

Осесиметричні напруження у кусково-однорідному пружно-пластичному кільці

Тетяна Соляр

К. ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, e-mail: tanya@iapmm.lviv.ua

Розроблено підхід до розрахунку осесиметричного пружно-пластичного стану кусково-однорідних кілець, який зводиться до розв'язування трансцендентних рівнянь стосовно меж розділу областей пружного та пружно-пластичного деформування. Розглянуто випадки, якщо область пластичності зароджується у внутрішніх або середніх кільцях. Наведений підхід застосовний для довільної кількості складових у кільці.

Ключові слова: кусково-однорідне кільце, осесиметричні напруження, область пластичності, пружно-пластичне деформування.

Вступ. Композитні матеріали широко використовуються у машинобудуванні та будівництві. Під час розрахунків на міцність конструкцій, що виготовлені з таких матеріалів, необхідно досліджувати напруження у кусково-однорідних тілах. У літературі найбільш детально вивчені питання розрахунку напружень на основі пружних постановок задач. Огляд робіт, що стосуються дослідження пружних напружень у кусково-однорідних елементах конструкцій за силових навантажень і нерівномірних нагрівів наведено в працях [1, 2]. У роботі [3] запропоновано загальний підхід до дослідження термопружних напружень у кільцях, що складаються з довільної кількості однорідних кілець.

Задачі, в яких враховується пластичне деформування належать до нелінійних, а тому для їх розв'язування, зазвичай, використовують числові методи [4]. У роботі запропоновано аналітичний підхід до розв'язування осесиметричної задачі теорії пластичності для кусково-однорідного кільця з довільною кількістю кілець. Підхід базується на методах розв'язування задачі пластичності для однорідних кілець [5, 6] і роботі [3].

1. Постановка задачі

Розглянемо кусково-однорідне кільце $a < r < b$, що складається з довільної кількості однорідних кілець $r_{j-1} < r < r_j$, $j = \overline{1, N}$ причому $r_0 = a$, $r_N = b$. Приймемо що кільце перебуває під дією нормально прикладених до меж зусиль: p_a при $r = a$ та p_b при $r = b$. Розглянемо випадок, якщо на стику між кільцями відбувається ідеальний механічний контакт, за пластичного деформування напруження задовольняють умові Мізеса. Модулі Юнга, коефіцієнти Пуассона, межі текучості j -ого шару позначимо через E_j , ν_j , $\sigma_{T,j}$ відповідно.

2. Загальний розв'язок задачі пластичності

Прийmemo, що в пластичній області напруження задовольняють умову Мізеса вигляду

$$\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta} = \sigma_T(r).$$

Нехай пластичність виникає в k -ому кільці. Використаємо підхід, наведений у роботах [5, 6]. З умови текучості отримуємо співвідношення для визначення напружень вигляду [5]

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \cos \varphi, \quad \sigma_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right), \quad (1)$$

де φ — параметр, σ_T — межа текучості для даного кільця.

Підставляючи співвідношення (1) у рівняння рівноваги, отримуємо диференціальне рівняння для визначення параметра φ . Проінтегрувавши це рівняння, маємо співвідношення [5]

$$r = Af(\varphi). \quad (2)$$

Тут A — довільна стала,

$$f(\varphi) = \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\varphi\right) / \sqrt{\left|\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)\right|}.$$

Для визначення переміщень використаємо залежності [5]

$$\varepsilon_r - \varepsilon_0 = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} (\sigma_r - \sigma_0), \quad \varepsilon_\theta - \varepsilon_0 = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} (\sigma_\theta - \sigma_0),$$

де ε_i , σ_i — інтенсивності деформацій і напружень [5]; ε_0 , σ_0 — середні деформації та напруження; ε_r , ε_θ — деформації.

Звідси маємо

$$\frac{\varepsilon_r - \varepsilon_0}{\varepsilon_\theta - \varepsilon_0} = \frac{2\sigma_r - \sigma_\theta}{2\sigma_\theta - \sigma_r}.$$

Враховуючи, що $\varepsilon_r = du/dr$, $\varepsilon_\theta = u/r$, $\varepsilon_0 = \frac{1-2\nu}{3E}(\sigma_r + \sigma_\theta)$, отримуємо

$$\frac{du}{dr} - \frac{2\sigma_r - \sigma_\theta}{2\sigma_\theta - \sigma_r} \frac{u}{r} = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_r + \sigma_\theta) \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2\sigma_\theta - \sigma_r}.$$

Підставляючи в отримане співвідношення формули (1) та враховуючи, що

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2\sigma_T \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right), \quad \sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$2\sigma_r - \sigma_\theta = 2\sigma_T \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right), \quad 2\sigma_\theta - \sigma_r = 2\sigma_T \sin\varphi,$$

отримуємо рівняння вигляду

$$\frac{du}{dr} - \frac{\cos(\varphi + \pi/6)}{\sin\varphi} \frac{u}{r} = 2\lambda \frac{\sin(\varphi - \pi/6)\cos(\varphi - \pi/6)}{\sin\varphi},$$

де $\lambda = \frac{1 - 2\nu}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_T}{E}$.

Домноживши отримане рівняння на $dr/d\varphi$, маємо

$$\frac{du}{d\varphi} + \frac{\cos(\varphi + \pi/6)}{\sin(\varphi - \pi/6)} u = -2\lambda r \cos(\varphi - \pi/6).$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо методом варіації сталої. Загальний розв'язок відповідного до даного однорідного рівняння

$$\frac{du_0}{d\varphi} + \frac{\cos(\varphi + \pi/6)}{\sin(\varphi - \pi/6)} u_0 = 0$$

запишемо у вигляді

$$u_0 = Cg(\varphi).$$

Тут $g(\varphi) = \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\varphi\right) / \sqrt{\left|\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)\right|}$.

Підставляючи його в рівняння для визначення функції u та вважаючи, що $C = C(\varphi)$, отримуємо рівняння

$$C' = -2\lambda r \cos(\varphi - \pi/6) / g(\varphi) = -2A\lambda \cos(\varphi - \pi/6) \exp(-\sqrt{3}\varphi).$$

Звідси знаходимо

$$u = Bg(\varphi) + A\lambda \cos\varphi \exp(-\sqrt{3}\varphi) g(\varphi) = Bg(\varphi) + \lambda r \cos\varphi, \quad (3)$$

де B — довільна стала.

Співвідношення (3) для нестисливого матеріалу (при $\lambda = 0$) збігається із наведеним у праці [5].

Зазвичай, найбільші напруження виникають біля внутрішньої межі кільця. Тому приймемо спочатку, що пластичне деформування починається при $r = a$. Зі співвідношень (1) знаходимо значення параметра φ , якому відповідає ліва межа кільця [5]

$$\varphi_a = \operatorname{arccos} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{p_a}{\sigma_T}, \quad (4)$$

а із залежності (2) визначаємо сталу A за формулою $A = a/f(\varphi_a)$.

Функція $\operatorname{arccos} x$ є багатозначна, причому кут φ_a вибирається в перших двох чвертях або третій-четвертій. Однозначний вибір параметра φ_a проводиться на основі врахування історії навантаження [5].

У результаті отримуємо взаємозв'язок між параметром φ та радіальною координатою

$$r = a \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(\varphi_a - \varphi)\right) \sqrt{\left|\sin\left(\varphi_a - \frac{\pi}{6}\right)\right| / \left|\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)\right|}. \quad (5)$$

Отриманий вище розв'язок справедливий, якщо $\varphi \neq \pi/6$. Дослідимо особливий розв'язок, що відповідає значенню параметра $\varphi = \pi/6$. Покладемо, що параметру $\varphi = \pi/6$ відповідає деяка точка $r = c$. У цій точці, яка належить області пластичності, на основі формул (2) напруження будуть

$$\sigma_r(c) = \sigma_\theta(c) = \sigma_T.$$

Використовуючи рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = -\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r},$$

знаходимо значення похідної $\sigma_r'(c) = 0$.

Продиференціювавши умову пластичності, яка виконується в околі точки $r = c$, маємо

$$\sigma_r'(2\sigma_r - \sigma_\theta) + \sigma_\theta'(2\sigma_\theta - \sigma_r) = 0.$$

Звідси отримуємо $\sigma_\theta'(c) = \sigma_r''(c) = 0$.

Продиференціювавши рівняння рівноваги знаходимо другу похідну в цій точці

$$\sigma_r''(c) = \frac{\sigma_\theta'(c)}{c} = 0.$$

Повторно диференціюючи умову пластичності та рівняння рівноваги аналогічно отримуємо $\sigma_r^{(k)}(c) = \sigma_\theta^{(k)}(c) = 0$, $1 \leq k < \infty$. Таким чином, в усій області пластичності, яка містить точку c , маємо $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_T$. Приймемо, що ця область пластичності розміщена при $\alpha \leq r \leq \beta$, де α, β — точки, що належать кільцю. При $r < \alpha$ маємо пружний стан. Тоді тут виконуються співвідношення [5]

$$\sigma_r = A_0 + B_0/r^2, \quad \sigma_\theta = A_0 - B_0/r^2,$$

де A_0, B_0 — довільні сталі.

Враховуючи, що напруження є неперервними при переході з пружної області в пластичну, отримуємо $B_0 = 0$, $A_0 = \sigma_T$. Таких же значень набувають сталі й в області $r > \beta$. Отже встановлюємо, що в довільному однорідному кільці, у якому хоча би в одній точці $\varphi = \pi/6$, то в ньому виникає однорідний стан $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_T$. Такий стан в однорідному кільці може виникнути тільки у випадку, якщо прикладене навантаження буде $p_a = p_b = \sigma_T$. Таким чином доведено, що для всіх навантажень, які відмінні від всестороннього розтягу або стиску, параметр φ не може дорівнювати $\pi/6$.

3. Знаходження напружень у пружній області

Для знаходження напружень у пружній області при $c < r < b$ розглянемо довільне кусково-однорідне кільце $d_0 < r < d_M$, яке включає однорідні кільця $d_{j-1} < r < d_j$, з пружними сталими $E_j, \nu_j, j = \overline{1, M}$, до меж якого прикладені зусилля $\sigma_r(d_0) = p_0, \sigma_r(d_M) = p_M$. Напруження та переміщення у j -ому кільці ($d_{j-1} < r < d_j$) запишемо у вигляді [1]

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_{j-1} s_{11}(r) + u_{j-1} s_{12}(r), \\ \sigma_\theta &= \sigma_{j-1} s_{31}(r) + u_{j-1} s_{32}(r), \\ u &= \sigma_{j-1} s_{21}(r) + u_{j-1} s_{22}(r), \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} s_{11}(r) &= \frac{1}{2} \left[(1 + \nu_j) + (1 - \nu_j) \frac{d_{j-1}^2}{r^2} \right], \quad s_{12}(r) = \frac{E_j}{2} \left(\frac{1}{d_{j-1}} - \frac{d_{j-1}}{r^2} \right), \\ s_{21}(r) &= \frac{1 - \nu_j^2}{2E_j} \left(r - \frac{d_{j-1}^2}{r} \right), \quad s_{22}(r) = \frac{1}{2} \left[(1 - \nu_j) \frac{r}{d_{j-1}} + (1 + \nu_j) \frac{d_{j-1}}{r} \right], \\ s_{31}(r) &= \frac{1}{2} \left[(1 + \nu_j) - (1 - \nu_j) \frac{d_{j-1}^2}{r^2} \right], \quad s_{32}(r) = \frac{E_j}{2} \left(\frac{1}{d_{j-1}} + \frac{d_{j-1}}{r^2} \right), \end{aligned}$$

σ_{j-1}, u_{j-1} — радіальні напруження та переміщення на внутрішній межі кільця, причому $\sigma_0 = p_0, \sigma_M = p_M$.

Використовуючи умови ідеального механічного контакту, отримуємо [3]

$$\begin{pmatrix} \sigma_j \\ u_j \end{pmatrix} = C_j \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ u_0 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (7)$$

де

$$C_j = S_j \cdot S_{j-1} \cdot \dots \cdot S_1, \quad S_j = \begin{pmatrix} s_{11}(r_j), & s_{12}(r_j) \\ s_{21}(r_j), & s_{22}(r_j) \end{pmatrix}.$$

Невідому u_0 визначимо, поклавши у співвідношенні (7) $j = M$. Звідси отримаємо

$$\begin{pmatrix} \sigma_0 \\ u_0 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_M \end{pmatrix}.$$

Тут

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{V_{11}}{V_{12}} & \frac{1}{V_{12}} \end{pmatrix}, \quad V_{ij} \text{ — } ij\text{-ий елемент матриці } C_M.$$

Напруження при $d_{j-1} < r < d_j$ набудуть вигляду

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{31} & s_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{j-1} \\ u_{j-1} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_M \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} p_0 \\ p_M \end{pmatrix},$$

де

$$Q = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{31} & s_{32} \end{pmatrix} C_{j-1} D.$$

Зобразимо дану матрицю у вигляді

$$Q = \begin{pmatrix} R_1 & T_1 \\ R_2 & T_2 \end{pmatrix}.$$

Тут $R_1 = R_1(r, d_0, d_M)$, $R_2 = R_2(r, d_0, d_M)$, $T_1 = T_1(r, d_0, d_M)$, $T_2 = T_2(r, d_0, d_M)$ — елементи матриці Q .

Тоді пружні напруження при $d_{j-1} < r < d_j$ можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_r &= p_0 R_1(r, d_0, d_M) + p_M R_2(r, d_0, d_M), \\ \sigma_\theta &= p_0 T_1(r, d_0, d_M) + p_M T_2(r, d_0, d_M). \end{aligned} \quad (8)$$

Переміщення в кільці при $d_{j-1} < r < d_j$ будуть

$$E(r)u = p_0 U_1(r, d_0, d_M) + p_M U_2(r, d_0, d_M), \quad (9)$$

де $U_j = r[T_j - \nu_j R_j]$, $E(r) = E_j$.

Аналогічно можна розглянути випадки інших граничних умов. Зокрема, нехай межа $r = d_0$ закріплена, а друга межа — вільна від навантажень. Тоді з формули (7) визначається величина σ_0 , причому $u_0 = 0$, $\sigma_N = p_M$.

4. Розв'язування задачі пружно-пластичності

Для знаходження напружень у пружній області розглянемо фрагмент вихідного кільця $c < r < b$, яке навантажене $\sigma_r(c) = p_c$, $\sigma_r(b) = p_b$, де

$$p_c = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \cos \varphi_c,$$

φ_c — невідомий параметр φ , якому відповідає межа розділу між пружною та пластичною областями $r = c$ і який на основі формули (5) визначається з рівняння вигляду

$$c = a \exp \left[\frac{\sqrt{3}}{2} (\varphi_a - \varphi_c) \right] \sqrt{\left| \sin \left(\varphi_a - \frac{\pi}{6} \right) \right| \left| \sin \left(\varphi_c - \frac{\pi}{6} \right) \right|}.$$

Прирівнявши радіальні та кільцеві напруження на межі розділу областей пружного і пластичного деформування, для знаходження φ_c отримуємо рівняння

$$\cos \left(\varphi_c - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \varphi_c T_1(c, c, b) + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{p_b}{\sigma_T} T_2(c, c, b), \quad (10)$$

де величина c визначається за формулою (10), функції T_1 , T_2 із формули (8) будуються стосовно до фрагменту $c < r < b$ заданого кусково-однорідного кільця.

Зокрема, розглянемо випадок однорідного кільця $c < r < b$ за умов $\sigma_r(c) = p_c$, $\sigma_r(b) = p_b$. На основі роботи [5] для напружень маємо співвідношення

$$\sigma_r = \frac{p_c}{1 - \varepsilon^2} \left(\frac{c^2}{r^2} - \varepsilon^2 \right) + \frac{p_b}{1 - \varepsilon^2} \left(-\frac{c^2}{r^2} + 1 \right), \quad \sigma_\theta = \frac{p_c}{1 - \varepsilon^2} \left(-\frac{c^2}{r^2} - \varepsilon^2 \right) + \frac{p_b}{1 - \varepsilon^2} \left(\frac{c^2}{r^2} + 1 \right).$$

Тут $\varepsilon = c/b$.

Тобто, в цьому випадку маємо

$$T_1(r, c, b) = -\frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left(\varepsilon^2 + \frac{c^2}{r^2} \right), \quad T_2(r, c, b) = \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left(1 + \frac{c^2}{r^2} \right).$$

Тоді рівняння (10) для визначення φ_c набуде вигляду

$$\cos(\varphi_c - \pi/6) - \alpha \exp \left[-\sqrt{3}(\varphi_c - \pi/6) \right] = \frac{p_b}{\sigma_T}, \quad (11)$$

$$\text{де } \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \exp \left[\sqrt{3} \left(\varphi_a - \frac{\pi}{6} \right) \right] \sin \left(\varphi_a - \frac{\pi}{6} \right).$$

Рівняння (11) при $p_b = 0$ збігається з відомим у літературі [5].

Знайдемо значення зусиль $p_b = p_b^1$, за якого пластичність охоплює перше однорідне кільце $a < r < r_1$ (p_a — зафіксоване). Визначимо значення параметра φ_1 , за якого пластичність досягатиме точки $r = r_1$, з рівняння:

$$r_1 = a \exp \left[\frac{\sqrt{3}}{2} (\varphi_a - \varphi_1) \right] \sqrt{\left| \frac{\sin \left(\varphi_a - \frac{\pi}{6} \right)}{\sin \left(\varphi_1 - \frac{\pi}{6} \right)} \right|}.$$

Далі на основі співвідношення (2) знаходимо напруження

$$\sigma_r(r_1) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \cos \varphi_1 = p_1, \quad \sigma_\theta(r_1) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \cos(\varphi_1 - \pi/3) = t_1.$$

Розглянемо пружне кусково-однорідне кільце $r_1^- < r < b$, до меж якого прикладено зусилля $\sigma_r(r_1^-) = p_1$, $\sigma_r(b) = p_b^1$, де $r_j^\pm = r_j \pm 0$. Прирівнявши радіальні та колові напруження для цього кільця до напружень p_1 , t_1 , знаходимо величину p_b^1 із рівняння

$$t_1 = p_1 T_1(r_1^-, r_1^-, b) + p_b^1 T_b(r_1^-, r_1^-, b).$$

За значень $p_b > p_b^1$ пластичність може виникати у наступних кільцях кусково-однорідного кільця. Така задача в припущенні про відсутність розвантаження у першому кільці зводиться до розгляду фрагмента кільця $r_1 < r < b$, навантаженого зусиллями $\sigma_r(r_1) = p_1$, $\sigma_r(b) = p_b$. Розв'язування цієї задачі виконується за наведеним вище алгоритмом. Аналогічно знаходимо розв'язок задачі і для випадку, якщо пластичність охоплює послідовно наступні кільця.

Розглянемо випадок, якщо пластичне деформування починається у деякому внутрішньому кільці при $r_k < r < r_{k+1}$. Позначимо значення параметра φ , якому відповідає $r = r_k^+$, через φ_k . Тоді напруження у цій точці будуть

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \cos \varphi_k, \quad \sigma_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \cos \left(\varphi_k - \frac{\pi}{3} \right), \quad \text{де } \sigma_T = \sigma_T(r_k^+).$$

Приймемо, що область пластичності у цьому кільці займає область $r_k < r < c$ та відповідне до $r = c$ значення параметра φ позначимо через φ_c . Для визначення невідомих $p_k = \sigma_r(r_k)$, $p_c = \sigma_r(c)$, φ_k , φ_c , c , A , B використаємо наведені

вище співвідношення й умови неперервності радіальних напружень і переміщень. Запишемо ці умови у вигляді

$$r_k = Af(\varphi_k), \quad c = Af(\varphi_c),$$

$$\frac{p_a U_1(r_k, a, r_k) + p_k U_2(r_k, a, r_k)}{E(r_k^+)} = Bg(\varphi_k) + \lambda r_k \cos \varphi_k,$$

$$\frac{p_c U_1(c, c, b) + p_b U_2(c, c, b)}{E(r_k^+)} = Bg(\varphi_c) + \lambda c \cos \varphi_c,$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \cos(\varphi_c - \pi/3) = p_c T_1(c, c, b) + p_b T_2(c, c, b),$$

$$p_k = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \cos \varphi_k, \quad p_c = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \cos \varphi_c.$$

Після перетворень отримуємо систему двох рівнянь щодо φ_k, φ_c

$$\begin{cases} \frac{[2U_2(r_k, a, r_k) - (1 - 2\nu)r_k] \cos \varphi_k + q_a U_1(r_k, a, r_k)}{[U_1(c, c, b) - (1 - 2\nu)c] \cos \varphi_c + q_b U_2(c, c, b)} = \frac{g(\varphi_k)}{g(\varphi_c)}, \\ T_1(c, c, b) \cos \varphi_c + \frac{q_b}{2} T_2(c, c, b) = \cos\left(\varphi_c - \frac{\pi}{3}\right), \end{cases}$$

де $c = r_k \frac{f(\varphi_c)}{f(\varphi_k)}, \quad q_{a,b} = \sqrt{3} \frac{P_{a,b}}{\sigma_T}.$

5. Приклади розрахунку напружень

Розглянемо тришарове кільце $1 < r/a < 3$. Прийmemo, що однорідні кільця займають області $1 < \rho < 1,5$; $1,5 < \rho < 2,5$; $2,5 < \rho < 3$, де $\rho = r/a$. Модулі пружності кілець і межі текучості, які віднесені відповідно до модуля пружності та межі текучості першого кільця позначимо через $E'_{2,3}$ ($E'_1 = 1$) і $\sigma'_{2,3}$ ($\sigma'_1 = 1$), коефіцієнти Пуассона для всіх кілець приймали рівними 0,3. Покладали, що механічні характеристики першого та третього кільця однакові. Зусилля p_a, p_b , віднесені до межі текучості першого кільця, позначимо через P_a, P_b . Розраховані напруження, віднесені до межі текучості першого кільця за м'якшого другого кільця $E'_2 = 0,5$; $\sigma'_2 = \sigma'_3 = 1$; $P_a = 0$; $P_b = 0,5$ наведено на рис. 1. Тут кривим 1 і 2 відповідають радіальні та кільцеві напруження, що знайдені у пружно-пластичній постановці задачі; кривим 1' і 2' — напруження, що знайдені у пружній постановці; кривим 3 та 4 — залишкові напруження, які виникнуть після розвантаження кільця. Ділянки кривих 1 і 2, які розміщені в пластичній області, зображено суцільними лініями, що дає можливість на графіках встановити розміри області пластичності.

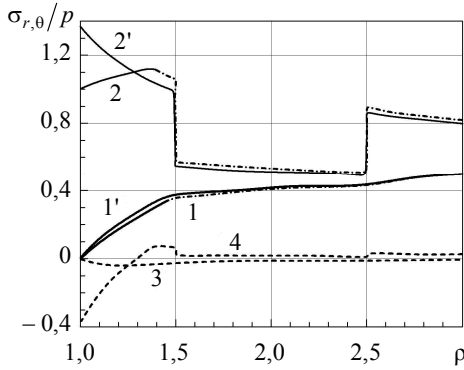


Рис. 1. Розподіл напружень у тришаровому кільці (м'якше середнє кільце) за навантаженої зовнішньої межі

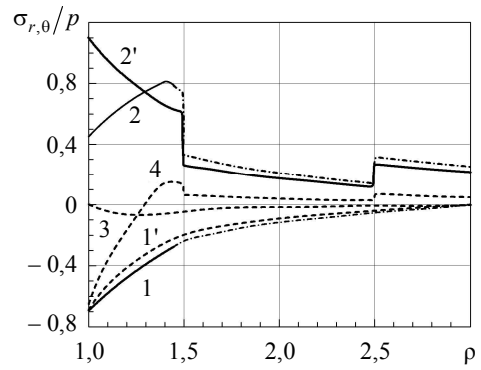


Рис. 2. Розподіл напружень у тришаровому кільці (м'якше середнє кільце) за внутрішнього тиску

На рис. 2 наведено результати розрахунків для цього ж кільця у випадку, якщо до внутрішньої межі прикладено внутрішній тиск при $P_a = -0,7$; $P_b = 0$.

Аналогічні розрахунки виконано для випадку, якщо внутрішнє кільце є жорсткіше — $E'_2 = 2$ та $\sigma'_2 = 2$. На рис. 3 наведено результати розрахунків при $P_a = 0$; $P_b = 0,92$, а на рис. 4 — при $P_a = -1,05$; $P_b = 0$.

З аналізу результатів розрахунків випливає, що в усіх розглянутих вище випадках пластичність виникала тільки в першому кільці.

Розглянуто випадок за вказаних вище пружних характеристик, якщо межі текучості в середньому кільці зменшені за величиною, у зв'язку з чим тут також протікатиме пластичне деформування. Для м'якшого внутрішнього кільця при $E'_2 = 0,5$ поклали $\sigma'_2 = 0,5$. Розраховані відносні напруження при $P_a = 0$; $P_b = 0,51$ наведені на рис. 5. У цьому разі область пластичності цілком охоплює перше

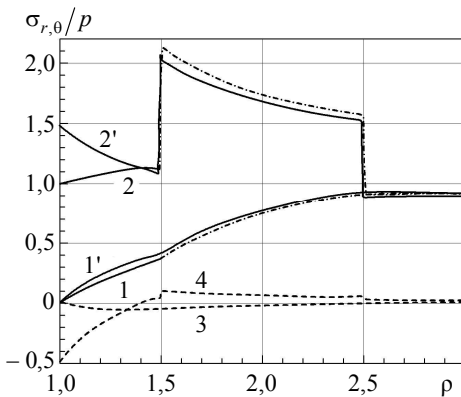


Рис. 3. Розподіл напружень у тришаровому кільці (жорсткіше середнє кільце) за навантаженої зовнішньої межі

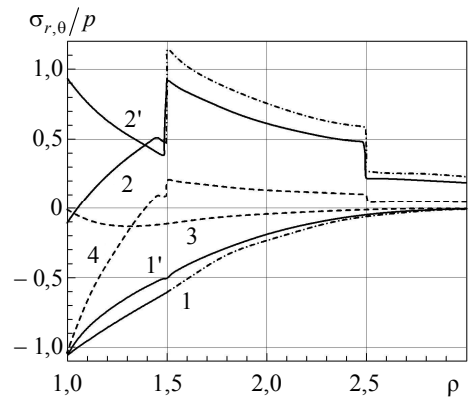


Рис. 4. Розподіл напружень у тришаровому кільці (жорсткіше середнє кільце) за внутрішнього тиску

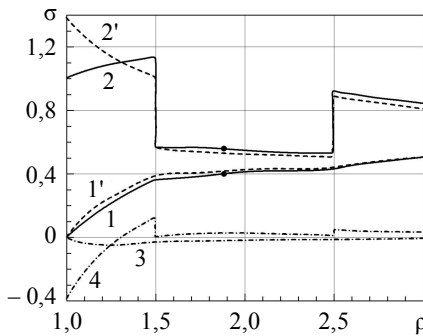


Рис. 5. Розподіл напружень у тришаровому кільці при м'якшому середньому кільці за пластичного деформування у двох шарах

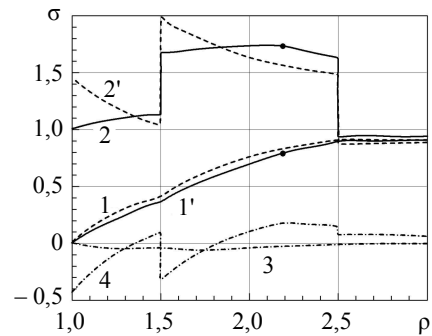


Рис. 6. Розподіл напружень у тришаровому кільці при жорсткішому середньому кільці за пластичного деформування у двох шарах

кільце та прилеглу до нього частину другого кільця. На кривих 1 і 2 крапками наведено зовнішню межу області пластичності (внутрішньою є $\rho = 1$).

На рис. 6 наведено аналогічні результати розрахунків для випадку жорсткішого середнього кільця при $P_a = 0$; $P_b = 0,9$; $\sigma_2 = 1,5$.

Зазначимо, що в усіх випадках навантаження вибирались такими, щоб основна частина внутрішнього кільця перебувала в пластичному стані.

На основі аналізу проведених розрахунків для розглянутих випадків можна зробити такі висновки: знайдені на основі пружної та пружно-пластичної постановок радіальні напруження є близькі за величиною в усій області, а кільцеві — у пружній області; пластичність істотно впливає на розподіл кільцевих напружень у пружно-пластичній області; внутрішнім тиском у кусково-однорідних кільцях можуть бути створені значні за величиною стискувальні напруження у внутрішньому кільці.

Висновки. Розроблено аналітичний підхід до розрахунку осесиметричного пружно-пластичного стану кусково-однорідних ідеально-пластичних кілець, який зводиться до розв'язування трансцендентних рівнянь відносно меж розділу областей пружного і пружно-пластичного деформування. Виконані розрахунки пружно-пластичного стану тришарових кілець для випадків, коли пластичність виникала в одному або в двох кільцях. Виявлено закономірності в розподілі напружень, в тому числі і залишкових.

Література

- [1] Коляно Ю. М. Методи теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. — Киев: Наук. думка, 1992. — 280 с.
- [2] Кушнір Р. М., Процюк Б. В., Синюта В. М. Температурні напруження та переміщення в багатшаровій пластині з нелінійними умовами теплообміну // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2002. — № 6. — С. 31-38.

Тетяна Соляр

Осесимметричні напруження у кусково-однорідному пружно-пластичному кільці

- [3] Соляр Т. Я. Визначення нестационарних температурних полів та напружень у кусково-однорідних кільцевих пластинках на основі числово-аналітичної формули обернення перетворення Лапласа // *Мат. методи і фіз.-мех. поля.* — 2009. — Т. 52, № 3. — С. 201-208.
- [4] *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимации. — Москва: Мир, 1986. — 318 с.
- [5] *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. — Москва: Высшая школа, 1975. — 400 с.
- [6] *Писаренко Г. С., Можаровський М. С.* Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. — Киев: Наук. думка, 1981. — 496 с.

Axially symmetric stresses in piecewise-homogeneous elastic-plastic ring

Tetyana Solyar

An approach to calculation of the axially symmetric elastic-plastic state of piecewise-homogeneous rings is developed. It is reduced to solution of the transcendental equations with respect to the interface of the regions of elastic and elastic-plastic deformation. The cases when the region plasticity originates in the internal or middle rings is considered. The given approach is applied to an arbitrary number of the components in the ring.

Осесимметрические напряжения в кусочно-однородном упруго-пластическом кольце

Татьяна Соляр

Разработан подход к расчету осесимметрического упруго-пластического состояния кусочно-однородных колец, который сводится к решению трансцендентных уравнений относительно границ разделения областей упругого и упруго-пластического деформирования. Рассмотрен случай, когда область пластичности зарождается во внутренних либо средних кольцах. Приведенный подход применим для произвольного количества составляющих в кольце.

Представлено доктором технічних наук Я. П'янилом

Отримано 27.02.15