

## Конвективно-теплове сушіння шару зерна

Богдана Гайвась<sup>1</sup>, Євген Чапля<sup>2</sup>, Дмитро Чаплаєв<sup>3</sup>

<sup>1</sup> д. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: haj@cmm.lviv.ua

<sup>2</sup> д. ф.-м. н., професор, Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, Україна; Інститут механіки і прикладної інформатики, Університет Казимира Великого в Бидгощі, вул. Коперніка, 1, Бидгощ, Польща, 85-064, e-mail: czapla@ukw.edu.pl

<sup>3</sup> національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013

*В роботі на основі принципу подібності тепло та масопереносу досліджено вплив температури та швидкості продуву шару зерна для м'якого режиму сушіння на зміну концентрації вологи в зерні та її напружено деформований стан в залежності від місця розміщення зерна в шарі. Показано, що напруження в зернині тим більші, чим більші осушена зернина. У процесі осушення переміщення в зернині від'ємні, тобто зерно всихається, що підтверджено експериментально. Найбільший вплив на осушення має температура. Зі збільшенням швидкості продуву зменшується відносна насиченість вологою в зернині.*

**Ключові слова:** сушіння зерна, математичне моделювання, розділення змінних.

**Вступ.** Техніка і технологія нагріву чи охолодження зерна при сушінні базується на теорії тепломасообміну та уявленнях про форми зв'язку вологи з матеріалом [1]. За різними оцінками прогрів зерна відбувається на декілька порядків швидше ніж переміщення вологи всередині зерна. При високих температурах ймовірність появи мікротріщини в зерні на початку процесу сушки є найбільшою. Способи опису масопереносу при осушенні в системах з дисперсною фазою наведено в працях [2-5]. Дослідження теплофізичних характеристик одиничного зерна і зернового шару показали, що коефіцієнт теплопровідності одиничного зерна значно більший ніж для шару цього зерна у цілому. Означає це, що для забезпечення рівномірного нагріву всієї маси зерна доцільно забезпечити розділення зерен одне від другого, тобто реалізувати так зване псевдорозрідження.

Експерименти показали [2], що при певному виборі співвідношення між кількістю зерна, проміжного теплоносія і величиною інтенсивності витрат повітря, що йде на псевдозрідження, зерно не осідає, а бере участь в загальному пульсаційному русі суміші. Отриманий псевдозріджений шар дозволяє забезпечити розділення зерен одне від другого і збільшити поверхні контактів з основним і проміжним теплоносіями. Тоді розхід повітря на псевдорозрідження зменшується на порядок в порівнянні з аналогічною характеристикою у випадку псевдорозрідження зернової маси без проміжного теплоносія. Порівняння результатів експерименту з результатами сушіння в шарі інертного теплоносія показали збільшення швидкості процесу сушіння зерна в шарі [2].

## 1. Формулювання задачі і ключова система рівнянь

Розглядаємо шар, складений з однакових кульок, який продувається сухим повітрям зі швидкістю  $v$  конвективного переносу в міжзерновому середовищі для етапу спадаючого сушіння. Рух газу в нерухомому шарі дисперсних частинок характеризується обтіканням частинок, що складають шар і течінням в каналах між ними.

На основі критерію подібності процесів тепло і масопереносу рівняння для концентрації  $c_z$  вологи та температури  $T_z$  в міжзерновому просторі шару мають вигляд [4-5], [7]

$$\frac{\partial c_z}{\partial \tau} + v \frac{\partial c_z}{\partial z} = D_z \frac{\partial^2 c_z}{\partial z^2} + J, \quad \frac{\partial T_z}{\partial \tau} + v \frac{\partial T_z}{\partial z} = a_T \frac{\partial^2 T_z}{\partial z^2} + J_T \quad (1)$$

де  $D_z$  — коефіцієнт дифузії вологи в поровому просторі;  $a_T$  — коефіцієнт температуропровідності;  $J, J_T$  — інтенсивність локального джерела вологи та тепла у результаті випаровування з окремих зернин;  $\tau$  — час;  $z$  — координата. Шар віднесено до прямокутної декартової системи координат так, що вісь  $Oz$  є перпендикулярна до поверхонь шару.

Для визначення інтенсивності локального джерела вологи  $J$  необхідно дослідити дифузію вологи в окремому зерні. Розглядаємо субстанцію зерна як двокомпонентний твердий розчин, що складається з основної речовини та вологи. Локальний термодинамічний стан такої ізотропної системи визначається значеннями спряжених термодинамічних параметрів: абсолютної температури  $T$  — ентропії  $S$ , компонентами тензорів напружень Коші  $\hat{\sigma}$  — деформації  $\hat{\varepsilon}$  та хімічних потенціалів складових компонент розчину  $\mu'_k$  — концентрацій  $C_k$  ( $k=1,2$ ). Тоді стосуючи підходи теорії твердих розчинів [6] та вибираючи в якості розв'язуючих функцій температуру  $T$ , переміщення  $\vec{u}$  і концентрацію вологи  $C_2$  при певних фізичних припущеннях у лінійному наближенні отримуємо:

рівняння стану

$$\hat{\sigma} = \left[ \left( K - \frac{2}{3} G \right) \varepsilon - K (\beta c + \alpha t) \right] \hat{I} + 2G \hat{\varepsilon}; \quad (2)$$

рівняння рівноваги й умови сумісності

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} = 0, \quad Jnk \hat{\varepsilon} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \hat{\varepsilon})^T = 0 \quad (\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\vec{\nabla} \otimes \vec{u} + (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^T]); \quad (3)$$

рівняння балансу концентрації та рівняння температуропровідності

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = D \Delta c - D_\varepsilon \Delta \varepsilon \quad (\vec{J} = -D \vec{\nabla} c + D_\varepsilon \vec{\nabla} \varepsilon), \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = a_t \Delta t. \quad (4)$$

Тут  $K$  — модуль всестороннього об'ємного стиску;  $G$  — модуль зсуву;  $\varepsilon = Tr\hat{\varepsilon}$  — перший інваріант тензора деформації  $\hat{\varepsilon}$ ;  $\beta, \alpha$  — концентраційний і температурний коефіцієнт об'ємного розширення;  $c = C_2 - C_2^{(0)}$  і  $t = T - T^{(0)}$  — відхилення концентрації вологи і температури від їх значень  $C_2^{(0)}$  і  $T^{(0)}$  у вихідному стані;  $\hat{I}$  — одиничний тензор;  $\vec{\nabla}$  — оператор Гамільтона;  $D$  — коефіцієнт дифузії;  $D_\varepsilon$  — коефіцієнт впливу градієнта поля об'ємної деформації на масовий потік;  $a_t$  — коефіцієнт температуропровідності;  $\vec{J}$  — дифузійний потік вологи;  $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$  — оператор Лапласа; символами « $\cdot$ », « $\times$ », « $\otimes$ » — означено скалярний, векторний і тензорний добутки.

Зазначимо, що за так званих «м'яких режимів» осушування можемо прийняти  $(T - T_0) / T_0 \ll 1$ .

Окрему зернину в геометричному наближенні кульової частинки, відносно до сферичної системи координат із початком в її центрі ( $r = 0$ ) [3]. Процес осушення відбувається через поверхню  $r = R$  контакту з міжзерновим повітряним середовищем, характеристики якого залежать від координати  $z$  у шарі. Тоді для зернини вектор переміщення має тільки радіальну складову  $u_r$  і відповідно

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \Delta c = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rc)}{\partial r^2},$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi}). \quad (5)$$

З умов рівноваги (3), рівнянь стану (2) [6] і формул (5) отримуємо співвідношення, які зв'язують градієнти об'ємної деформації з градієнтом концентраційного розширення.

Із рівнянь (4) і (5) отримуємо ключову систему рівнянь для окремої кульки у вигляді: рівняння на переміщення та рівняння балансу концентрації вологи

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 u_r)}{\partial r} \right] - \xi \left( \beta \frac{\partial c}{\partial r} + \alpha \frac{\partial t}{\partial r} \right) = 0; \quad \frac{\partial (rc)}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 (rc)}{\partial r^2} - \xi \beta D_\varepsilon \frac{\partial^2 (rc)}{\partial r^2}, \quad (6)$$

де  $\xi = 3K / (3K + 4G)$  — механічна стала;  $\varepsilon = \partial u_r / \partial r + 2u_r / r$ .

У початковий момент часу ( $\tau = 0$ ) прийmemo

$$u_r = 0, \quad c = c_0 = const. \quad (7)$$

На поверхні кулі  $r = R$ , яка вільна від зовнішніх навантажень, умову  $\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = 0$  запишемо так:

$$\sigma_{rr} = \left( K + \frac{4}{3} G \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2 \left( K - \frac{2}{3} G \right) \frac{u_r}{r} - K (\beta c + \alpha t) = 0. \quad (8)$$

Приймаємо, що потік вологи на цій поверхні є пропорційний до різниці концентрацій на поверхні зернини  $c_R(\tau) \equiv c(R, \tau)$  і міжзернового середовища  $c_z$  [8]

$$-D \frac{\partial c}{\partial r} + D_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = k(c_R - c_z), \quad (9)$$

де  $k$  — стала масообміну на поверхні кульки.

Вважаємо, що шукані функції та їх похідні в центрі кулі ( $r = 0$ ) є обмежені, зокрема,

$$c(0, \tau) \neq \infty, \quad \left. \frac{\partial c}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (10)$$

Оскільки у центросиметричній задачі справджуються співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 u_r)}{\partial r} \right] = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \xi \left( \beta \frac{\partial c}{\partial r} + \alpha \frac{\partial t}{\partial r} \right), \quad (11)$$

то рівняння балансу вологи (6) в зернині запишеться у вигляді

$$\frac{\partial (rc)}{\partial \tau} = \tilde{D} \frac{\partial^2 (rc)}{\partial r^2}, \quad (12)$$

а гранична умова (9) буде

$$-\tilde{D} \left. \frac{\partial c}{\partial r} \right|_{r=R} = k(c_R - c_z) \quad \text{або} \quad - \left. \frac{\partial c}{\partial r} \right|_{r=R} + H(c_z - c_R) = 0, \quad (13)$$

де  $\tilde{D} = D - \xi \beta D_\varepsilon$  — ефективний коефіцієнт дифузії вологи;  $H = k / \tilde{D}$  — приведений коефіцієнт масообміну.

Рівняння теплопровідності для температури можна записати так

$$\frac{\partial (rt)}{\partial \tau} = a_t \frac{\partial^2 (rt)}{\partial r^2} \quad (0 < r < R). \quad (14)$$

Початкові та граничні умови для температури є такі

$$t(r, 0) = f_t(r), \quad - \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{r=R} + H_t(T_z - t_R) = 0, \quad \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad t(0, \tau) \neq \infty. \quad (15)$$

## 2. Розв'язок для вологовмісту та напружено-деформованого стану зерна

Під час аналізу процесу дифузії вологи у зерні, концентрацію вологи у міжзерновому просторі шару можемо вважати незалежною від часу, тобто  $c_z = c_z(z)$ . Функцію  $c_z$  знаходимо з розв'язку рівняння (1) за відповідних граничних умов у квазістаціонарному наближенні (нехтуємо частковою похідною за часом, проте часова залежність залишається у джерелі). Розв'язок задачі шукаємо методом розділення змінних [7]. Окреслимо нові функції

$$\vartheta(r, z, \tau) = c_z(z) - c(r, z, \tau), \quad \vartheta_T(r, z, \tau) = T_z(z) - t(r, z, \tau) \quad (16)$$

для якої задача (12)-(15) набуде вигляду

$$\frac{\partial(r\vartheta)}{\partial\tau} = \tilde{D} \frac{\partial^2(r\vartheta)}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial(r\vartheta_T)}{\partial\tau} = \alpha_T \frac{\partial^2(r\vartheta_T)}{\partial r^2}, \quad (17)$$

$$\left. \frac{\partial\vartheta}{\partial r} \right|_{r=R} + H\vartheta_R = 0; \quad \vartheta(0, \tau) \neq \infty, \quad \left. \frac{\partial\vartheta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0; \quad (18)$$

$$\vartheta(r, 0) = c_{z0} - c_0, \quad \left. \frac{\partial\vartheta_T}{\partial r} \right|_{r=R} + H_T\vartheta_{TR} = 0, \quad (19)$$

де  $\vartheta_R(\tau) \equiv \vartheta(R, \tau)$ ,  $\vartheta_{TR}(\tau) \equiv \vartheta_T(R, \tau)$ .

Тоді розв'язок задачі (17)-(19) запишемо у вигляді [9]

$$\vartheta(r, z, \tau) = 2\delta c \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\tau) \frac{\sin r_n}{r_n}, \quad \vartheta_T(r, z, \tau) = 2\delta t \sum_{n=1}^{\infty} A_{Tn}(\tau) \frac{\sin r_{Tn}}{r_{Tn}}. \quad (20)$$

Тут  $\delta c = c_{z0}(z) - c_0$ ,  $A_n(\tau) = (\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n) e^{-\mu_n^2 \tilde{D} \tau / R^2} / (\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n)$ ,  
 $\delta t = T_{z0}(z) - t_0$ ,  $A_{Tn}(\tau) = (\sin \mu_{Tn} - \mu_{Tn} \cos \mu_{Tn}) e^{-\mu_{Tn}^2 \tilde{D} \tau / R^2} / (\mu_{Tn} - \sin \mu_{Tn} \cos \mu_{Tn})$ ,  
 $r_n = \mu_n r / R$ ,  $r_{Tn} = \mu_{Tn} r / R$ ,  $\mu_n$ ,  $\mu_{Tn}$  — корені характеристичних рівнянь

$$\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{Fo - 1}, \quad \operatorname{tg} \mu_T = -\frac{\mu_T}{Fo_T - 1}, \quad (21)$$

в яких  $Fo = HR$ ,  $Fo_T = H_T R$  — критерії Фур'є.

Відповідно зі співвідношенням (16) для концентрації вологи та температури в зерні знаходимо

$$c(r, z, \tau) = c_z(z, \tau) - 2\delta c \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\tau) \frac{\sin r_n}{r_n},$$

$$t(r, z, \tau) = T_z(z, \tau) - 2\delta t \sum_{n=1}^{\infty} A_{Tn}(\tau) \frac{\sin r_{Tn}}{r_{Tn}}. \quad (22)$$

Для концентраційного та температурного потоків  $J_R$ ,  $J_{TR}$  через поверхню кульки

$$J_R = -\tilde{D} \left. \frac{\partial c}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{2\tilde{D}(\delta c)}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(\tau)}{\mu_n} (\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n),$$

$$J_{TR} = -\lambda_T \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{2\lambda_t(\delta t)}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{Tn}(\tau)}{\mu_{Tn}} (\sin \mu_{Tn} - \mu_{Tn} \cos \mu_{Tn}). \quad (23)$$

Тоді інтенсивність локального джерела вологи та температури у разі випаровування з окремих зернин  $J$ ,  $J_T$  яка фігурує в вихідному рівнянні (1), буде

$$J = \tilde{\alpha}(J_R + \delta_T J_{TR}), \quad J_T = \tilde{\alpha}_T J_{TR}, \quad (24)$$

де  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\alpha}_T$  — коефіцієнти, що залежать від розміру кульок (радіуса) та їх упакування (кубічне просте, об'ємцентроване чи гранецентроване тощо) [8],  $\delta_T$  — термоградієнтний коефіцієнт.

За прийнятих припущень, процес конвективної дифузії в міжзерновому просторі шару товщини  $z = L$ , складеного з однакових зернин, є процесом швидким порівняно з процесом дифузії вологи з об'єму зерна до його поверхні. Тому подальший аналіз процесу осушення виконаємо на основі рівнянь

$$D_z \frac{d^2 c_z}{dz^2} - v \frac{dc_z}{dz} + J = 0, \quad \lambda_{Tz} \frac{d^2 t_z}{dz^2} - v \frac{dt_z}{dz} + J_T = 0, \quad (25)$$

в яких функція  $J$  визначається виразом (24). Враховуючи, що  $J$ ,  $J_T$  можна записати у вигляді  $J(\tau) = c_z J_0(\tau) - c_0 J_0(\tau)$ ,  $J_T(\tau) = t_z J_{T0}(\tau) - t_0 J_{T0}(\tau)$ , то з рівнянь (25) маємо

$$D_z \frac{d^2 c_z}{dz^2} - v \frac{dc_z}{dz} + c_z J_0(\tau) = c_0 J_0(\tau), \quad \lambda_{Tz} \frac{d^2 t_z}{dz^2} - v \frac{dt_z}{dz} + t_z J_{T0}(\tau) = t_0 J_{T0}(\tau). \quad (26)$$

Тут

$$J_0(\tau) = -\alpha \frac{2\tilde{D}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(\tau)}{\mu_n} (\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n),$$

$$J_{T0}(\tau) = -\alpha_{1T} \frac{2a_T}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{Tn}(\tau)}{\mu_{Tn}} (\sin \mu_{Tn} - \mu_{Tn} \cos \mu_{Tn}).$$

Рівняння (26) будемо розв'язувати за граничних умов першого та третього роду відповідно

$$c_z|_{z=0} = 0, \quad c_z|_{z=L} = c_z^n, \quad t_z|_{z=0} = 0, \quad t_z|_{z=L} = t_z^n;$$

$$-D_z \left. \frac{\partial c_z}{\partial z} \right|_{z=0} = \beta_z (c_z|_{z=0} - c_c), \quad c_z|_{z=L} = c_z^n,$$

$$-\lambda_z \left. \frac{\partial t_z}{\partial z} \right|_{z=0} = \beta_{Tz} (t_z|_{z=0} - t_c), \quad t_z|_{z=L} = t_z^n, \quad (27)$$

де  $c_z^n$  — концентрація насиченої пари,  $c_c$  — концентрація пароповітряної суміші в зовнішньому середовищі,  $t_z^n$  — температура, що відповідає насиченню пари.

Розв'язок задачі (26)-(27) шукаємо методом варіації сталих [7]. Після відповідних обчислень для першого випадку граничних умов отримаємо

$$c_z(z, \tau) = -K_1 e^{\lambda_1 z} + K_2 e^{\lambda_2 z} + c_0, \quad t_z(z, \tau) = -K_{T1} e^{\lambda_{T1} z} + K_{T2} e^{\lambda_{T2} z} + t_0, \quad (28)$$

де

$$K_1 = [c_0 e^{\lambda_2 L} + c_z^n - c_0] \Delta^{-1}, \quad K_2 = [c_0 e^{\lambda_1 L} + c_z^n - c_0] \Delta^{-1}, \quad \Delta = e^{\lambda_2 L} - e^{\lambda_1 L},$$

$$K_{T1} = [t_0 e^{\lambda_{T2} L} + t_z^n - t_0] \Delta_T^{-1}, \quad K_{T2} = [t_0 e^{\lambda_{T1} L} + t_z^n - t_0] \Delta_T^{-1}, \quad \Delta_T = e^{\lambda_{T2} L} - e^{\lambda_{T1} L},$$

$$\lambda_{1/2} = \left[ v \pm (v^2 - 4D_z J_0(\tau))^{1/2} \right] / 2D_z, \quad \lambda_{T1/2} = \left[ v \pm (v^2 - 4a_{Tz} J_{T0}(\tau))^{1/2} \right] / 2a_{Tz}.$$

Надалі використаємо безрозмірну координату  $\bar{z} = z/L$ . Тоді

$$c_z(\bar{z}, \tau) = -K_1 e^{\bar{\lambda}_1 \bar{z}} + K_2 e^{\bar{\lambda}_2 \bar{z}} + c_0, \quad t_z(\bar{z}, \tau) = -K_{T1} e^{\bar{\lambda}_{T1} \bar{z}} + K_{T2} e^{\bar{\lambda}_{T2} \bar{z}} + t_0. \quad (29)$$

де  $\bar{\lambda}_i = L\lambda_i$ ,  $\bar{\lambda}_{Ti} = L\lambda_{Ti}$ ,  $i = 1, 2$ .

У випадку граничних умов третього роду шукані функції  $c_z$  і  $t_z$  також визначаються формулами (29), в яких

$$K_1 = \left[ \frac{\beta L}{D_z} (c_0 - c_{zc}) e^{\bar{\lambda}_2} - (c_z^n - c_0) \left( \bar{\lambda}_2 + \frac{\beta L}{D_z} \right) \right] / \tilde{\Delta},$$

$$K_2 = \left[ \frac{\beta L}{D_z} (c_0 - c_{zc}) e^{\bar{\lambda}_1} + (c_z^n - c_0) \left( \bar{\lambda}_1 + \frac{\beta L}{D_z} \right) \right] / \tilde{\Delta},$$

$$\tilde{\Delta} = \left( \bar{\lambda}_1 + \frac{\beta L}{D_z} \right) e^{\bar{\lambda}_2} - \left( \bar{\lambda}_2 + \frac{\beta L}{D_z} \right) e^{\bar{\lambda}_1}.$$

Інтегруючи друге рівняння (11), для об'ємної деформації отримуємо

$$\varepsilon = \xi(\beta c + \alpha t) + L, \quad (30)$$

де функцію  $L(z, \tau)$ , «сталу інтегрування», визначимо з умови рівності нулеві деформації в її центрі, тобто  $L(z, \tau) = -\xi[\beta c(0, z, \tau) + \alpha t(0, z, \tau)]$ . Звідси

$$\varepsilon(r, z, \tau) = \xi \left\{ \beta [c(r, z, \tau) - c(0, z, \tau)] + \alpha [t(r, z, \tau) - t(0, z, \tau)] \right\} \text{ і відповідно}$$

$$\varepsilon(r, z, \tau) = -2\xi \left\{ \beta \delta c \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\tau) \left( \frac{1}{r_n} \sin r_n - 1 \right) + \alpha \delta t \sum_{n=1}^{\infty} A_{Tn}(\tau) \left( \frac{1}{r_{Tn}} \sin r_{Tn} - 1 \right) \right\}. \quad (31)$$

Переміщення  $u_r$  знайдемо з умови рівності нулю радіальних напружень (8) на поверхні кулі  $r = R$ . Маємо

$$u_r(R, z, \tau) = -\frac{KR}{4G} \{ \beta c(0, z, \tau) + \alpha t(0, z, \tau) \}. \quad (32)$$

Для визначення радіального переміщення у довільній точці зерна інтегруємо перший вираз (11). У результаті, з урахуванням його обмеженості для  $r = 0$  і виразу (32) для  $r = R$ , отримаємо

$$u_r(r, z, \tau) = \frac{\xi \beta}{r^2} \left[ c_z \frac{r^3}{3} - 2R^3 \delta c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(\tau)}{\mu_n^3} (\sin r_n - r_n \cos r_n) \right] +$$

$$+ \frac{\xi\alpha}{r^2} \left[ t_z \frac{r^3}{3} - 2R^3 \delta t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{Tn}(\tau)}{\mu_{Tn}^3} (\sin r_{Tn} - r_{Tn} \cos r_{Tn}) \right] + \frac{r}{3} L_1(z, \tau). \quad (33)$$

Тут із формули (30) маємо

$$L_1(z, \tau) = \left\{ \frac{3K\beta}{4G} \left[ -c_z + 2\delta c \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\tau) \right] - 3\xi\beta \left[ \frac{c_z}{3} - 2\delta c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(\tau)}{\mu_n^3} (\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n) \right] \right\} + \left\{ \frac{3K\alpha}{4G} \left[ -t_z + 2\delta t \sum_{n=1}^{\infty} A_{Tn}(\tau) \right] - 3\xi\alpha \left[ \frac{t_z}{3} - 2\delta t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{Tn}(\tau)}{\mu_{Tn}^3} (\sin \mu_{Tn} - \mu_{Tn} \cos \mu_{Tn}) \right] \right\}.$$

В нашому випадку відмінні від нуля наступні складові тензора напружень

$$\sigma_{rr} = 2G \frac{\partial u_r}{\partial r} + \left[ \left( K - \frac{2}{3}G \right) \varepsilon - K(\beta c + \alpha t) \right],$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = 2G \frac{u_r}{r} + \left[ \left( K - \frac{2}{3}G \right) \varepsilon - K(\beta c + \alpha t) \right]. \quad (34)$$

За визначеними концентрацією вологи  $c$  та температурою  $t$  (формули (28), (29)), переміщенням  $u_r$  (формула (33)), деформацією  $\varepsilon$  (формула (31)) отримасмо напруження  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{\phi\phi}$  (формула (34)).

Таким чином, на основі запропонованої моделі можемо обчислити напружено-деформований стан окремого зерна, який залежить від його розміщення у шарі, характеристик матеріалу зерна та міжзернового простору, розміру й упакування зерен за різних режимів конвективно-дифузійного переносу вологи.

### 3. Результати числових досліджень

На основі праць [11-13] під час обчислень прийнято: середній радіус зернини  $R = 2,00086 \cdot 10^{-3}$  м; коефіцієнт теплопровідності у міжзерновому середовищі  $\lambda_T = 0,0252$  Вт/(м·К); коефіцієнт упакування  $\alpha_T = 2,5$ ; товщина шару  $L = 1$  м; ефективний коефіцієнт дифузії вологи  $\tilde{D} = 1,34 \cdot 10^{-9}$  м<sup>2</sup>/с; приведений коефіцієнт масообміну  $H = 10^{-7}$ ; приведений коефіцієнт теплообміну зерна  $H_T = 7,44373 \cdot 10^{-2}$ ; критерій Фур'є для масообміну  $Fo = 2,00086 \cdot 10^{-7}$ ; критерій Фур'є для теплообміну  $Fo_T = 0,148939$ ; концентраційний коефіцієнт об'ємного розширення  $\beta = 2,71389 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/кг; температурний коефіцієнт розширення  $\alpha = 0,29993$ /К; температура і концентрація вологи у початковий момент часу  $t_0 = 20^\circ\text{C}$  та  $c_0 = 0,0005$ ; концентрація насиченої пари  $c_z^n = 1,34 \cdot 10^{-2}$  кг/м<sup>3</sup>; модуль зсуву  $G = 6,833 \cdot 10^5$  кг/м<sup>2</sup>; механічна стала  $\xi = 0,5$ ; модуль всестороннього об'ємного стиску  $K = 9,1111 \cdot 10^6$  кг/м<sup>2</sup>; коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,2$ ; швидкість продуву зерна  $v = 10^{-2}$  м/с і  $v = 10^{-1}$  м/с.

Відповідно до наведених експериментальних даних перші шість коренів характеристичних рівнянь (21) є такі:  $\mu = 0,1224; 4,4945; 7,7259; 10,9046; 14,0666; 17,2210$ ;  $\mu_T = 0,6609; 4,5268; 7,7447; 10,9179; 14,0769; 17,2295$  [7].



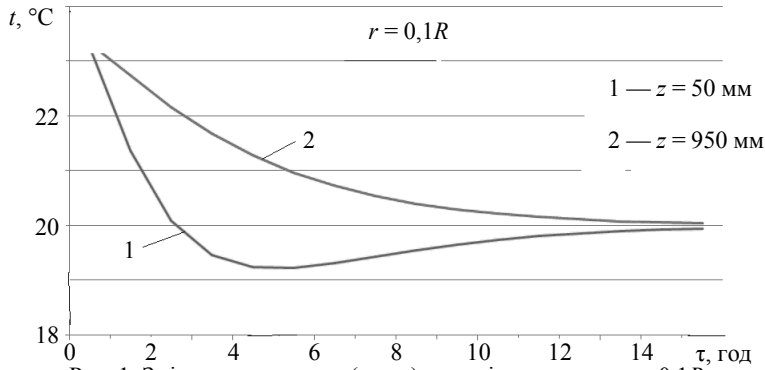


Рис. 1. Зміни температури  $t(r, z, \tau)$  у зерні з часом для  $r = 0,1R$  і різних значень  $z = 50$  мм і  $z = 950$  мм

Визначено зміни температури в самому зерні близько до поверхні шару та на його дні за формулою (20). Встановлено, що на зміни температури на початку осушення суттєво впливають граничні умови для міжзернового середовища  $t_z$ . Згодом температура вирівнюється по всій поверхні шару до 20°C (рис. 1).

Обчислення показали, що переміщення у зерні мають однаковий характер на усіх висотах у шарі. На початку процесу сушіння найбільші переміщення спостерігаються у приповерхневій зоні шару, однак згодом – на дні шару, тобто зерно, що знаходиться на поверхні, починає усихати швидше.

Використовуючи отримані розв'язки для радіальних і дотичних напружень (35) і (36), знайдено величини напружень у зернині залежно від місця розташування  $z$  у шарі, часу  $\tau$  та біжучого радіуса зернини  $r$ . Порівняно отримані величини напружень із гранично допустимим (границею міцності зерна) [14]. Показано, що зі збільшенням температури на границях шару напруження зростають і за температури 50°C наближаються до допустимих.

Обчислено напруження  $\sigma_{rr}$  та  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi}$  залежно від  $r$  для моментів часу  $\tau = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  год для різних висот  $z = 900, 500, 100$  мм розташування зернини у шарі. Для  $z = 900$  мм розподіл радіальних напружень  $\sigma_{rr}$  показано рис. 2, а при  $z = 100$  мм — дотичних  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi}$  на рис. 3.

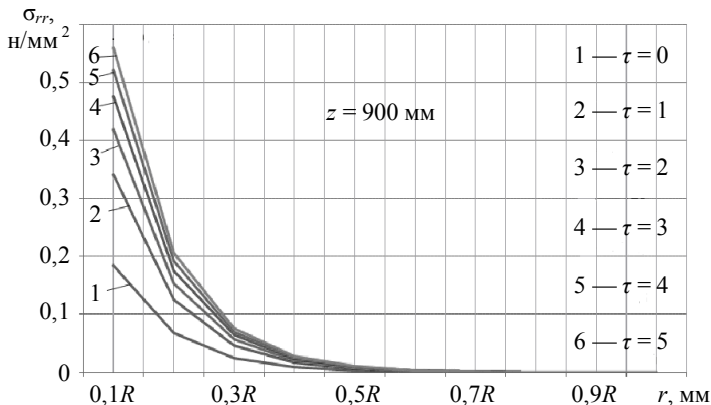


Рис. 2. Розподіл радіальних напружень  $\sigma_{rr}$  у зерні для  $z = 900$  мм і  $\tau = 0, 1-5$  год

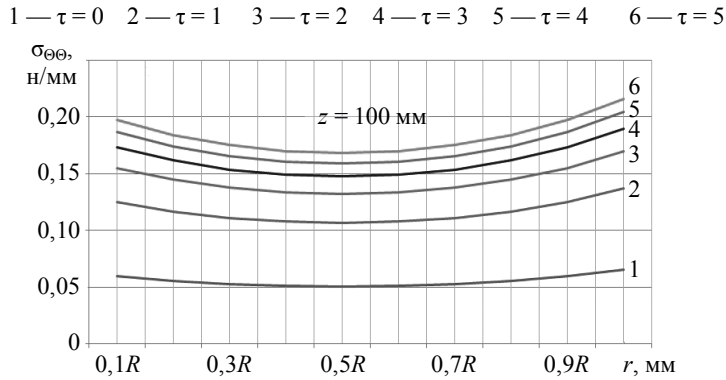


Рис. 3. Розподіл дотичних напружень  $\sigma_{\theta\theta}$  та  $\sigma_{\phi\phi}$  для  $z = 100$  мм у шарі та  $\tau = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  год

При цьому радіальні та дотичні напруження у зернині мають подібний характер не залежно від місця розташування зернини у шарі. Радіальні напруження зростають у часі та спадають до нуля при поверхні зернини. Дотичні напруження зростають при наближенні до центру зернини та до її поверхні, мінімальні дотичні напруження спостерігаються при  $r \approx 0,5R$ .

Найбільші радіальні напруження спостерігаються на поверхні шару у центрі зернини, які зростають із плином часу. Наприклад, при  $r = 0,001R$ ,  $z = 0,001m$ ,  $\tau = 10$  год радіальні напруження у зернині  $\sigma_{rr} = 1,92123 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ . Така величина напружень є на порядок меншою від границі міцності зерна [2]. Цей результат добре узгоджується із теоретичними даними, оскільки досліджувався «м'який» режим сушіння при невисокій температурі  $t = 20^\circ \text{C}$  та швидкості продуву  $v = 10^{-2} \text{ м/с}$ .

На рис. 4 наведені графіки зміни концентрації вологи у зернині ( $r = 0,1R$ ), яка знаходиться в середині шару ( $z = 900$  мм) із плином часу для швидкостей продуву  $v = 10^{-2} \text{ м/с}$  та  $v = 10^{-1} \text{ м/с}$ .

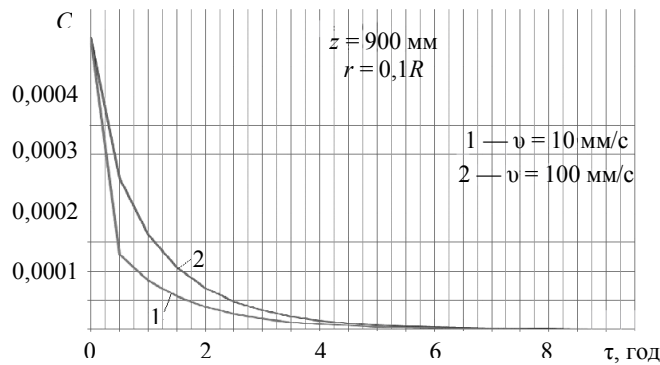


Рис. 4. Зміна концентрації вологи у зернині при  $r = 0,1R$ ,  $z = 900$  мм для швидкостей продуву  $v = 10^{-2} \text{ м/с}$  та  $v = 10^{-1} \text{ м/с}$

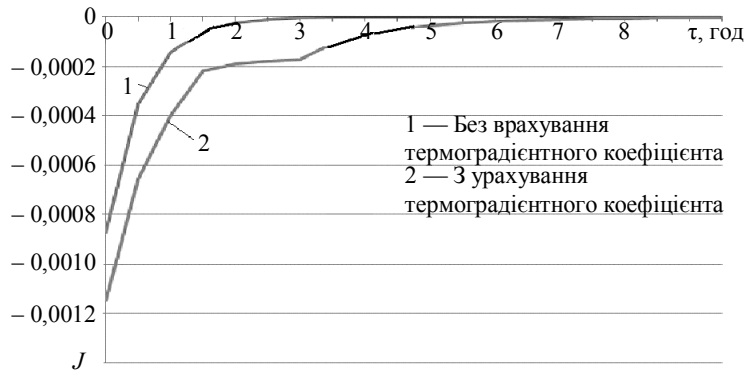


Рис. 5. Залежність потоку вологи  $J$  від часу  $\tau$  без врахування та з врахуванням термоградієнтного коефіцієнта  $\delta_T$

При підвищенні температури, осушення зерна відбувається швидше, однак відповідно зростають радіальні та дотичні напруження, що може приводити до його пошкодження. Тому при виборі режиму осушення слід враховувати цільове призначення зерна. Якщо зерно використовуватиметься в якості корму чи харчової сировини, то можна використовувати режими сушіння із вищими температурами та більшими швидкостями продуву, однак, коли зерно призначене для посіву, то слід проводити осушення у «м'якому» режимі з невисокими температурами та швидкостями продуву зерна.

У будь-якому випадку, напруження, розраховані за (34) для конкретного режиму осушення із врахуванням швидкості продуву, температури, початкової концентрації вологи, фізико-хімічних та механічних властивостей зерна, не мають перевищувати гранично допустимі напруження даного виду зерна. Допустимі напруження та границя міцності є структурно-механічні властивості конкретного виду зерна, які можна знайти в літературі, зокрема [13, 14].

На рис. 5 зображено залежність інтенсивності локального джерела вологи без врахування та з врахуванням впливу термоградієнтного коефіцієнта  $\delta_T$ , який характеризує відносний термічний перенос вологи у матеріалі при перепаді температури в межах одного градуса. Значення термоградієнтного коефіцієнта залежать від відносної вологості зерна, при чому при вологовмісті 15-17% його значення максимальні [1, 7, 12].

З наведених розрахунків видно, що вплив термоградієнтного коефіцієнта  $\delta_T$  на локальний потік концентрації  $J$  може бути істотним.

**Висновки.** В роботі запропоновано і досліджено математичну модель конвективно-теплого сушіння зернистих матеріалів, яка базується на термодинамічній теорії механічних, теплових та дифузійних процесів. Вивчено процес сушіння однорідних зерен, що утворюють шар, який продувається потоком повітря. Побудовано розв'язки відповідних рівнянь та проведено обчислення зміни концентрації вологи, температури, переміщень, деформацій, радіальних та дотичних

напружень у зернині в процесі сушіння в залежності від швидкості продуву шару повітрям та місцезнаходження зернини в шарі.

Показано, що найбільший вплив на осушення (переміщення, деформації, напруження зернини) має температура сушильного агента. Чисельно досліджено вплив величини швидкості продуву шару повітрям та місцерозміщення зернини в шарі за висотою на осушення зерна. Досліджено вплив термоградієнтного коефіцієнта на зміни потоку вологи в часі.

Всі числові результати отримано для зерна пшениці на основі експериментальних досліджень, приведених в огляді літературних джерел.

### **Література**

- [1] *Лыков А. В.* Теория сушки. — Москва: Энергия, 1968. — 536 с.
- [2] *Валуев А. П., Жданова Е. И.* О возможности интенсификации процесса сушки зерна без повышения температурного потенциала. Процессы сушки капиллярно-пористых материалов. — Минск, 1990. — С. 137-144.
- [3] *Егоров Г. А.* Технологические свойства зерна. — Москва: Агропромиздат, 1985. — 334 с.
- [4] *Китаев Б. И., Тимофеев Б. А.* Тепло и массообмен в плотном шаре. — Москва: Металлургия, 1972. — 432 с.
- [5] *Фролов В. Ф.* Моделирование сушки дисперсных материалов. Ленинград: Химия, 1987. — 206 с.
- [6] *Бурак Я. Й., Чапля С. Я., Чернуха О. Ю.* Континуально-термодинамічні моделі механіки твердих розчинів. — Київ: Наук. думка, 2006. — 272 с.
- [7] *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. — Москва: Высшая школа, 1967. — 599 с.
- [8] *Кулініченко О. Р.* Визначення коефіцієнта опору тертя при турбулентному обтіканні зважених частинок // Харчова промисловість. — 2012, — №12. — С.68-71.
- [9] *Гайвась Б. І., Чапля С. Я.* Конвективне осушення шару зернистого матеріалу в усталеному режимі // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2013. — Вип. 18. — С. 51-60.
- [10] *Гросул Л. И., Дударев И. Р., Котляр Л. И.* Форма поверхности и объем зерновки пшеницы // Изв. вузов. Пищевая технология. — 1972. — № 4. — С. 17-19.
- [11] *Голик М. Г., Делидович В. Н.* Научные основы обработки зерна в потоке. — Москва: Колос, 1972. — 262 с.
- [12] *Дехтяр Р. А., Сиковский Д. Ф.* Теплообмен в зернистом слое и умеренных числах Рейнольдса // ТВГ. — 2002. — Т. 10, — № 5. — С. 748-755.
- [13] *Егоров Г. А.* Теплофизические свойства единичного зерна / Информационный сборник. Научно-технические достижения и передовой опыт в области хлебопродуктов. — Москва ЦНИТЭИХлебпроминформ, 1996. — 68 с.
- [14] *Аоро Ф. А., Наумов И. А., Егоров Г. А.* Прочностные свойства пшеницы Сирийской AP // Известия вузов. — 1978. — № 5. — С. 150-152.

## **Convective-thermal grain drying**

**Bogdana Hayvas, Eugen Chaplia, Dmitry Chaplayev**

*In this paper, on the basis of the principle of similarity of heat and mass transfer processes, the effect of temperature and the blowdown rate of a layer of grain during "soft" drying is studied for changes in the concentration of moisture in a single grain and its stress-strain state, depending on the location of the grain in the layer. It is shown that the drier the grain is, the more tension in the single grain is. During the drying, the displacement in the grain is negative that indicates that grains are shrinking, and this is confirmed experimentally. The temperature of drying affects the process of drying significantly. With the increase of blowdown rate, the relative moisture saturation of the grain decreases.*

## Конвективно-тепловая сушка зерна

Богдана Гайвась, Евгений Чапля, Дмитрий Чаплаев

*В работе на основании принципа подобия процессов тепло и массопереноса исследовано влияние температуры и скорости продува слоя зерна при «мягких» режимах сушки на изменение концентрации влаги в единичном зерне и его напряженно-деформированное состояние в зависимости от места расположения зерна в слое. Показано, что напряжения в единичном зерне тем больше, чем более сухое зерно. В процессе сушки перемещения в зерне отрицательны, что указывает на усадку зерна, что подтверждено экспериментально. Наибольшее влияние на сушку имеет температура. С увеличением скорости продува уменьшается относительная насыщенность влагой в зернышке.*

Отримано 15.01.15