

## Вимушені електропружні коливання п'єзокерамічних резонаторів простої геометричної форми

Олександр Безверхий<sup>1</sup>, Любов Зінчук<sup>2</sup>, Валерій Карлаш<sup>3</sup>

<sup>1</sup> д. ф.-м. н., професор, Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, вул. Нестерова, 3, Київ, 03057

<sup>2</sup> к. ф.-м. н., с. н. с., Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, вул. Нестерова, 3, Київ, 03057

<sup>3</sup> д. т. н., с. н. с., Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, вул. Нестерова, 3, Київ, 03057,

e-mail: karlashv@ukr.net

*Розглядаються вимушені електропружні коливання п'єзокерамічних резонаторів у формі стрижнів, пластин і дисків із поперечною поляризацією. Показано, що повна провідність п'єзоелектричного зразка на будь-якій частоті є добутком реактивної провідності його міжелектродної ємності на відношення антирезонансного та резонансного визначників. Експериментальні дані отримані й проаналізовані для стрижня  $33,4 \times 5,8 \times 1,25$  мм і диска  $66,4 \times 3,1$  мм із п'єзокераміки ЦТБС-3. Повна провідність, повний імпеданс і фазові зсуви між компонентами адмітансу не залежить від режиму електричного навантаження. Разом з тим в режимі сталої напруги на резонансах миттєва потужність різко зростає, а в режимі сталої струму знижується.*

**Ключові слова:** п'єзокераміка, вимушені електропружні коливання, повна провідність, миттєва потужність, задані напруга, струм і миттєва потужність.

**Вступ.** При коливаннях п'єзоелектричних тіл відбувається перетворення енергії із механічної форми в електричну (прямий п'єзоэффект) або з електричної форми в механічну (зворотний п'єзоэффект) [1-4]. Всі електропружні параметри (зміщення, напруження, провідність, імпеданс, коливна швидкість, миттєва потужність тощо) мають як активні, так і реактивні компоненти. Розрахувати будь-яку амплітуду чи амплітудно-частотну характеристику (АЧХ) можливо лише тоді, коли беруться до уваги втрати енергії [3-7].

Аналіз робіт із визначення дійсних і уявних складових електропружних модулів п'єзокерамічних елементів конструкцій проведено у монографії [1], там же наведені наближені формули, що зв'язують компоненти втрат енергії з максимумами та мінімумами повної провідності (імпедансу) декількох спеціально виготовлених зразків у вигляді стрижнів і дисків. Дійсні складові визначалися на основі розв'язків простих одномірних задач електропружності.

Упродовж останніх кількох років нами опрацьовані та реалізовані нові підходи, які дають можливість вимірювати повну провідність і її активну та реактивну складові (або імпеданс) на будь-якій вибраній частоті електричного навантаження. Отримані результати опубліковані в роботах [4-9], зокрема, на прикладі відомої задачі про радіальні коливання тонкої круглої п'єзокерамічної пластини з суцільними електродами досліджені амплітудно-частотні та фазово-

частотні залежності поблизу від резонансних і антирезонансних частот кількох перших мод [4], фазові зсуви між активними та реактивними компонентами пружних зміщень, головних напружень, повної провідності [5], побудовані графіки зміни повної провідності та миттєвої потужності в околі резонанс/антирезонанс як за сталої вхідної напруги, так і за сталого вхідного струму [6].

Статті [7, 8] стосуються аналізу сучасних досягнень у проблемі втрат енергії в п'єзокерамічних резонаторах. Паралельно презентовано нову просту методику експериментального визначення коефіцієнтів втрат енергії та зв'язку і подано думку автора, чому механічна добротність на резонансі та антирезонансі є різна. Причина полягає у «затиснутій» ємності й у величині коефіцієнта електро-механічного зв'язку. Чим кращий електромеханічний зв'язок, тим дужче «затиснута» ємність і тим вищий її вплив на антирезонансну частоту та добротність.

У праці [9] розглянуті коливання резонаторів у формі стрижнів і пластин із поперечною поляризацією та тонких кілець із радіальною поляризацією. Експериментальні дані отримані та проаналізовані для пластини  $40 \times 16 \times 1$  мм із п'єзокераміки ЦТС-19, яка є багаторезонансною і не має простих формул для розрахунку. Показано, що повна провідність пластини не залежить від режиму електричного навантаження. У режимі сталої напруги на резонансах миттєва потужність різко зростає, а в режимі сталого струму знижується. На антирезонансах все відбувається навпаки — миттєва потужність зростає в режимі сталого струму та знижується в режимі сталої напруги.

У працях К. Учіно зі співавторами [10-12] запропоновано цікаву методологію для визначення компонентів втрат енергії за допомогою виведених ними простих наближених формул, які пов'язують відповідні тангенси з добротностями на резонансі та антирезонансі, визначеними на рівні — 3 дБ по АЧХ повної провідності кількох спеціально виготовлених зразків також у вигляді стрижнів і дисків.

У цій статті розглядаються відомі розв'язки задач про вимушені коливання резонаторів у формі стрижнів і круглих пластин із поперечною поляризацією та виводяться формули для потужності в режимах заданого спаду напруги і заданого струму. Експериментальні дані отримані та проаналізовані для стрижня  $33,4 \times 5,8 \times 1,25$  мм і диска  $66,4 \times 3,1$  мм із п'єзокераміки ЦТБС-3. Вони добре узгоджуються з результатами розрахунку.

## 1. Аналітичні співвідношення для зміщень, напружень, адмітансу та потужності в п'єзокерамічних стрижнях і круглих пластинах

Поперечно поляризовані п'єзокерамічні стрижні давно вже стали «пробним каменем» у багатьох експериментальних дослідженнях насамперед тому, що їхні коливання описуються простими математичними формулами, а перший обертон лежить далеко по частоті від основного резонансу [1-4, 10-12]. Якщо сумістити початок координат із центром стрижня та вважати, що він розміщується від  $y = -l$  до  $y = l$ , то для поздовжніх зміщень і напружень можна записати вирази [1]

$$U_y = \frac{d_{31} E_z \sin(ky)}{k \cos(kl)}, \quad \sigma_y = \frac{d_{31} E_z (\cos(ky) - \cos(kl))}{s_{11}^E \cos(kl)} \quad (k^2 = \rho \omega^2 s_{11}^E). \quad (1)$$

Всі позначення тут і далі збігаються з позначеннями робіт [1-4].

На резонансних частотах знаменник виразів (1) прямує до нуля, а зміщення та напруження зростають до нескінченності. Щоб не допустити цього в аналізі вводяться механічні втрати енергії через безрозмірну комплексну частоту  $x = kl$

$$x = x_0 - jx_2, \quad x_2 = 0,5s_{11m}x_0. \quad (2)$$

Адмітанс стрижня визначається формулою [1-3]

$$Y_b = j\omega C_0 \left( 1 - k_{31}^2 + \frac{k_{31}^2 \sin x}{x \cos x} \right) = j\omega C_0 \frac{\Delta_a(x)}{\Delta_r(x)}, \quad (3)$$

$$\Delta_r(x) = \cos(x), \quad \Delta_a(x) = (1 - k_{31}^2)\Delta_r(x) + k_{31}^2 \sin x/x.$$

У роботах [1-5] наведені вирази для радіальних зміщень  $U_r$ , суми головних напружень  $\sigma_r + \sigma_\theta$  і повної провідності  $Y$ , тонкого п'єзокерамічного диска, на основі яких можемо записати такі співвідношення

$$U_r = \frac{(1 + \nu)d_{31}E_z J_1(\lambda x)}{\Delta_r(x)}, \quad (4)$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{d_{31}E_z}{s_{11}^E(1 - \nu)} \left( \frac{(1 + \nu)xJ_0(\lambda x)}{\Delta_r(x)} - 2 \right), \quad (5)$$

$$Y = j\omega C_0 \left[ 1 - k_p^2 + \frac{(1 + \nu)k_p^2 J_1(x)}{\Delta_r(x)} \right] = j\omega C_0 \frac{\Delta_a(x)}{\Delta_r(x)}, \quad (6)$$

$$\Delta_r(x) = xJ_0(x) - (1 - \nu)J_1(x), \quad \Delta_a(x) = (1 - k_p^2)\Delta_r(x) + (1 + \nu)k_p^2 J_1(x).$$

де  $\nu$  — коефіцієнт Пуассона,  $\lambda = r/R$  — відношення радіуса точки спостереження до радіуса пластини,  $d_{31}$  — п'єзомодуль,  $E_z$  — напруженість електричного поля,  $C_0$  — власна статична ємність,  $x$  — безрозмірна частота,  $\omega$  — кругова частота,  $j$  — уявна одиниця,  $\Delta_r(x)$  — резонансний, а  $\Delta_a(x)$  — антирезонансний визначник.

Як самі вирази (1), (3)-(6), так і резонансний  $\Delta(x)$  та антирезонансний  $\Delta_a(x)$  визначники є комплексними функціями, бо комплексні безрозмірна частота  $x$ , поперечний  $k_{31}$  і планарний  $k_p$  КЕМЗ [4-6]

$$k_{31}^2 = k_{310}^2 [1 + j(s_{11m} + \varepsilon_{33m} - 2d_{31m})], \quad k_p^2 = k_{p0}^2 [1 + j(s_{11m} + \varepsilon_{33m} - 2d_{31m})]. \quad (17)$$

Вирази (3), (6) для повної провідності  $Y$  у діапазоні частот, як і всі інші відомі формули для адмітансу, зводяться до єдиної формули

$$Y = j\omega C_0 \frac{\Delta_a}{\Delta_r}. \quad (8)$$

Тут  $j$  — уявна одиниця;  $\omega$  — кругова частота;  $C_0$  — статична ємність;  $\Delta_a, \Delta_r$  — антирезонансний і резонансний визначники.

У монографії [1] для кругового п'єзокерамічного кільця із зовнішнім радіусом  $r_2$  та внутрішнім  $r_1$  виведено формулу повної провідності (2.48), яка також зводиться до виразу (8). Резонансний визначник має вигляд

$$\Delta_r = \Delta_1(x_1)\Delta_2(x_2) - \Delta_1(x_2)\Delta_2(x_1), \quad (9)$$

$$\Delta_1(x) = xJ_0(x) - (1 - \nu)J_1(x),$$

$$\Delta_2(x) = xY_0(x) - (1 - \nu)Y_1(x) \quad (x_1 = kr_1, \quad x_2 = kr_2),$$

де  $J_0(x), J_1(x), Y_0(x), Y_1(x)$  — функції Бесселя першого та другого роду,  $x_1, x_2$  — безрозмірні частоти.

Для антирезонансного визначника отримано

$$\begin{aligned} \Delta_a = & (1 - k_p^2)\Delta_r + \frac{(1 + \nu)k_p^2}{r_2^2 - r_1^2} \left[ (x_1\Delta_2(x_2) - x_2\Delta_2(x_1))(x_2J_1(x_2) - x_1J_1(x_1)) + \right. \\ & \left. + (x_2\Delta_1(x_1) - x_1\Delta_2(x_1))(x_2Y_1(x_2) - x_1Y_1(x_1)) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Повна провідність п'єзоелектричного зразка на будь-якій частоті  $\epsilon$ , таким чином, добутком реактивної провідності його міжелектродної ємності на цій частоті на відношення двох визначників — антирезонансного до резонансного — на тій же частоті.

Щоб розрахувати зміщення, напруження або повну провідність конкретного п'єзоелемента треба підставити у відповідні вирази комплексні електропружні модулі [1-3, 13, 14]

$$\begin{aligned} s_{11}^E &= s_{110}(1 - js_{11m}), \quad \epsilon_{33}^T = \epsilon_{330}(1 - j\epsilon_{33m}), \quad d_{31} = d_{310}(1 - jd_{31m}), \\ C &= C_0(1 - j\epsilon_{33m}), \quad x = x_0(1 - 0,5js_{11m}), \quad C_{0b} = \frac{\epsilon_{330}Lw}{h}, \\ C_{0d} &= \frac{\epsilon_{330}\pi R^2}{h}, \quad C_{0r} = \frac{\epsilon_{330}\pi(r_2^2 - r_1^2)}{h}, \quad d_{31}^2 = d_{310}^2(1 - 2jd_{31m}). \end{aligned} \quad (11)$$

Тут  $C_{0b}, C_{0d}, C_{0r}$  — відповідно статичні ємності стрижня, диска та кругового кільця,  $R$  — радіус диска,  $L, w$  — довжина та ширина стрижня,  $h$  — товщина.

Миттєва потужність  $P$  у вольт-амперах (ВА), яка виділяється в п'єзоелементі за його гармонічних коливань, є добутком спаду напруги  $U$  на ньому в даний момент часу на струм  $I$  у його колі в той же момент [9]

$$P = UI. \quad (12)$$

Знаючи формули для повної провідності  $Y$  і вибираючи режими заданої напруги  $U = U_0$  на п'єзорезонаторі або заданого струму  $I = I_0$  у його колі, можна

розрахувати миттєву потужність  $P_{pe}$  п'єзоелемента та її активний  $P_{pea}$  і реактивний  $P_{per}$  компоненти відповідно за формулами

$$\begin{aligned} P_{pe1} &= U_0^2 Y, & P_{pea1} &= P_{pe1} \cos \alpha, & P_{per1} &= P_{pe1} \sin \alpha; \\ P_{pe2} &= \frac{I_0^2}{Y}, & P_{pea2} &= P_{pe2} \cos \alpha, & P_{per2} &= P_{pe2} \sin \alpha; \\ \alpha &= a \cot(w_1), & w_1 &= \operatorname{Re} Y / \operatorname{Im} Y. \end{aligned} \quad (13)$$

## 2. Ітераційна методологія з визначення коефіцієнтів зв'язку та втрат енергії

Опрацьована нами ітераційна методологія придатна для п'єзореzonаторів будь-якої геометричної форми, у яких є відомими вирази для повної провідності. Суть її стосовно поздовжніх коливань поперечно поляризованого п'єзокерамічного стержня полягає в наступному.

Спершу п'єзокерамічний зразок приєднується до мосту змінного струму та вимірюються на частоті 1000 Гц його власна міжелектродна ємність  $C_0$  і тангенс діелектричних втрат  $\operatorname{tg} \delta = \epsilon_{33m}$ . Потім по чергово вимірюються в діапазоні частот спади напруг на дослідному п'єзоелементі  $U_{pe}$ , на його резисторі навантаження  $U_R$  і на вході вимірювального кола  $U_{in}$ . Для цієї мети до відомої схеми пасивного чотириполюсника [1-3] вводиться додатковий комутатор, який перемикає точку заземлення з резистора навантаження на п'єзоелемент і навпаки [6, 15, 16]. Відношення струму  $I_{pe}$  через п'єзоелемент до спаду потенціалу  $U_{pe}$  на ньому є (за означенням) повною електричною провідністю (адмітансом) п'єзоелемента  $Y_{pe}$

$$Y_{pe} = \frac{I_{pe}}{U_{pe}} = \frac{U_R}{RU_{pe}}. \quad (14)$$

Будуються за формулою (14) АЧХ повної провідності та за ними визначаються максимальна  $Y_m$  і мінімальна  $Y_n$  величини повної провідності, а також резонансна  $Q_A$  й антирезонансна  $Q_B$  добротності.

За формулою (3) розраховується АЧХ повної провідності в частотному інтервалі біля основного поздовжнього резонансу стержня [1, 11, 14]. Для зручності розрахунку в діапазоні частот ємнісна провідність записується через деякий множник  $a$  та безрозмірну частоту  $x$

$$\omega C_0 = 2\pi f_{01} C_0 x / x_{01} = ax \quad \left( a = \frac{2\pi f_{01} C_0}{x_{01}} \right), \quad (15)$$

де  $x$  — поточне значення безрозмірної комплексної частоти,  $x_{01}$  — активна складова резонансної безрозмірної частоти,  $f_{01}$  — виміряна частота (в Герцах) максимуму повної провідності.

Розраховані на кожному кроці АЧХ адмітансу й імпедансу порівнюються з експериментальними даними і, в разі потреби, вносяться корективи. Процес повторюється доти, доки не буде досягнуто бажану різницю між результатами обчислень і вимірними величинами.

Розглянемо приклад. Для визначення поперечного КЕМЗ  $k_{31}$ , а також тангенсів механічних  $s_{11m}$  і п'єзоелектричних  $d_{31m}$  втрат енергії проведемо ітераційні кроки для основного поздовжнього резонансу стрижня  $33,4 \times 5,8 \times 1,25$  мм із п'єзокераміки ЦТБС-3, який мав  $C_0 = 2,98$  нФ;  $\text{tg } \delta = 0,0093$ ;  $Y_m = 11,6$  мС;  $Y_n = 0,0637$  мС; ( $Z_n = 15,7$  кОм);  $f_m = 51,01$  кГц;  $f_n = 53,04$  кГц;  $f_n/f_m = 1,0398$ ;  $a = 0,608$  мС;  $x_{01} = 1,571$ . Експериментальні вимірювання зроблені за навантаження 229 Омів.

Графіки для кожного кроку подібні та різняться лише положеннями мінімуму провідності (або максимуму імпедансу) по частоті й амплітудами максимумів і мінімумів. На рис. 1 показано вигляд розрахованих АЧХ повної провідності (а) та вхідного імпедансу (б).

У результаті першої ітерації, яку було проведено в інтервалі безрозмірних частот  $1,5 \leq x \leq 1,75$  за довільно вибраних величин  $k_{310}^2 = 0,1$ ,  $s_{11m} = 0,01$ ,  $\varepsilon_{33m} = 0,0093$ ,  $d_{31m} = 0,01$ ,  $a = 0,608$  мС отримано такі провідності  $Y_m = 7,8$  мС,  $Y_n = 0,112$  мС і частоти  $x_n = 1,64$ ,  $x_m = 1,571$ ,  $x_n/x_m = 1,0446$ . Порівняння з експериментом показує, що треба зменшувати відношення  $x_n/x_m$ , а це можна зробити лише зниженням поперечного КЕМЗ  $k_{310}^2$ . Треба також підвищувати  $Y_m$ , для чого необхідно зменшувати тангенс пружних втрат  $s_{11m}$ .

Наступна ітерація зроблена в тому ж частотному діапазоні за інших заданих величин  $k_{310}^2 = 0,09$ ,  $s_{11m} = 0,006$ ,  $\varepsilon_{33m} = 0,0093$ ,  $d_{31m} = 0,007$ ,  $a = 0,608$  мС. Отримано такі провідності  $Y_m = 11,7$  мС,  $Y_n = 0,0735$  мС і частоти:  $x_n = 1,6321$ ,  $x_m = 1,571$ ,  $x_n/x_m = 1,0389$ . Максимум повної провідності та відношення частот наближаються до експериментальних величин, а для зменшення мінімуму провідності треба знижувати тангенс п'єзоелектричних втрат.

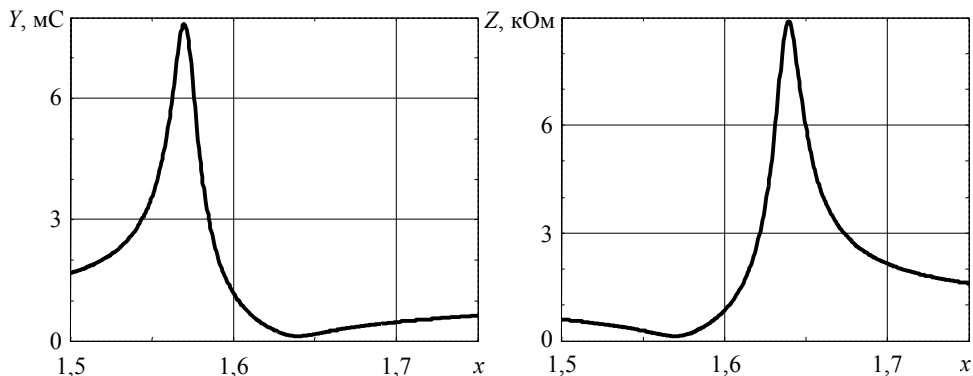


Рис. 1. Типовий вигляд АЧХ адмітансу й імпедансу для стрижня

Остання (п'ята) ітерація проведена в тому ж частотному інтервалі за  $d_{31m} = 0,004$ . Отримано  $Y_m = 11,7 \text{ мС}$ ,  $Y_n = 0,0684 \text{ мС}$  і частоти:  $x_n = 1,6321$ ,  $x_m = 1,571$ ,  $x_n/x_m = 1,0389$ . Розбіжність з експериментом становить тепер по  $Y_m$  — 0,86 %, по  $Y_n$  — 7,4 % і по відношенню частот  $f_n/f_m$  — 0,03 %.

Таким чином, у результаті ітераційних процедур можна вважати встановленими для досліджуваного стрижня такі дані:  $k_{310}^2 = 0,09$ ;  $s_{11m} = 0,006$ ;  $\epsilon_{33m} = 0,0093$ ;  $d_{31m} = 0,004$ .

Застосування аналогічних ітераційних процедур для тонкого диска  $66,4 \times 3,1 \text{ мм}$  із п'єзокераміки ЦТБС-3 [4, 7] дало можливість отримати уточнені величини  $k_p^2 = 0,32$ ,  $s_{11m} = 0,007$ ,  $d_{31m} = 0,0035$ , які були використані нами під час розрахунків коливань дискових резонаторів і п'єзотрансформаторів із розділеними електродами, а також перетворювачів кільцевої форми.

### 3. Перетворення вимірних амплітуд у наближенні малого сигналу

Дослідження коливань поперечно поляризованих п'єзокерамічних пластин велося у такий спосіб. Зразки виготовлялися з тонких п'єзокерамічних дисків шляхом шліфування. Для зв'язку з дослідною схемою у центрі зразків припаювалися провідники завтовшки 0,1 мм за довжини до 50 мм. Зразки спочатку приєднувалися до мосту змінного струму Е8-4 й вимірювалися на частоті 1000 Гц їхні статичні ємності  $C_0$  і тангенси діелектричних втрат  $\text{tg } \delta = \epsilon_{33m}$ . До виходу генератора Г3-56/1, увімкнутого на вихідний опір 50 Ом, приєднувався узгоджувальний подільник напруги з двох послідовних резисторів 68 і 10 Омів. Досліджувані п'єзоелементи разом із резисторами навантаження через комутатор приєднувалися паралельно до вихідного резистора подільника. Частота вимірювалася електронним частотоміром ЧЗ-38, а спади напруг (до трьох-чотирьох знаків) реєструвалися цифровим вольтметром В2-27А/1.

Значні експериментальні труднощі, які виникають для підтримання заданого режиму електричного навантаження, стимулювали пошуки простіших підходів. Один із них полягає в наступному. Спади напруг  $U_{pe}$ ,  $U_R$ ,  $U_{in}$  вимірюються на вибраних частотах у режимі «як є». Це означає, що жодних умов на них не накладається, окрім одної — на початку вимірювань задається певна величина вхідної напруги, наприклад, 100, 200 або 300 мВ. У процесі перестроювання частоти генератора всі три спади напруг більшою чи меншою мірою змінюються та змінюються співвідношення між ними. Виміряні спади напруг разом із відповідними частотами вводяться до комп'ютера та вираховуються адмітанси (за формулою (14)), імпеданси (як величини, обернені до адмітансів), фазові зсуви між спадами напруг і миттєві потужності. Фазові зсуви визначаються за теоремою косинусів [4-8]

$$\cos \alpha = \frac{U_{pe}^2 + U_R^2 - U_{in}^2}{2U_{pe}U_R}, \cos \beta = \frac{U_{in}^2 + U_R^2 - U_{pe}^2}{2U_{in}U_R}, \cos \gamma = \frac{U_{in}^2 + U_{pe}^2 - U_R^2}{2U_{in}U_{pe}}. \quad (16)$$

Перейти від режиму «як є» до інших режимів електричного навантаження в наближенні малих амплітуд можна за допомогою простих лінійних перетворень

$$\begin{aligned}
 U_{in} &= U_{in00}, & U_{pe} &= U_{in00}U_{pe0}/U_{in0}, & U_R &= U_{in00}U_{R0}/U_{in0}; \\
 U_R &= U_{R00}, & U_{in} &= U_{R00}U_{in0}/U_{R0}, & U_{pe} &= U_{R00}U_{pe0}/U_{R0}; \\
 U_{pe} &= U_{pe00}, & U_{in} &= U_{pe00}U_{in0}/U_{pe0}, & U_R &= U_{pe00}U_{R0}/U_{pe0}; \\
 p_0 &= p_{00}, & t &= \left[ p_0 / (U_{R0}U_{pe0}) \right]^{1/2}, & U_{pe} &= U_{pe0}t, & U_R &= U_{R0}t, & U_{in} &= U_{in0}t.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Тут  $U_{in00}$ ,  $U_{R00}$ ,  $U_{pe00}$ ,  $p_{00}$  — задані амплітудні значення, тоді як  $U_{in0}$ ,  $U_{R0}$ ,  $U_{pe0}$  — вимірними в режимі «як є» даними. Ці вирази збігаються з формулами (15) роботи [9], за винятком останнього рядка, в якому зроблене уточнення.

На рис. 2 проілюстровано ці перетворення на прикладі згаданого вище тонкого п'єзокерамічного стрижня з кераміки ЦТБС-3. Перший ряд графіків побудовано для даних режиму «як є», другий ряд відповідає заданому струмові постійної амплітуди  $I_0 = 1$  мА, у третьому ряду наведені результати перерахунку для заданого спаду напруги на п'єзоелементі  $U_0 = 100$  мВ, а в четвертому ряду містяться криві для вибраної сталої миттєвої потужності  $P_{pe0} = 0,218$  мВА.

Від режиму навантаження залежать лише спади напруг і миттєва потужність. У першому стовпчику подані спади напруг  $U_{in}$  (суцільні лінії),  $U_{pe}$  (розривні криві) та  $U_R$  (пунктир). АЧХ миттєвої потужності розміщені у другому стовпчику.

У разі наближення до резонансу в режимі «як є» спад напруги  $U_{in}$  трохи знижується (завдяки шунтуючій дії вимірювального кола на вихід узгоджувального подільника). Водночас відбувається різке зростання напруги на резисторі навантаження  $U_R$  і зниження спаду напруги на п'єзоелементі  $U_{pe}$ .

За наближення до антирезонансу спад напруги на резисторі навантаження знижується та досягає мінімуму на певній частоті, яку ототожнюють із антирезонансною [3, 4, 11]. Забезпечити режим заданого струму на цій частоті можна лише підвищуючи вхідну напругу та напругу на п'єзоелементі. Різко зростає поблизу від антирезонансу й миттєва потужність. Навпаки, при підході до резонансу в режимі заданого струму спад напруги на п'єзоелементі та миттєва потужність знижуються.

Для забезпечення режиму сталого спаду напруги на п'єзоелементі також доводиться піднімати у кілька разів вхідну напругу на резонансі, а це призводить до зростання спаду напруги на резисторі навантаження та збільшення струму в колі п'єзоелемента і, як наслідок, до збільшення миттєвої потужності. На антирезонансі в цьому режимі струм знижується, бо зростає вхідний імпеданс, і відповідно знижується миттєва потужність.

«Провал», який спостерігається на АЧХ миттєвої потужності в режимі «як є», може бути наслідком виділення в цьому режимі значної потужності на резисторі навантаження.



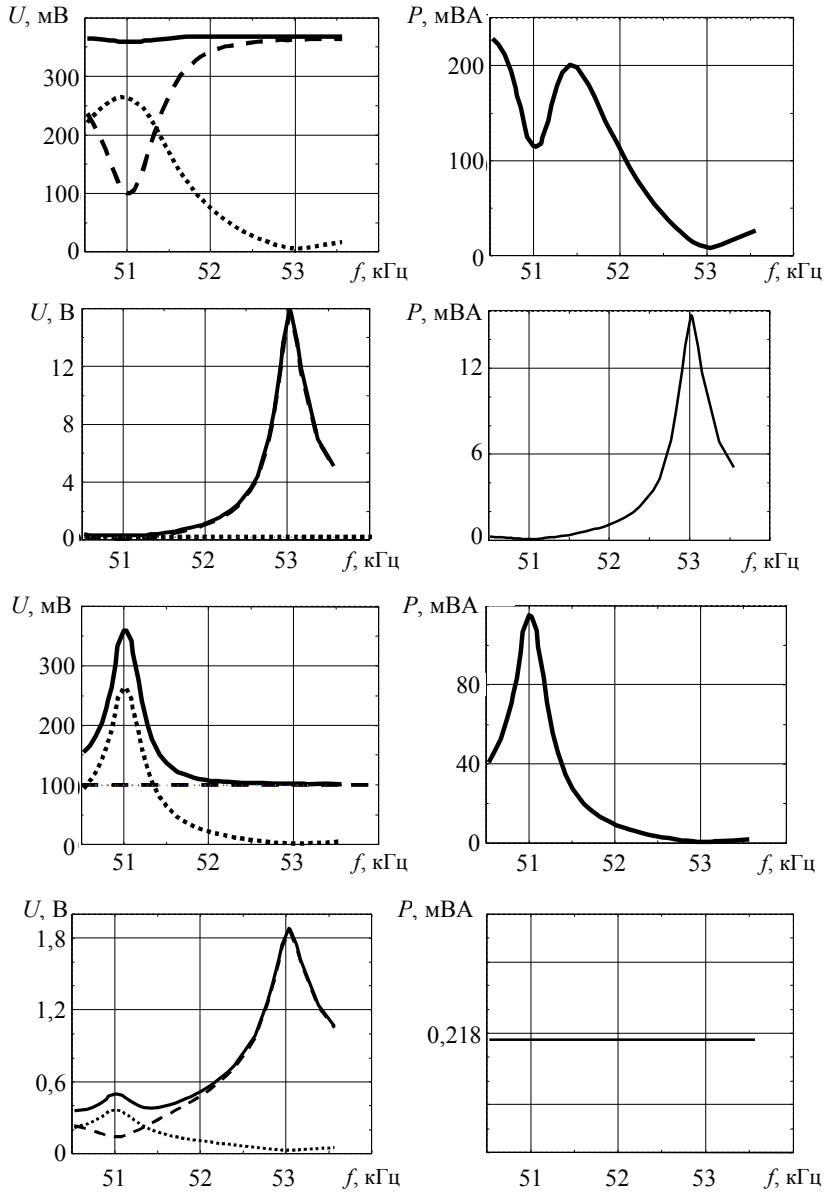


Рис. 2. АЧХ спадів напруг і миттєвої потужності у п'єзокерамічному стрижні залежно від режиму електричного навантаження

Щоб реалізувати режим заданої сталої миттєвої потужності необхідно збільшувати вхідну напругу та спад напруги на п'єзоелементі до 30-40 % в околі резонансу, а біля антирезонансу до кількох разів.

АЧХ повної провідності та фазових зсувів (рис. 3) не залежать від способу електричного навантаження. Вони однакові як у режимі «як є», так і за заданих струму, напруги чи потужності.

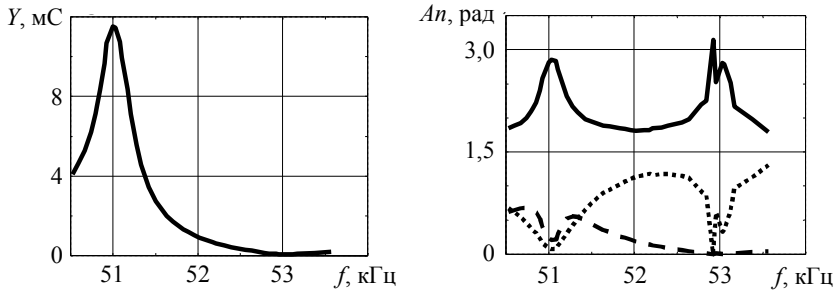


Рис. 3. АЧХ адмітансу та фазових зсувів у п'єзокерамічному стрижні

Фазові зсуви зображені: суцільними лініями кут  $\alpha$ , пунктиром кут  $\beta$  і розривними лініями кут  $\gamma$ . Кут  $\alpha$ , утворений сторонами  $U_R$  і  $U_{pe}$ , характеризує зсув фаз між струмом і спадом напруги в п'єзоелементі. Кут  $\beta$ , утворений сторонами  $U_{in}$  і  $U_R$ , відповідає фазовому зсуву між вихідною напругою генератора та споживаним струмом. Кут  $\gamma$ , утворений сторонами  $U_{in}$  і  $U_{pe}$ , характеризує різницю фаз між вихідною напругою генератора та спадом напруги на п'єзоелементі.

Незалежність АЧХ повної провідності та фазових зсувів від режиму електричного навантаження пояснюється тією обставиною, що в лінійному наближенні співвідношення між спадами напруг, якими визначаються провідності та косинуси кутів, залишаються, незважаючи на зниження чи зростання останніх у кільканадцять разів. Для основної моди поздовжніх коливань стержня фазовий зсув між спадом напруги на п'єзоелементі та струмом у ньому (кут  $\alpha$ ) наближається до  $\pi$  радіан на резонансі й антирезонансі, а поза цими частотами він знижується до  $\pi/2$ .

Слід зауважити, що цифри в одержаних АЧХ провідності та миттєвої потужності вказують лише на їх тенденції за зміни частоти та характеризувати рівень ніяк не можуть.

#### 4. Аналіз результатів

Результати вимірювань для режиму навантаження «як є» і перерахунків за формулами (17) проаналізовані в попередньому пункті. Тепер розглянемо та проаналізуємо результати розрахунку.

Розраховані за формулами (13) миттєва потужність  $P_{pe}$  п'єзоелемента та її активний  $P_{pae}$  і реактивний  $P_{par}$  компоненти поблизу від частот резонансу/антирезонансу першої поздовжньої моди коливань досліджуваного стрижня наведені на рис. 4. У розрахунках використані дані для поперечного КЕМЗ і тангенсів втрат, які були отримані в результаті ітераційних процедур. Заданий струм мав постійну амплітуду  $I_0 = 0,1$  мА, заданий спад напруги на п'єзоелементі був  $U_0 = 100$  мВ.

Миттєві потужності  $P_{pe1}$  і  $P_{pe2}$  зображені відповідно штриховою лінією з довгими штрихами та суцільною лінією, активні  $P_{pea1}$  і  $P_{pea2}$  компоненти

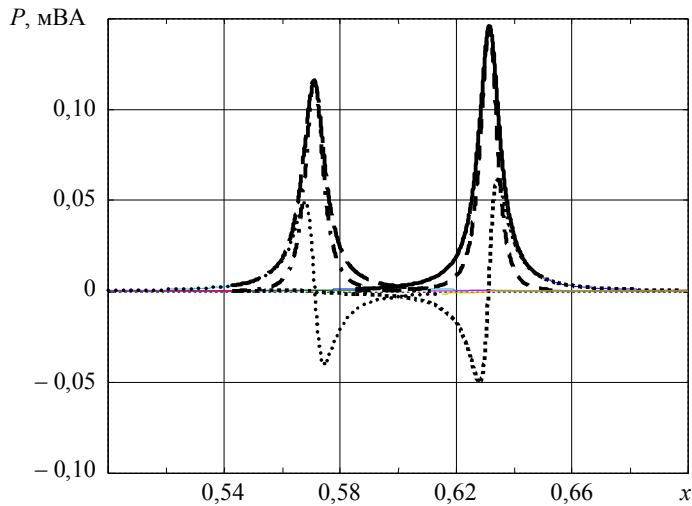


Рис. 4. АЧХ миттєвої потужності та її компонентів у п'єзокерамічному стрижні залежно від частоти для режимів сталого струму і сталої електричної напруги

зображені штрих-пунктирною лінією та штриховою лінією з короткими штрихами, а реактивні  $P_{per1}$  і  $P_{per2}$  — пунктиром із круглими та квадратними точками. Поза межами проміжку резонанс/антирезонанс криві частково збігаються та їх неможливо розділити на чорно-білих рисунках.

Миттєві потужності та їхні активні компоненти досягають максимальних значень на резонансі в режимі заданої напруги та на антирезонансі в режимі заданого струму. Реактивні складові потужності на резонансі й антирезонансі проходять через нуль і мають на цих частотах різні фази стосовно до активних компонентів.

**Висновки.** Наведені формули повної провідності та миттєвої потужності для вимушених коливань резонаторів у формі стрижнів, пластин і тонких кілець із поперечною поляризацією. Усі відомі вирази для повної провідності у діапазоні частот зведені до єдиної формули.

Експериментальні дані отримані та проаналізовані для стрижня  $33,4 \times 5,8 \times 1,25$  мм і диска  $66,4 \times 3,1$  мм із п'єзокераміки ЦТБС-3. Вони добре узгоджуються з результатами розрахунку.

Показано, що повна провідність і фазові зсуви не залежить від режиму електричного навантаження. У режимі сталої напруги на резонансах миттєва потужність різко зростає, а в режимі сталого струму знижується. На антирезонансах все відбувається навпаки. У режимі сталої напруги миттєва потужність знижується, а в режимі сталого струму різко зростає. Це може бути однією із причин виявленої авторами робіт [10-12] значної нелінійності АЧХ адмітансу в умовах великої потужності.

## Література

- [1] Шульга Н. А., Болкисев А. М. Колебания пьезоэлектрических тел. — Киев: Наук. думка, 1990. — 228 с.
- [2] Шульга М. О., Карлаш В. Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. — Київ: Наук. думка, 2008. — 272 с.
- [3] Karlash V. L. Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric plates // Int. Appl. Mech. — 2005. — Vol. 41, No 7. — P. 709-747.
- [4] Карлаш В. Л. Методи визначення коефіцієнтів зв'язку і втрат енергії при коливаннях резонаторів із п'єзокераміки // Акуст. вісник. — 2012. — Т. 15, № 4. — С. 24-38.
- [5] Шульга М. О., Карлаш В. Л. Амплітудно-фазові характеристики радіальних коливань тонкого п'єзокерамічного диска біля резонансів // Доповіді НАН України. — 2013. — № 9. — С. 80-86.
- [6] Безверхий О., Зінчук Л., Карлаш В. Вплив режиму електричного навантаження, сталих напруги або струму на характеристики коливань п'єзокерамічних резонаторів // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2013. — Вип. 18. — С. 9-20.
- [7] Karlash V. L. Energy losses in piezoceramic resonators and its influence on vibrations' characteristics // Electronics and communications. — 2014. — Vol. 19, No 2(79). — P. 82-94.
- [8] Karlash V. L. Modeling of energy-loss piezoceramic resonators by electric equivalent networks with passive elements // Mathematical modeling and computing. — 2014. — Vol. 1, No 2 — P. 163-177.
- [9] Безверхий О., Зінчук Л., Карлаш В. Повна провідність і миттєва потужність під час вимушених коливань п'єзокерамічних резонаторів // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2014. — Вип. 20. — С. 27-35.
- [10] Loss mechanisms and high power piezoelectrics / K. Uchino, J. H. Zheng, Y. H. Chen et al // J. Mat. Sci. — 2006. — Vol. 41. — P. 217-228.
- [11] Uchino K., Zhuang Yu., Ural S. O. Loss determination methodology for a piezoelectric ceramic: new phenomenological theory and experimental proposals // J. Adv. Dielectric. — 2011. — Vol. 1, No 1. — P. 17-31.
- [12] Development of a high power piezoelectric Characterization system and its application for resonance/antiresonance mode characterization / S. O. Ural, S. Tunçdemir, Yu. Zhuang, K. Uchino // Jpn. J. Appl. Phys. — 2009. — Vol. 48, No 5R. — P. 056509.
- [13] Holland R. Representation of dielectric, elastic and piezoelectric losses by complex coefficients // IEEE Trans. Sonics Ultrasonics. — 1967. — Vol. SU-14(1). — P. 18-20.
- [14] Martin G. E. Dielectric, elastic and piezoelectric losses in piezoelectric materials // Ultrasonic Symp. Proc. Milwaukee. — 1974. — P. 613-617.
- [15] Карлаш В. Л. Особенности амплитудно-частотных характеристик полной проводимости тонкого пьезокерамического полудиска // Прикл. мех. — 2009. — Т. 45, № 10. — С. 106-114.
- [16] Шульга М. О., Карлаш В. Л. Вимірювання повної провідності п'єзокерамічних елементів у схемі чотириполосника Мезона та її варіантах // Тези IV Міжнародної науково-технічної конференції «Датчики, прилади та системи — 2008». — Черкаси—Гурзуф, 2008. — С. 54-56.

## Forced electroelastic vibrations of the piezoceramic resonators of simple geometric form

Alexander Bezverkhyy, Lyubov Zinchuk, Valeriy Karlash

*Resonators' forced electroelastic vibrations of rod, plate, and disk forms are examined. The piezoelectric resonator's admittance is established to be a product of its reactive conductivity of inter-electrode capacity and the ratio of anti-resonance to resonance determinants. Experimental data are obtained and analyzed for the 33.4\*5.8\*1.25mm rod and for 66.4\*3.1mm disk made of TsTBS-3 ceramics. It is shown that admittance, impedance, and phase shifts do not depend upon the regime of electric loading. At constant voltage, an instantaneous power increases sharply at resonances and decreases at anti-resonances.*

## Вынужденные электроупругие колебания пьезокерамических резонаторов простой геометрической формы

Александр Безверхий, Любовь Зинчук, Валерий Карлаш

*Рассматриваются вынужденные электроупругие колебания резонаторов в форме стержней, пластин и дисков с поперечной поляризацией. Показано, что полная проводимость пьезоэлектрического образца на любой частоте является произведением реактивной проводимости его межэлектродной емкости на отношение антирезонансного и резонансного определителей. Экспериментальные данные получены и проанализированы для стержня  $33,4 \times 5,8 \times 1,25$  мм и диска  $66,4 \times 3,1$  мм из пьезокерамики ЦТБС-3. Полная проводимость, полный импеданс и фазовые сдвиги не зависят от режима электрического нагружения. Вместе с тем в режиме постоянного напряжения на резонансах мгновенная мощность резко возрастает, а в режиме постоянного тока снижается.*

Представлено професором Р. Мусієм

Отримано 27.04.15