

## Оптимізація транспортних операцій чотириланкового замкнутого маніпулятора

Мирослав Демидюк

К. ф.-м. н., с. н. с., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, м. Львів, 79060, e-mail: demydyuk@iapmm.lviv.ua

*Досліджуємо керований рух чотириланкового маніпулятора замкнутої кінематичної структури. Маніпулятор під дією керувань (моментів сил у шарнірах) переносить вантаж із заданого початкового положення у деяке відоме кінцеве. Для керування рухом маніпулятора достатньо прикласти керуючі зусилля у двох шарнірах (з доступних чотирьох). Формулюємо задачу визначення такої пари шарнірів і відповідних їм керувань, які забезпечують виконання транспортної операції з мінімальним значенням квадратичного (за керуваннями) функціонала. Алгоритм розв'язання задачі ґрунтується на параметризації узагальнених координат маніпулятора набором заданих функцій і використанні методики обернених задач динаміки та числових процедур нелінійного математичного програмування.*

**Ключові слова:** маніпуляційна система, математичне моделювання, оптимальне керування, параметрична оптимізація, математичне програмування.

**Вступ.** Успішному вирішенню проблем автоматизації сучасного виробництва значною мірою сприяють досягнення в області робототехнічних маніпуляційних систем. Ці системи в наш час широко використовуються у багатьох галузях промисловості та виконують різноманітні технологічні операції. Також вони незамінні під час виконання робіт в екстремальних умовах, небезпечних для здоров'я людини, наприклад, у космічному просторі, під водою, за підвищеної радіації і т. д. Серед маніпуляційних систем важливе місце займають маніпулятори замкнутої кінематичної структури. Характерною властивістю таких маніпуляторів є висока точність позиціонування робочого органу, що зумовлено підвищеною сумарною жорсткістю спарених ланок. Тому дослідження керованих рухів замкнутих маніпуляційних систем, побудова оптимальних режимів керування цими системами є актуальними задачами робототехніки.

Задачі оптимізації замкнутих маніпуляційних систем у різноманітних формулюваннях досліджувались у низці праць, зокрема, [1-5]. У роботі [1] розглянуто плоский чотириланковий замкнутий маніпулятор, який під дією активних і пасивних (пружинно-демпферних) приводів виконує циклічні транспортні операції. Розроблено алгоритм розв'язання задачі сукупної оптимізації законів руху маніпулятора та конструкційних параметрів пасивних приводів із метою мінімізації квадратичного функціонала. Алгоритм ґрунтується на методиці параметризації узагальнених координат системи набором заданих функцій і зведенні вихідної

задачі оптимального керування до задачі нелінійного математичного програмування. Методику параметричної оптимізації використано також у статті [2] для розв'язання задачі оптимізації лінійних розмірів ланок і законів руху чотириланкового замкнутого маніпулятора. У праці [3] досліджено задачу оптимального керування чотириланковою маніпуляційною системою замкнутої кінематичної структури. Тут оптимальні режими керування побудовано за допомогою принципу максимуму Понтрягіна та чисельних методів розв'язання двоточкових крайових задач. Керований рух чотириланкового замкнутого маніпулятора розглядають також у роботі [4]. Три замкнуті ланки обертаються у горизонтальній площині, третя ланка поступально переміщається у вертикальному напрямку. У шарнірах маніпулятора поряд з активними керуваннями діють також пасивні (пружини, демпфери). За допомогою методів параметричної оптимізації розв'язано задачу розрахунку оптимальних керувань і параметрів пасивних приводів, за яких маніпулятор виконує циклічну транспортну операцію з мінімізацією заданого функціонала. У статті [5] побудовано рівняння руху плоского замкнутого чотириланкового маніпулятора, а також проаналізовано його сингулярні конфігураційні положення. Результати багатопланових досліджень задач оптимізації режимів керування нелінійних маніпуляційних систем відображено, зокрема, у низці статей [6-11] і монографій [12-14].

У цій статті досліджуємо оптимальні режими руху чотириланкового маніпулятора замкнутої кінематичної структури. Маніпулятор під дією керувань (моментів сил у шарнірах) виконує транспортну операцію у горизонтальній площині: переносить вантаж із заданого початкового положення робочої зони у заданий кінцевий стан. Для керування рухом маніпулятора достатньо прикласти керування у двох шарнірах (із можливих чотирьох). Мета статті — дослідити вплив активно керованих шарнірів на енергетичні характеристики маніпулятора. Формулюємо задачу визначення такої пари шарнірів і відповідних їм керувань, за яких маніпулятор виконає транспортну операцію з мінімальним значенням заданого квадратичного функціонала. Алгоритм розв'язання задачі ґрунтуються на параметризації узагальнених координат маніпулятора набором заданих функцій і використанні методики обернених задач динаміки та чисельних процедур нелінійного математичного програмування. Ефективність алгоритму проілюстровано результатами числового моделювання субоптимальних режимів руху досліджуваного маніпулятора.

## 1. Математична модель чотириланкового замкнутого маніпулятора

Розглянемо чотириланковий маніпулятор, що здійснює керований рух у горизонтальній площині (рис. 1). Ланки маніпулятора  $O_1A_1$ ,  $A_1B$ ,  $BA_2$ ,  $A_2O_2$  послідовно з'єднані між собою циліндричними шарнірами  $A_1$ ,  $B$ ,  $A_2$ . За допомогою циліндричних шарнірів  $O_1$ ,  $O_2$  маніпулятор зв'язаний з нерухомою основою. Біля шарніра  $B$  розміщено захват (із вантажем). Осі всіх шарнірів ортогональні горизонтальній площині. Для моделювання руху маніпулятора його ланки вважаємо твердими тілами, а шарніри — ідеальними. Для спрощення математичної моделі також

припускаємо, що лінійні розміри захвата (разом із вантажем) є малі порівняно з довжинами ланок маніпулятора, тому захват із вантажем моделюємо точковою масою, зосередженою у шарнірі  $B$ .

Для опису руху маніпулятора введемо нерухому декартову систему відліку  $O_1XY$  з віссю  $O_1X$ , що проходить через шарнір  $O_2$  (рис. 1). Позначимо:  $\alpha_i, \beta_i$  — кути повороту ланок  $O_iA_i, A_iB$  відносно осі  $O_1X$ ;  $a_i = |O_iA_i|$ ,  $b_i = |A_iB|$  — довжини ланок маніпулятора;  $m_{bi}$  — маса ланки  $A_iB$ ;  $d_i$  — відстань від осі шарніра  $A_i$  до центра маси тіла  $A_iB$ ;  $J_{ai}, J_{bi}$  — моменти інерції ланок  $O_iA_i, A_iB$  відносно осей шарнірів  $O_i, A_i$  відповідно;  $m$  — маса захвата з вантажем;  $L = |O_1O_2|$  — відстань між шарнірами  $O_1$  і  $O_2$ ,  $i = 1, 2$ . Для зручності запису

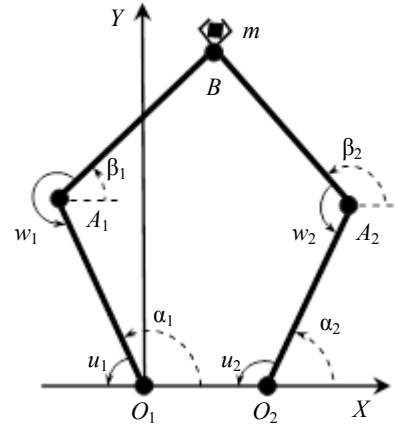


Рис. 1. Кінематична схема маніпулятора

рівнянь руху замкнутої маніпуляційної системи розділимо її у шарнірі  $B$  на дві підсистеми  $O_1A_1B$  і  $O_2A_2B$ , навантаживши кожен з них (у точці  $B$ ) масою  $0,5m$  і приклавши відповідні сили реакції  $\mathbf{R}$  і  $-\mathbf{R}$  [15]. Тоді рівняння руху маніпулятора можна подати у вигляді системи чотирьох нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{aligned} K_{ai}\ddot{\alpha}_i + K_i \left[ \ddot{\beta}_i \cos(\alpha_i - \beta_i) + \dot{\beta}_i^2 \sin(\alpha_i - \beta_i) \right] &= \\ = u_i - w_i + (-1)^i a_i (R_x \sin \alpha_i - R_y \cos \alpha_i), \\ K_{bi}\ddot{\beta}_i + K_i \left[ \ddot{\alpha}_i \cos(\alpha_i - \beta_i) - \dot{\alpha}_i^2 \sin(\alpha_i - \beta_i) \right] &= \\ = w_i + (-1)^i b_i (R_x \sin \beta_i - R_y \cos \beta_i), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (1)$$

доповненої умовами нерозривності в шарнірі  $B$

$$\begin{aligned} a_1 \cos \alpha_1 + b_1 \cos \beta_1 &= L + a_2 \cos \alpha_2 + b_2 \cos \beta_2, \\ a_1 \sin \alpha_1 + b_1 \sin \beta_1 &= a_2 \sin \alpha_2 + b_2 \sin \beta_2, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $u_i, w_i$  — моменти керуючих сил, прикладених у шарнірах  $O_i, A_i$  відповідно;  $R_x, R_y$  — проекції вектора  $\mathbf{R}$  на осі системи відліку  $O_1XY$ ,  $K_i = a_i(d_i m_{bi} + 0,5m b_i)$ ,  $K_{ai} = J_{ai} + a_i^2(m_{bi} + 0,5m)$ ,  $K_{bi} = J_{bi} + 0,5m b_i^2$ ,  $i = 1, 2$ . Крапкою (зверху над величиною) позначено диференціювання за часом  $t$ . Співвідношення (1) є рівняння Лагранжа другого роду [14, 15], що описують рух дволанкових  $O_1A_1B$  й  $O_2A_2B$  під дією керувань  $u_1, w_1$  і  $u_2, w_2$  та сил реакцій  $\mathbf{R}$  і  $-\mathbf{R}$  відповідно. Співвідношення (2) виражають умови нерозривності геометричної структури маніпулятора. Разом співвідношення (1), (2) утворюють повну систему рівнянь руху досліджуваного

маніпулятора. Зауважимо, що праві частини рівнянь (1) записані для загального випадку, коли моменти сил прикладені у чотирьох шарнірах. З аналізу кінематичної структури маніпулятора слідує, що для керування його рухом достатньо прикласти керуючі зусилля у двох довільних шарнірах. Далі, під час вибору конкретної пари активно керованих шарнірів праві частини у співвідношенні (1) відповідно спрощуємо.

## 2. Параметрична оптимізація режимів керування маніпулятора

Обмежимося дослідженням керованого руху маніпулятора у верхній півплощині системи координат  $O_1XY$  з урахуванням таких умов на його кутові координати

$$0 < \alpha_1 \leq \pi, \quad 0 \leq \alpha_2 < \pi, \quad \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2, \quad \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2, \quad \beta_2 - \beta_1 \neq \pi, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

де  $T$  — тривалість руху маніпулятора. Нерівність  $\beta_2 - \beta_1 \neq \pi$  означає, що під час руху маніпулятора точка  $B$  не повинна перетинати пряму  $A_1A_2$ . Наявність введених обмежень зумовлена коректністю розрахункової схеми під час обчислення динамічних характеристик маніпулятора. Нехай маніпулятор упродовж часу  $T$  переносить вантаж із заданого початкового стану

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0 \quad (4)$$

у заданий кінцевий стан

$$x(T) = x_T, \quad y(T) = y_T, \quad \dot{x}(T) = \dot{y}(T) = 0. \quad (5)$$

Тут  $x, y$  — координати точки  $B$  у системі відліку  $O_1XY$ ;  $x_0, y_0, x_T, y_T$  — задані сталі параметри, які задовольняють умови досяжності захвата

$$x_\tau^2 + y_\tau^2 \leq (a_1 + b_1)^2, \quad (x_\tau - L)^2 + y_\tau^2 \leq (a_2 + b_2)^2 \quad \tau = 0, T,$$

та узгоджені з обмеженнями (3). Зазначимо, що згідно умов (3) захват у моменти часу  $t = 0$  і  $t = T$  повинен розміщатися з одного боку від прямої  $A_1A_2$ .

Для зручності подальших викладок позначимо через  $u_3, u_4$  моменти сил  $w_2, w_1$  відповідно. Позначимо також через  $P_{ij}$  пару шарнірів, у яких прикладені керування  $u_i, u_j, i = 1, 2, j = i + 1, 4$ :  $P_{1,2} = (O_1, O_2), P_{1,3} = (O_1, A_2), P_{1,4} = (O_1, A_1), P_{2,3} = (O_2, A_2), P_{2,4} = (O_2, A_1)$ ; через  $P = \{P_{ij}\}$  множину допустимих пар активно керованих шарнірів маніпулятора. Для оцінювання якості режимів керування (для шарнірної пари  $P_{ij}$ ) використаємо квадратичний функціонал

$$E_{ij} = \int_0^T [u_i^2(t) + u_j^2(t)] dt. \quad (6)$$

Квадратичний (за керуваннями) функціонал часто використовують у задачах оптимального керування маніпуляційними системами [6, 14, 16]. Мінімізація функціонала (6) дає можливість понизити порогові значення керуючих зусиль маніпулятора, зменшивши цим самим енергозатрати на виконання транспортної операції.

У разі, якщо керування системою відбувається за допомогою електродвигунів постійного струму, то функціонал (6) (за певних припущень) характеризує сумарну кількість тепла, яке виділяється в обмотках двигунів. І як наслідок, доцільною є побудова таких режимів керування, за яких це тепло буде мінімальним.

Сформулюємо таку задачу. Визначити пару шарнірів  $P_{i^*j^*} \in P$  та відповідні керування  $u_{i^*}^*(t), u_{j^*}^*(t), t \in [0, T]$ , за яких маніпулятор перемістить вантаж за умов (3) із початкового стану (4) у кінцевий стан (5) із мінімальним значенням функціонала  $E_{ij}$ :  $E^* = \min_{P_{ij} \in P} \left\{ \min_{u_i, u_j} E_{ij} \right\}$ .

Розв'язок сформульованої задачі будемо у два етапи. На першому етапі фіксуємо пару активно керованих шарнірів  $P_{ij} \in P$ . На другому етапі для вибраної пари  $P_{ij}$  визначаємо оптимальні керування  $u_i^*, u_j^*$ , які за умов (3) забезпечать переміщення вантажу зі стану (4) у стан (5) із мінімальним значенням функціонала (6)  $E_{ij}^* = \min_{u_i, u_j} E_{ij}$ . Наведені етапи послідовно повторюємо доки не розглянемо всі шарнірні пари множини  $P$ . Шукану оптимальну пару  $P_{i^*j^*}$  (а також відповідні керування  $u_{i^*}^*, u_{j^*}^*$ ) визначаємо простим порівнянням величин  $E_{ij}^*, i = 1, 2, j = i + \overline{1, 4}$ , у результаті якого знаходимо  $E^* = \min_{P_{ij} \in P} E_{ij}^*$ .

Опишемо детальніше окремі процедурні моменти другого етапу. Суттєва нелінійність рівнянь руху (1), (2), а також наявність обмежень (3), ускладнюють застосування класичних методів теорії керування для побудови оптимальних  $u_i^*, u_j^*$ . Ефективною тут є методика параметричної оптимізації (у просторі узагальнених координат системи), суть якої полягає у зведенні задачі оптимального керування до задачі мінімізації функції багатьох змінних. Узагальнені координати  $\alpha_1, \beta_1$  подаємо у вигляді суми кубічного полінома та скінченного тригонометричного ряду з невідомими коефіцієнтами [2, 17]. Коефіцієнти полінома знаходимо з умов (4), (5), коефіцієнти тригонометричного ряду приймаємо за параметри оптимізації (позначимо їх вектором  $\mathbf{z}_{ij}$ ). Решту кутів  $\alpha_2, \beta_2$  визначаємо з умов нерозривності (2). Кутові швидкості  $\dot{\alpha}_i, \dot{\beta}_i$  та прискорення  $\ddot{\alpha}_i, \ddot{\beta}_i$  обчислюємо диференціюванням відповідних виразів. Умови (3) задовільняємо за допомогою процедури зовнішніх штрафних функцій, попередньо подавши обмеження вигляду  $g^{(0)}(t) \leq g(t) \leq g^{(1)}(t)$  в інтегральній формі [7, 8]

$$V = \int_0^T \left[ \left( g - g^{(1)} \right)_+ + \left( g^{(0)} - g \right)_+ \right] dt, \quad (7)$$

де  $(v)_+ = v$ , якщо  $v \geq 0$ , і  $(v)_+ = 0$ , якщо  $v < 0$ . Далі, використовуючи підхід обернених задач динаміки, з рівнянь (1) знаходимо параметричне сімейство керувань

$u_i(t, \mathbf{z}_{ij}), u_j(t, \mathbf{z}_{ij})$ . Після підстановки отриманих керувань у вираз для функціонала (6) отримуємо функцію багатьох змінних  $E_{ij}(\mathbf{z}_{ij})$ . Таким способом другий етап зводимо до розв'язання задачі нелінійного математичного програмування

$$E_{ij}(\mathbf{z}) + \langle \lambda_{ij}, \mathbf{V}(\mathbf{z}_{ij}) \rangle \rightarrow \min_{\mathbf{z}_{ij}}. \quad (8)$$

Тут  $\lambda_{ij}$  — вектор заданих величин (штрафних коефіцієнтів). Вектор-функцію  $\mathbf{V}(\mathbf{z}_{ij})$  отримуємо з обмежень у співвідношенні (3) з урахуванням їх інтегрального зображення (7), кутовими дужками  $\langle \rangle$  позначено скалярний добуток відповідних векторів. Для розв'язання задачі (8) використовуємо стандартні чисельні методи мінімізації функцій багатьох змінних [18, 19].

Зауважимо, що після підстановки виразів для кутів  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  та їх похідних у співвідношення (1) керування  $u_i, u_j$  (а також реакції  $R_x, R_y$ ) отримаємо, розв'язавши систему чотирьох лінійних алгебричних рівнянь

$$\mathbf{A}_{ij} \mathbf{u}_{ij} = \mathbf{h}, \quad \mathbf{u}_{ij} = (u_i \quad u_j \quad R_x \quad R_y)^T, \quad (9)$$

де  $\mathbf{h}$  — вектор розмірності 4, компоненти якого визначаються лівими частинами рівнянь (1),  $\mathbf{A}_{ij} = (\mathbf{S}_{ij} \quad \mathbf{A}_0)$  — блочна матриця, в якій блок  $\mathbf{S}_{ij}$  залежить від вибраної пари керованих шарнірів  $P_{ij}$ :

$$\mathbf{S}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{1,4} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{2,4} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} -a_1 \sin \alpha_1 & a_1 \cos \alpha_1 \\ -b_1 \sin \beta_1 & b_1 \cos \beta_1 \\ a_2 \sin \alpha_2 & -a_2 \cos \alpha_2 \\ b_2 \sin \beta_2 & -b_2 \cos \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Відомо [20], що якщо визначник матриці  $\mathbf{A}_{ij}$  відмінний від нуля, то система (9) має єдиний розв'язок. Після нескладних обчислень отримуємо для  $\det \mathbf{A}_{ij}$ :

$$\det \mathbf{A}_{1,2} = b_1 b_2 \sin(\beta_2 - \beta_1), \quad \det \mathbf{A}_{1,3} = -\det \mathbf{A}_{1,2} - a_2 b_1 \sin(\alpha_2 - \beta_1),$$

$$\det \mathbf{A}_{1,4} = a_2 b_2 \sin(\beta_2 - \alpha_2), \quad \det \mathbf{A}_{2,3} = a_1 b_1 \sin(\beta_1 - \alpha_1),$$

$$\det \mathbf{A}_{2,4} = \det \mathbf{A}_{1,2} + a_1 b_2 \sin(\beta_2 - \alpha_1),$$

звідки, враховуючи обмеження (3), слідує  $\det \mathbf{A}_{ij} \neq 0, i = 1, 2, j = i + \overline{1,4}$ .

Зауважимо, що пара шарнірів  $P_{3,4} = (A_2, A_1)$  вище не розглядалась (як активно керована) із-за ускладнень під час побудови необхідних для  $\det A_{3,4} \neq 0$  обмежень на кутові координати маніпулятора.

Зазначимо також, що використана параметрична методика дає можливість побудувати наближений розв'язок задачі оптимального керування. Однак для переважної більшості маніпуляційних систем, математичні моделі яких є суттєво нелінійними та використання класичних методів оптимального керування викликає значні труднощі, застосування саме такого підходу дає змогу в реальному часі побудувати субоптимальні керування й оцінити динамічні характеристики систем. Математичні питання обґрунтування параметричної методики, а також строгі оцінки точності побудованих розв'язків вимагають окремого дослідження й у статті не наводяться.

### 3. Числове моделювання субоптимального руху маніпулятора

Опишемо окремі результати розв'язання сформульованої вище задачі для маніпулятора з такими параметрами:  $a_1 = a_2 = 0,8$  м,  $b_1 = b_2 = 0,6$  м,  $d_1 = d_2 = 0,3$  м,  $m_{b1} = m_{b2} = 4,306$  кг,  $J_{a1} = J_{a2} = 1,236$  кг·м<sup>2</sup>,  $J_{b1} = J_{b2} = 0,522$  кг·м<sup>2</sup>,  $L = 0,4$  м. Маса вантажу становила  $m = 8$  кг, параметри транспортної операції:  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1,2$  м,  $x_1 = 0,8$  м,  $y_1 = 1,1$  м,  $T = 6$  с.

Параметри числової схеми алгоритму набували значень, аналогічних до наведених у статті [2]. Загальна кількість параметрів оптимізації становила 32. Для всіх шарнірних пар множини  $P$  штрафні коефіцієнти у зведеній цільовій функції (8) задавали рівними  $10^4$ , точність за параметрами оптимізації та значенням цільової функції становили відповідно  $10^{-6}$  та  $10^{-2}$ . Для мінімізації цільової функції (8) використовували чисельний метод циклічного покоординатного спуску [19]. Як початкове (стартове) значення вектора параметрів оптимізації задавали  $\lambda_{ij}^0 = 0$ . Обчислення проводили в середовищі MATLAB (R2012b) на комп'ютері з процесором Phenom II X4 BE 965 (3,4 ГГц) та оперативною пам'яттю 3,25 ГБ [21].

У результаті розв'язання досліджуваної задачі отримали мінімальне значення функціонала (6)  $E^* = 4,98$ , яке було досягнуто для пари активно керованих шарнірів  $P_{2,4} = (O_2, A_1)$  із відповідними оптимальними керуваннями  $u_2^*$ ,  $u_4^*$ . Під час оптимізації значення цього функціонала (порівняно з його значенням  $E_{ij}^0$  для  $\lambda_{ij}^0 = 0$ ) було зменшене приблизно на 25 %. На рис. 2, 3 наведені графічні залежності (від часу  $t$ ) оптимальних керувань  $u_2^*$ ,  $u_4^*$  та відповідних кутових характеристик ланок маніпулятора ( $t$  виражено в секундах, кути — в радіанах, керування — в Н·м).

У табл. 1 для всіх можливих пар активно керованих шарнірів маніпулятора та декількох значень параметра  $L$  подано мінімальні значення квадратичного функціонала (6)  $E_{ij}^* = \min_{u_i, u_j} E_{ij}$ . Параметр  $v$  (розраховуємо для кожної стрічки із заголовком  $E_{ij}^*$ ) виражає відношення максимального елемента у стрічці до мінімального

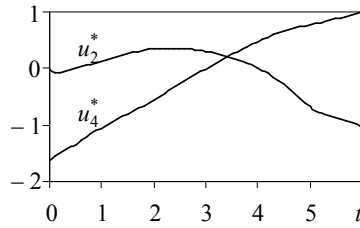


Рис. 2. Оптимальний режим керування для  $P_{2,4} = (O_2, A_1)$

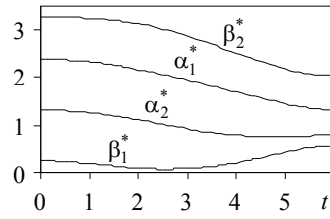


Рис. 3. Оптимальні кутові характеристики маніпулятора

Таблиця 1

Значення цільового функціонала

$L$		$P_{1,2}$	$P_{1,3}$	$P_{1,4}$	$P_{2,3}$	$P_{2,4}$	$v$
0,2	$E_{ij}^*$	6,34	4,91	<b>4,67</b>	7,67	4,94	1,64
	$E_{ij}^0$	18,91	7,19	7,81	11,21	6,94	
0,3	$E_{ij}^*$	7,03	5,19	<b>4,88</b>	8,52	4,91	1,74
	$E_{ij}^0$	30,19	7,46	8,39	12,32	6,68	
0,4	$E_{ij}^*$	7,92	5,43	5,12	9,76	<b>4,98</b>	1,96
	$E_{ij}^0$	51,99	7,70	8,94	13,48	6,65	
0,5	$E_{ij}^*$	9,14	5,70	5,42	10,67	<b>5,13</b>	2,08
	$E_{ij}^0$	83,98	7,92	9,43	14,67	6,74	
0,6	$E_{ij}^*$	11,27	5,34	6,09	11,86	<b>5,34</b>	2,22
	$E_{ij}^0$	103,6	6,85	9,87	15,92	6,86	

у цій же стрічці та дає можливість оцінити «виграш» від вибору оптимальної пари активно керованих шарнірів. Мінімальний елемент у стрічці (наведено жирним шрифтом) є розв'язком сформульованої вище задачі для відповідного значення параметра  $L$ . У стрічках із заголовком  $E_{ij}^0$  записано значення функціонала (6) для  $\lambda_{ij}^0 = 0$ . Аналіз даних табл. 1 свідчить, що мінімальне значення функціонала (6)  $E_{ij}^*$  істотно залежить від пари активно керованих шарнірів. Так, наприклад, для параметра  $L = 0,4$  вибір пари шарнірів  $P_{2,4} = (O_2, A_1)$  понижує значення  $E_{ij}^*$  в 1,96 раза порівняно з парою  $P_{2,3} = (O_2, A_2)$ .



**Висновки.** У рамках побудованої математичної моделі чотириланкового маніпулятора замкнутої кінематичної структури запропоновано формулювання задачі оптимального керування маніпулятором з одночасним вибором пари активно керованих шарнірів. Розроблено алгоритм розв'язання сформульованої задачі, який ґрунтується на параметризації узагальнених координат маніпулятора набором заданих функцій і використанні процедур обернених задач динаміки та зовнішніх штрафних функцій, що дозволяє звести вихідну задачу до задачі нелінійного математичного програмування. Алгоритм реалізовано у вигляді відповідного програмного модуля (у середовищі MATLAB), за допомогою якого проведено серію числових експериментів. Аналіз отриманих даних свідчить, що вибір пари активно керованих шарнірів суттєво впливає на енергетичні характеристики маніпулятора.

### Література

- [1] Демидюк М. В. Параметрична оптимізація чотириланкового замкнутого маніпулятора з активними й пасивними приводами // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2009. — Т. 52, № 1. — С. 193-202.
- [2] Демидюк М. В. Оптимізація параметрів та режимів керування чотириланкового замкнутого маніпулятора // *Прикл. проблеми мех. і мат.* — 2013. — Вип. 11. — С. 51-62.
- [3] Chesse S., Bessonnet G. Optimal dynamics of constrained multibody systems. Application to bipedal walking synthesis // *Proc. of 2001 IEEE Int. conf. on Robotics & Automation.* — 2001. — P. 2499-2505.
- [4] Lidberg M., Berbyuk V. Optimization of Controlled Motion of Closed-Loop Chain Manipulator Robots with Different Degree and Type of Actuation // *J. Stability and Control: Theory and Application (SACTA).* — 2002. — Vol. 4, No 2. — P. 56-73.
- [5] Zhang Y., Gruver W., Gao F. Dynamic simplification of three degree of freedom manipulators with closed chains. // *Robotics and Autonomous Systems.* — 1999. — Vol. 28. — P. 261-269.
- [6] Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н. Синтез оптимального управління транспортними движениями манипуляционных роботов // *Изв. АН СССР. МТТ.* — 1986. — № 4. — С. 21-29.
- [7] Бербюк В. Є., Демидюк М. В., Литвин Б. А. Параметрична оптимізація ходи та пружних характеристик пасивних приводів двоногого крокуючого робота // *Вісн. Київського ун-ту. Кібернетика.* — 2002. — № 3. — С. 7-9.
- [8] Демидюк М. В., Литвин Б. А., Голуб Б. М. Параметрична оптимізація ходи двоногого робота // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2005. — Т. 48, № 3. — С. 162-171.
- [9] Демидюк М. В., Ширко М. І. Оптимізація режимів руху та параметрів дволанкового маніпулятора з активними і пасивними приводами // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2007. — Т. 50, № 2. — С. 41-48.
- [10] Демидюк М. В., Ширко М. І. Оптимізація законів руху та конструктивних параметрів маніпуляційного модуля // *Відбір та обробка інформації* — 2007. — Вип. 26 (102). — С. 44-49.
- [11] Ларин В. Б. Задачи управления манипулятором // *Проблемы управления и информатики.* — 1996. — № 4. — С. 5-18.
- [12] Бербюк В. Е. Динамика и оптимизация робототехнических систем. — Киев: Наук. думка, 1989. — 188 с.
- [13] Кириченко М. Ф., Крак Ю. В., Сорока Р. О. Оптимізація маніпуляційних робіт. — Київ: Либідь, 1990. — 144 с.
- [14] Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. — Москва: Наука, 1989. — 386 с.
- [15] Лурье А. И. Аналитическая механика. — Москва: Физматгиз, 1961. — 824 с.
- [16] Красовский Н. Н. Теория управления движением. — Москва: Наука, 1968. — 476 с.

**Мирослав Демидюк**

**Оптимізація транспортних операцій чотириланкового замкнутого маніпулятора**

- [17] *Nagurka M., Yen V.* Fourier-based optimal control of nonlinear dynamic systems // Trans. ASME. Journal Dynamic Systems, Meas. and Contr. — 1990. — Vol. 112, No 3. — P. 19-26.
- [18] *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование: Теория и алгоритмы. — Москва: Мир, 1982. — 583 с.
- [19] *Бартіш М. Я.* Методи оптимізації. Теорія і алгоритми. — Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2006. — 223 с.
- [20] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — Москва: Наука, 1970. — 720 с.
- [21] *Ануфриев И. Е., Смирнов А. Б., Смирнова Е. Н.* MATLAB 7. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 1104 с.
- [22] *Berbyuk V. E.* Inverse dynamics and Fourier-based approach to solve optimal control problems for multy-link mechanisms // In Proc. of the NATO Advanced Study Institute on Computational Methods in Mechanisms, *J. Angeles* and *E. Zakhariiev* (eds.), Varna, Bulgaria, June 16-28, 1997. — Vol. 2. — P. 431-440.

## **Four-link closed chain manipulator transport operation optimization of the four link closed chain manipulator**

Myroslav Demydyuk

*The controlled motion of the four-link closed chain manipulator is researched. Under control stimuli (torques in the joints), the manipulator moves payload from a given initial to a given final state. It is sufficient for manipulator movement control to apply control stimuli in two joints (from total four). The problem for determining such pair of joints and corresponding control stimuli that satisfy implementation of the transport operation for minimum value of the quadratic (by the control) functional are formulated. The algorithm for solving of the formulated problem is based on the parameterization of the generalized coordinates of the manipulator by set of given functions, using of the inverse dynamic approach and numerical procedures of the nonlinear mathematical programming.*

## **Оптимизация транспортных операций четырехзвенного замкнутого манипулятора**

Мирослав Демидюк

*Исследуем управляемое движение четырехзвенного манипулятора замкнутой кинематической структуры. Манипулятор под действием управлений (моментов сил в шарнирах) переносит груз из заданного начального в известное конечное положение. Для управления движением манипулятора достаточно приложить управляющие усилия в двух шарнирах (из доступных четверых). Формулируем задачу определения такой пары шарниров и соответствующих им управлений, которые обеспечивают выполнение транспортной операции с минимальным значением квадратичного (по управлениям) функционала. Алгоритм решения задачи базируется на параметризации обобщенных координат манипулятора набором заданных функций, применении методики обратной задач динамики и численных процедур нелинейного математического программирования.*

Представлено доктором фізико-математичних наук Р. Мартиняком

Отримано 11.10.14