r < R. \quad (29)$$

Тут $K_0(r)$ і $K_1(r)$ — модифіковані функції Бесселя третього роду нульового та першого порядків відповідно (функції Макдональда), а

$$\tilde{\lambda}^2 = \lambda_{\mu E}^2 (1 + \mathfrak{M}), \quad \mathfrak{M} = \left(\bar{K} + \frac{4}{3}G \right) \Big/ \frac{K^2 \alpha_{\rho}^2}{\rho_0 d_{\rho}}.$$

З використанням формул (16)-(20), (27), (28) обчислимо компоненти тензора напружень, векторів поляризації та локального зміщення маси

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{2\mu'_{\pi 0} G K \alpha_{\rho}}{d_{\rho} \left(\bar{K} + \frac{4}{3}G \right)} \frac{K_1(\tilde{\lambda}R)}{K_0(\tilde{\lambda}R)} \frac{1}{\tilde{\lambda}r} \left(\frac{R}{r} - \frac{K_1(\tilde{\lambda}r)}{K_1(\tilde{\lambda}R)} \right), \quad (30)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r) = \frac{2\mu'_{\pi 0} G K \alpha_{\rho}}{d_{\rho} \left(\bar{K} + \frac{4}{3} G \right)} \frac{K_1(\tilde{\lambda} R)}{K_0(\tilde{\lambda} R)} \left(\frac{K_0(\tilde{\lambda} r)}{K_1(\tilde{\lambda} R)} + \frac{1}{\tilde{\lambda} r} \frac{K_1(\tilde{\lambda} r)}{K_1(\tilde{\lambda} R)} - \frac{R}{\tilde{\lambda} r^2} \right), \quad (31)$$

$$\sigma_{zz}(r) = \frac{2\mu'_{\pi 0} G K \alpha_{\rho}}{d_{\rho} \left(\bar{K} + \frac{4}{3} G \right)} \frac{K_0(\tilde{\lambda} r)}{K_0(\tilde{\lambda} R)}, \quad (32)$$

$$p_r(r) = -\kappa_E \tilde{\lambda} \mu'_{\pi 0} \frac{\varepsilon_0}{\rho_0} \frac{K_1(\tilde{\lambda} r)}{K_0(\tilde{\lambda} R)}, \quad (33)$$

$$\pi_m(r) = -\mu'_{\pi 0} \tilde{\lambda} \chi_m \left(1 - \kappa_E \frac{\chi_{Em}}{\chi_m} \right) \frac{K_1(\tilde{\lambda} r)}{K_0(\tilde{\lambda} R)}. \quad (34)$$

При цьому вектор індукції електричного поля у тілі дорівнює нулеві.

Аналіз співвідношень (30)-(33) показує, що приповерхневі області тіла характеризуються неоднорідним розподілом напружень та поляризації. Поверхневі значення осьових σ_{zz} та кільцевих $\sigma_{\varphi\varphi}$ напружень рівні між собою і не залежать від радіуса кривини:

$$\sigma_{\varphi\varphi}(R) = \sigma_{zz}(R) \equiv \sigma^* = 2G\mu'_{\pi 0} K \alpha_{\rho} / d_{\rho} \left(\bar{K} + \frac{4}{3} G \right).$$

При цьому на поверхні $r = R$ індукується зв'язаний поверхневий заряд густини σ_{se} , для визначення якого на основі співвідношення (33) отримаємо формулу

$$\sigma_{se} = -\kappa_E \tilde{\lambda} \mu'_{\pi 0} \varepsilon_0 \frac{K_1(\tilde{\lambda} R)}{K_0(\tilde{\lambda} R)}. \quad (35)$$

На рис. 1 показано розподіл кільцевих $\sigma_{\varphi\varphi}$, радіальних σ_{rr} та осьових σ_{zz} напружень (суцільна, пунктирна та штрих-пунктирна лінії відповідно) у приповерхневій області безмежного середовища з тонким циліндричним отвором радіуса $R = 5\tilde{\lambda}$. Зі зменшенням радіуса порожнини неоднорідність у розподілі напружень збільшується і охоплює ширші приповерхневі області. Криві на рис. 2 ілюструють вплив кривини поверхні на осьові напруження ($\sigma_k = \sigma_{zz} - \sigma_{zz}^n$, де σ_{zz}^n — напруження у вільному від зовнішньої дії півпросторі з цього ж матеріалу [9]). Суцільна, штрих-пунктирна та пунктирна лінії відповідають $R = 5\tilde{\lambda}, 10\tilde{\lambda}, 20\tilde{\lambda}$. Зі зменшенням радіуса порожнини абсолютні значення осьових напружень теж зменшуються.

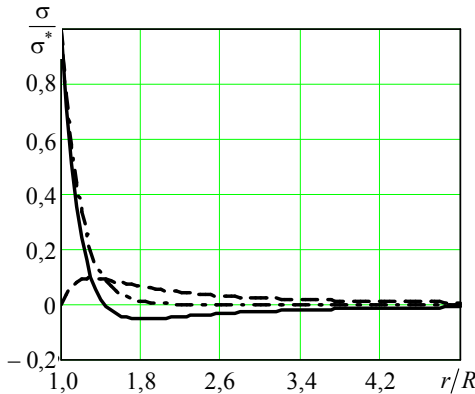


Рис. 1. Розподіл напружень у середовищі з циліндричним отвором

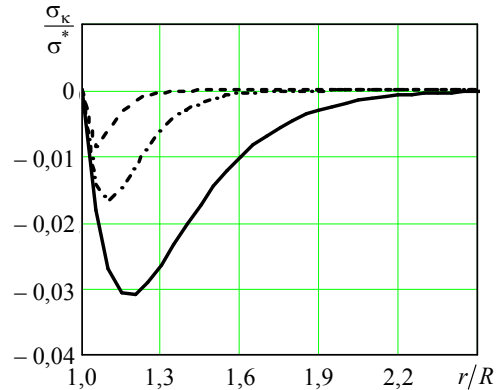


Рис. 2. Вплив кривини поверхні на осьові напруження

3. Вплив кривини поверхні на поверхневу енергію деформації

Використаємо розв'язок сформульованої задачі для обчислення поверхневої енергії деформації. Згідно [9] ця енергія визнається поверхневим значенням проекції вектора локального зміщення маси π_m на нормаль до поверхні (Σ), тобто

$$U_{\Sigma} = -\frac{1}{2} \rho_0 \mu'_{\pi 0} \mathbf{n} \cdot \pi_m \Big|_{\mathbf{r} \in (\Sigma)}. \quad (36)$$

Грунтуючись на співвідношеннях (34) та (36), для поверхневої енергії деформації $U_{\Sigma}^{u.n.}$ у безмежному середовищі з циліндричною порожниною маємо:

$$U_{\Sigma}^{u.n.} = -\frac{1}{2} \rho_0 \mu'^2_{\pi 0} \tilde{\lambda} \chi_m \left(1 - \kappa_E \frac{\chi_{Em}}{\chi_m} \right) \frac{K_1(\tilde{\lambda} R)}{K_0(\tilde{\lambda} R)}. \quad (37)$$

Враховуючи, що $U_{\Sigma}^{\infty} = -\frac{1}{2} \rho_0 \mu'^2_{\pi 0} \tilde{\lambda} \chi_m \left(1 - \kappa_E \frac{\chi_{Em}}{\chi_m} \right)$ — поверхневий натяг у безмежному тілі з плоскою межею [9], надамо виразу (37) вигляду

$$U_{\Sigma}^{u.n.} = U_{\Sigma}^{\infty} \frac{K_1(\tilde{\lambda} R)}{K_0(\tilde{\lambda} R)}. \quad (38)$$

У формулах (35) та (38) для великих $\tilde{\lambda} R$ врахуємо асимптотичні подання для функцій Макдональда $K_0(\tilde{\lambda} R)$ і $K_1(\tilde{\lambda} R)$ [10]:

$$K_0(\tilde{\lambda}R) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\lambda}R}} e^{-\tilde{\lambda}R} \left(1 - \frac{1}{8\tilde{\lambda}R} + \dots\right), \quad K_1(\tilde{\lambda}R) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\lambda}R}} e^{-\tilde{\lambda}R} \left(1 + \frac{3}{8\tilde{\lambda}R} + \dots\right).$$

Тоді: $\frac{K_1(\tilde{\lambda}R)}{K_0(\tilde{\lambda}R)} \approx 1 + \frac{1}{2\tilde{\lambda}R}$, а тому згадані формули можемо записати так

$$\sigma_{se}(R) \approx -\kappa_E \tilde{\lambda} \mu'_{\pi 0} \varepsilon_0 \left(1 + \frac{3}{4\tilde{\lambda}R}\right), \quad U_{\Sigma}^{u.n.} \approx U_{\Sigma}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2\tilde{\lambda}R}\right). \quad (39)$$

Відтак, для великих значень $\tilde{\lambda}R$ одержимо, що $U_{\Sigma}^{u.n.} \approx U_{\Sigma}^{\infty}$, а величина зв'язаного поверхневого заряду прямує до значення, властивого тілу із плоскою межею [9]. Таким чином співвідношення (35), (38), як і формули (39), описують масштабний ефект зв'язаного поверхневого заряду та поверхневої енергії деформації.

Зазначимо, що вплив вільної поверхні на напружено-деформований стан безмежного циліндричного тіла вивчено у праці [9]. Там же ж для поверхневої енергії деформації безмежного циліндра отримано формулу

$$U_{\Sigma}^u = U_{\Sigma}^{\infty} \frac{(K + G/3)\tilde{\lambda}RI_1(\tilde{\lambda}R)}{(K + G/3)\tilde{\lambda}RI_0(\tilde{\lambda}R) - 2G\mathfrak{M}I_1(\tilde{\lambda}R)}, \quad (40)$$

де $I_0(r)$ та $I_1(r)$ — модифіковані функції Бесселя першого роду нульового та першого порядків відповідно (функції Макдональда).

Означимо кривину поверхні співвідношенням

$$\kappa = \begin{cases} -(\tilde{\lambda}R)^{-1}, & \text{середовище з циліндричною порожниною,} \\ 0, & \text{плоска поверхня,} \\ (\tilde{\lambda}R)^{-1}, & \text{циліндр.} \end{cases}$$

Тоді, зважаючи на співвідношення (38) і (40), запишемо узагальнюючу формулу для визначення впливу кривини поверхні на густину поверхневої енергії деформації твердих діелектричних тіл

$$\frac{U_{\Sigma}(\kappa)}{U_{\Sigma}^{\infty}} = \begin{cases} \frac{K_1(-1/\kappa)}{K_0(-1/\kappa)}, & \kappa < 0, \\ 1, & \kappa = 0, \\ \frac{I_1(1/\kappa)}{I_0(1/\kappa) - 2G\mathfrak{M}\kappa(K + G/3)^{-1}I_1(1/\kappa)}, & \kappa > 0. \end{cases}$$

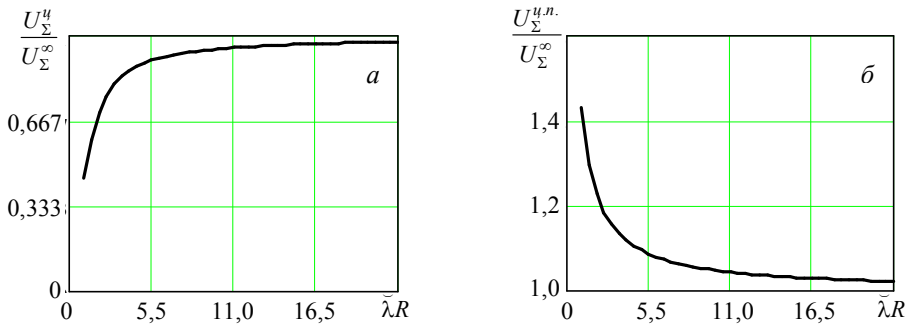


Рис. 3. Залежність поверхневої енергії деформації від радіуса кривини в безмежному циліндрі (а) та безмежному середовищі з циліндричною порожниною (б)

Збільшення кривини вільної поверхні безмежного циліндричного тіла призводить до зменшення абсолютного значення поверхневої енергії, порівняно з тілом із плоскою поверхнею (див. рис. 3а), тоді як у безмежному середовищі з циліндричною порожниною навпаки, збільшення кривини поверхні призводить до збільшення абсолютного значення поверхневої енергії деформації (див. рис. 3б). Таким чином, значення поверхневої енергії у тілі з плоскою поверхнею ($\kappa=0$) не є мінімумом поверхневої енергії деформації, як функції кривини (див. рис. 4), що узгоджується також з результатами, отриманими в роботі [11].

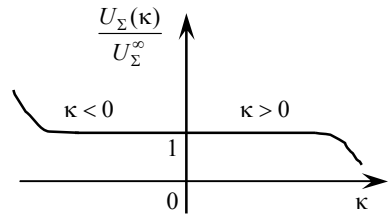


Рис. 4. Вплив кривини поверхні на поверхневу енергію деформації

Висновки. Грунтуючись на співвідношеннях нелокальної електромеханіки твердих неферомагнітних діелектричних тіл вивчено приповерхневу неоднорідність напружено-деформованого стану та поляризації у безмежному середовищі з циліндричним отвором. З використанням аналітичного розв'язку сформульованої крайової задачі математичної фізики визначено поверхневу енергію деформації та проаналізувати вплив на неї кривини поверхні. Показано, що зі збільшенням кривини опуклої поверхні абсолютне значення поверхневої енергії деформації зменшується, порівняно з тілом із плоскою межею. Для від'ємної кривини ця залежність зворотна: згадана поверхнева енергія збільшується зі збільшенням кривини поверхні.

Література

- [1] Mindlin R. D. Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics // J. Elast. — 1972. — Vol. 2, No 4. — P. 217-282.
- [2] Kalpakidis V. K., Agiasofitou E. K. On material equations in second order gradient electroelasticity // J. Elast. — 2002. — Vol. 67. — P. 205-227.
- [3] Yang J. Review of a few topics in piezoelectricity // Appl. Mech. Rev. — 2006. — Vol. 59. — P. 335-345.

- [4] *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред — Москва: Мир, 1991. — 560 с.
- [5] *Бурак Я. Й., Кондрат В. Ф., Грицина О. Р.* Приповерхневі механоелектромагнетні явища у термopужних поляризованих тілах за локального зміщення маси // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2007. — № 4. — С. 5-17.
- [6] *Кондрат В., Грицина О.* Рівняння електромагнітотермомеханіки поляризованих неферромагнітних тіл за врахування локального зміщення маси // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2008. — Вип. 8. — С. 69-83.
- [7] *Бурак Я., Кондрат В., Грицина О.* Основи локально градієнтної теорії діелектриків. — Ужгород: Поліграфцентр «Ліра», 2011. — 208 с.
- [8] *Бурак Я. Й.* Визначальні співвідношення локально-градієнтної термомеханіки // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1987. — № 12. — С. 19-23.
- [9] *Грицина О.* Визначення поверхневої енергії твердих тіл // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2013. — Вип. 17. — С. 43-54.
- [10] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). — Москва: Наука, 1974. — 832 с.
- [11] *Schwartz J.* Solutions of the equations of equilibrium of elastic dielectrics: stress functions, concentrated force, surface energy // Int. J. Solids and Struct. — 1969. — Vol. 5, Issue 11. — P. 1209-1220.

Effects of local mass displacement on electromechanical fields in dielectric medium with cylindrical hole

Olha Hrytsyna

With the use of relationships of the non-local theory of deformations of non-ferromagnetic dielectric solids, which takes into account the interaction of electromagnetic and deformation processes with a local displacement of mass, the effect of the local displacement of mass on the near-surface heterogeneity of the stress-strain state and polarization in an infinite isotropic medium with a cylindrical hole are investigated. The effect of a surface curvature on the near-surface inhomogeneity of the stresses, a bound surface charge and a surface energy of the deformation are studied.

Влияние локального смещения массы на электромеханические поля в диэлектрической среде с цилиндрическим отверстием

Ольга Грицина

Соотношения нелокальной теории деформации твердых неферромагнитных диэлектрических тел, учитывающей взаимосвязь электромагнитных и деформационных процессов с локальным смещением массы, использованы для изучения влияния последнего на приповерхностную неоднородность напряженно-деформированного состояния и поляризации в изотропной безграничной среде с цилиндрическим отверстием. Исследовано влияние кривизны поверхности на приповерхностную неоднородность напряжений, связанного поверхностного заряда и поверхностной энергии деформации.

Представлено професором В. Чекуріним

Отримано 06.11.14