УДК 539.3

Крайові задачі нелокальної термопружності з урахуванням локального зміщення маси

Ольга Грицина

Д. ф.-м. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: gryt@cmm.lviv.ua

З використанням підходів і методів нерівноважної термодинаміки та механіки суцільного середовища сформульовано замкнену систему рівнянь нелокального типу математичної моделі термопружного твердого тіла, що враховує взаємозв'язок процесів деформування, теплопровідності та локального зміщення маси. З останнім пов'язуються зміни структури матеріалу у межах фізично малого елемента тіла. Дано формулювання відповідних модельному описові крайових задач математичної фізики. Для лінеаризованого наближення доведено теорему єдиності розв'язку стаціонарних задач механіки з врахуванням впливу локального зміщення маси на процес деформування.

Ключові слова: нелокальна теорія, методи нерівноважної термодинаміки, взаємозв'язок процесів, локальне зміщення маси, теорема єдиності розв'язку.

Вступ. У зв'язку з інтенсивним розвитком нанотехнологій останні десятиліття характеризуються значною увагою дослідників до розробляння нелокальних теорій деформації твердих тіл, які, як відомо, дозволяють описати низку експериментально встановлених явищ [1-5], що не знаходять належного обґрунтування у рамках класичних (локальних) теорій. У межах континуальної теорії пружності такі моделі будували шляхом врахування впливу градієнтів тензора деформації чи внутрішніх змінних на визначальні співвідношення [1, 2, 5-7]. Професор Бурак Я. Й. розвинув нелокальну теорію деформації твердих термопружних тіл, врахувавши у модельному описові вплив локального зміщення маси на механічні та теплові поля [8]. При цьому локальне зміщення маси пов'язувалося зі змінами структури матеріалу [9]. Однак розроблені на основі такого підходу математичні моделі пружних та термопружних тіл були побудовані за нехтування конвективним складником похідної за часом, що обмежує область їх застосування. Тому, у розвиток дослідження [10] сформулюємо замкнену систему співвідношень нелокальної теорії деформації термопружних твердих тіл із врахуванням впливу локального зміщення маси на механічні та теплові поля. При цьому, на відміну від праць [11, 12], врахуємо конвективний складник похідної за часом.

1. Балансові співвідношення

Розглядаємо деформівне тверде тіло, в якому протікають механічні й теплові процеси, що можуть супроводжуватися змінами структури матеріалу у межах фізично малого елемента тіла. Такі зміни структури можна спостерігати, наприклад, у примежових областях новоутворених поверхонь. Зумовлені вони порушенням силової рівноваги атомів у цих областях. Пов'яжемо згадані структурні зміни з процесом локального зміщення маси. Для опису останнього введемо у розгляд об'єктивні фізичі величини, якими є: вектор локального зміщення маси $\mathbf{\Pi}_m$, відносна міра зміни внутрішньої енергії системи, зумовленої локальним зміщенням маси, — потенціал μ'_π, а також питома густина наведеної маси $\rho_m = -\rho^{-1}\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_m$ [10]. Тут ρ — густина маси, ∇ — оператор Гамільтона, крапка означає скалярний добуток. Для опису механічних полів введемо тензор напружень Коші $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ і тензор деформації $\hat{\boldsymbol{e}}$, а процес теплопровідності описуватимемо полем абсолютної температури T, питомої ентропії s та вектором потоку тепла $\mathbf{J}_q$. Замкнену систему рівнянь математичної моделі деформування термопружного тіла будемо формувати, виходячи з рівняння балансу ентропії та повної енергії системи.

Локальна форма рівняння балансу ентропії має вигляд [13]

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q + \frac{1}{T}\mathbf{J}_q \cdot \nabla T + T\sigma_s + \rho\Re . \tag{1}$$

Тут σ_s — виникнення ентропії за одиницю часу, $\Re$ — розподілені джерела тепла, t — час.

Вважаємо, що повна енергія системи є сумою внутрішньої ρu (u — питома внутрішня енергія) та кінетичної $\rho\mathbf{v}^2/2$ енергій. Її зміна відбувається внаслідок конвективного перенесення енергії $\rho(u+\mathbf{v}^2/2)$ через поверхню, роботи поверхневих зусиль $\hat{\sigma}\cdot\mathbf{v}$, потоку тепла $\mathbf{J}_q$, роботи $\mu'_\pi \dfrac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t}$, виконаної у результаті зміни структури матеріалу (внаслідок перенесення частинок тіла відносно центра маси і зміщення самого центра маси фізично малого елемента тіла відносно його геометричного центра), дії масових сил $\mathbf{F}$ і розподілених теплових джерел $\Re$ [10]. Отож, рівняння балансу повної енергії запишемо так:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(V)}\left(\rho u + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2\right)dV = -\oint\limits_{(\Sigma)}\left[\rho\left(u + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right)\mathbf{v} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{v} + \right.$$

$$\left. + \mathbf{J}_q + \mu'_\pi \frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t}\right]\cdot \mathbf{n}\, d\Sigma + \int\limits_{(V)}\left(\rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} + \rho\Re\right)dV . \tag{2}$$

Тут $\mathbf{v}$ — вектор швидкості; $\mathbf{n}$ — зовнішня нормаль до поверхні (Σ) тіла. Рівняння (2), записане у локальній формі, є таким

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2\right) = -\nabla\cdot\left[\rho\mathbf{v}\left(u + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right)\right] + \nabla\cdot\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{v}\right) -$$

$$-\nabla\cdot\mathbf{J}_q - \nabla\cdot\left(\mu'_\pi \frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t}\right) + \rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} + \rho\Re . \tag{3}$$

Перейшовши від локальних похідних по часу до субстанціональних, у результаті низки перетворень надамо рівнянню (3) вигляду

$$\rho\frac{du}{dt}+\rho\nabla\mu'_\pi\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}-\rho\mu'_\pi\frac{d\rho_m}{dt}-\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*:(\nabla\otimes\mathbf{v})=$$
$$=-\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\mathbf{v}\right)\left(u+\frac{1}{2}\mathbf{v}^2-\rho_m\mu'_\pi+\nabla\mu'_\pi\cdot\boldsymbol{\pi}_m\right)+$$
$$+\mathbf{v}\cdot\left(-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*+\rho\mathbf{F}_*\right)-\nabla\cdot\mathbf{J}_q+\rho\Re\,. \tag{4}$$

Тут

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*=\hat{\boldsymbol{\sigma}}-\rho\left(\rho_m\mu'_\pi-\boldsymbol{\pi}_m\cdot\nabla\mu'_\pi\right)\hat{\mathbf{I}}\,,\quad \mathbf{F}_*=\mathbf{F}+\rho_m\nabla\mu'_\pi-\boldsymbol{\pi}_m\cdot\nabla\otimes\nabla\mu'_\pi\,, \tag{5}$$

$$\rho_m=-\rho^{-1}\nabla\cdot\left(\rho\boldsymbol{\pi}_m\right), \tag{6}$$

$\hat{\mathbf{I}}$ — одиничний тензор, «$\otimes$» — знак діадного добутку, $\boldsymbol{\pi}_m=\rho^{-1}\boldsymbol{\Pi}_m$.

Зазначимо, що під час отримання рівняння (4) використано співвідношення

$$\left(\nabla\otimes\boldsymbol{\Pi}_m\right)\cdot\nabla\mu'_\pi=\nabla\otimes\left(\boldsymbol{\Pi}_m\cdot\nabla\mu'_\pi\right)-\boldsymbol{\Pi}_m\cdot\nabla\otimes\left(\nabla\mu'_\pi\right),$$
$$\mu'_\pi\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}_m\right)=\rho\rho_m\nabla\mu'_\pi-\nabla\left(\rho\rho_m\mu'_\pi\right).$$

Врахуємо, що рівняння (4) балансу енергії повинно бути інваріантним відносно просторових трансляцій, тобто його вигляд не може змінитися у разі заміни: $\mathbf{v}\to\mathbf{v}+\mathbf{a}$, де $\mathbf{a}$ — довільний сталий вектор. У результаті такої заміни з рівняння (4) отримаємо

$$\rho\frac{du}{dt}+\rho\nabla\mu'_\pi\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}-\rho\mu'_\pi\frac{d\rho_m}{dt}-\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*:(\nabla\otimes\mathbf{v})=$$
$$=-\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\mathbf{v}\right)\left(u+\frac{1}{2}\mathbf{v}^2+\frac{1}{2}\mathbf{a}^2+\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}-\rho_m\mu'_\pi+\nabla\mu'_\pi\cdot\boldsymbol{\pi}_m\right)+$$
$$+\left(\mathbf{v}+\mathbf{a}\right)\cdot\left(-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*+\rho\mathbf{F}_*\right)-\nabla\cdot\mathbf{J}_q+\rho\Re\,. \tag{7}$$

Наслідком віднімання співвідношень (4) та (7) є такий вираз

$$\frac{1}{2}\mathbf{a}^2\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\mathbf{v}\right)=\mathbf{a}\cdot\left[-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*+\rho\mathbf{F}_*-\mathbf{v}\cdot\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\mathbf{v}\right)\right].$$

Оскільки $\mathbf{a}$ — довільний вектор, то коефіцієнти біля квадратичних і лінійних доданків відносно цього вектора повинні дорівнювати нулеві. Звідси, як наслідок одержуємо рівняння балансу механічного імпульсу, сформульоване відносно узагальненого тензора напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*$, та рівняння балансу маси

$$\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*+\rho\mathbf{F}_*=\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}, \tag{8}$$

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\mathbf{v}=0\,. \tag{9}$$

Бачимо, що наслідком урахування взаємозв'язку процесів деформування, теплопровідності та локального зміщення маси є модифікація тензора напружень та виникнення у рівнянні балансу механічного поступального руху додаткової нелінійної масової сили $\mathbf{F}'_* = \rho_m \nabla \mu'_\pi - \boldsymbol{\pi}_m \cdot \nabla \otimes \nabla \mu'_\pi$ (див. формули (5)).

З огляду на співвідношення (8) та (9) рівняння (4) балансу повної енергії спроститься і набуде вигляду

$$\rho \frac{du}{dt} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : (\nabla \otimes \mathbf{v}) - \rho \nabla \mu'_\pi \cdot \frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt} + \rho \mu'_\pi \frac{d\rho_m}{dt} - \nabla \cdot \mathbf{J}_q + \rho \Re . \tag{10}$$

Співвідношення (10) повинно також виконуватися у разі повертання тіла як жорсткого цілого з постійною кутовою швидкістю $\boldsymbol{\Omega}$. Тому, замінимо у ньому $\mathbf{v}$ на $\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ і врахуємо, що $\nabla \otimes (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \nabla \otimes \mathbf{v} - \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{(3)} \cdot \boldsymbol{\Omega}$ [14]. Тут $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{(3)}$ — тензор Леві-Чивіта [15], «×» — знак векторного добутку; $\mathbf{r}$ — радіус-вектор. У результаті такої заміни отримаємо рівняння

$$\rho \frac{du}{dt} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \left(\nabla \otimes \mathbf{v} - \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{(3)} \cdot \boldsymbol{\Omega}\right) - \rho \nabla \mu'_\pi \cdot \frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt} + \rho \mu'_\pi \frac{d\rho_m}{dt} - \nabla \cdot \mathbf{J}_q + \rho \Re . \tag{11}$$

Віднявши вирази (10) та (11), одержимо: $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{(3)} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$. Ця рівність справджуватиметься для довільних сталих значень кутової швидкості $\boldsymbol{\Omega}$, якщо $\epsilon^{(3)}_{ijk} \sigma_{*jk} = 0$. Наслідком цього є формула: $\sigma_{*jk} = \sigma_{*kj}$, отже, узагальнений тензор напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*$ — симетричний тензор. Відтак, ґрунтуючись на співвідношеннях (10) та (11), запишемо

$$\rho \frac{du}{dt} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : (\nabla \otimes \mathbf{v}) + \rho T \frac{ds}{dt} - \rho \nabla \mu'_\pi \cdot \frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt} + \rho \mu'_\pi \frac{d\rho_m}{dt} - \frac{1}{T} \mathbf{J}_q \cdot \nabla T - T \sigma_s . \tag{12}$$

У рівняння (12) врахуємо, що для геометрично лінійного тіла

$$\nabla \otimes \mathbf{v} = \frac{d\hat{e}}{dt} + \frac{d\hat{\boldsymbol{\omega}}}{dt}, \tag{13}$$

$$\hat{\boldsymbol{e}} = \frac{1}{2}\left[\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{T}}\right], \quad \hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}\left[\nabla \otimes \mathbf{u} - (\nabla \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{T}}\right]. \tag{14}$$

Тут $\hat{\boldsymbol{e}}$ та $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ — відповідно симетричний тензор деформації та антисиметричний тензор поворотів [16]; $\mathbf{u}$ — вектор переміщення; індекс «Т» вказує на операцію транспонування. З огляду на подання (13) та формулу $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \frac{d\hat{\boldsymbol{\omega}}}{dt} = 0$ рівнянню балансу внутрішньої енергії надамо вигляду

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho T \frac{ds}{dt} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}}{dt} + \rho \mu'_\pi \frac{d\rho_m}{dt} - \rho \nabla \mu'_\pi \cdot \frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt} - \mathbf{J}_q \cdot \frac{\nabla T}{T} - T \sigma_s . \tag{15}$$

Перейдемо у формулі (15) до нової термодинамічної функції $f = u - Ts + \nabla \mu'_\pi \cdot \boldsymbol{\pi}_m$ — узагальненої вільної енергії Гельмгольца. У підсумку отримаємо таке рівняння балансу вільної енергії:

$$\rho \frac{df}{dt} = -\rho s \frac{dT}{dt} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}}{dt} + \rho \mu'_\pi \frac{d\rho_m}{dt} + \rho \boldsymbol{\pi}_m \cdot \frac{d\nabla \mu'_\pi}{dt} - \mathbf{J}_q \cdot \frac{\nabla T}{T} - \sigma_s . \tag{16}$$

Приймемо, що вільна енергія f є функцією скалярних T, ρ_m, векторного $\nabla\mu'_\pi$ та тензорного $\hat{\boldsymbol{e}}$ параметрів, які є незалежними величинами. Тоді, на основі співвідношення (16) одержимо узагальнене рівняння Гіббса та вираз для виробництва ентропії

$$df = \frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : d\hat{\boldsymbol{e}} - s\,dT + \mu'_\pi d\rho_m + \boldsymbol{\pi}_m \cdot d\nabla\mu'_\pi , \quad \sigma_s = -\mathbf{J}_q \cdot \frac{\nabla T}{T^2} . \tag{17}$$

Зазначимо, що у виразі для виробництва ентропії відсутні складники, зумовлені зміщенням маси, оскільки цей процес ми розглядали як пружний. Бачимо, що порівняно з класичною теорією термопружності [16], у результаті врахування взаємозв'язку процесів теплопровідності, деформування та локального зміщення маси фазовий простір параметрів стану містить дві додаткові пари спряжених параметрів, а саме: (1) питому густину наведеної маси й потенціал μ'_π, (2) градієнт потенціалу μ'_π та питомий вектор локального зміщення маси $\boldsymbol{\pi}_m$. Ці параметри свідчать про просторову нелокальність розробленої теорії.

2. Визначальні співвідношення

Формули (17) є основою для формування визначальних співвідношень моделі. Кінетичне рівняння записуємо, виходячи із виразу (17) для виробництва ентропії. При цьому приймемо, що причиною виникнення потоку тепла $\mathbf{J}_q$ є термодинамічна сила $-\nabla T/T^2$. Отож, у лінійному наближенні для моделі ізотропного пружного матеріалу отримаємо таке кінетичне рівняння

$$\mathbf{J}_q = -\lambda\nabla T , \tag{18}$$

де λ — коефіцієнт теплопровідності.

На основі узагальненого рівняння Гіббса визначаємо рівняння стану моделі

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = \rho\left.\frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{e}}}\right|_{T,\rho_m,\nabla\mu'_\pi} , \quad s = -\left.\frac{\partial f}{\partial T}\right|_{\hat{\boldsymbol{e}},\rho_m,\nabla\mu'_\pi} , \quad \mu'_\pi = \left.\frac{\partial f}{\partial \rho_m}\right|_{T,\hat{\boldsymbol{e}},\nabla\mu'_\pi} , \quad \boldsymbol{\pi}_m = \left.\frac{\partial f}{\partial(\nabla\mu'_\pi)}\right|_{T,\hat{\boldsymbol{e}},\rho_m} . \tag{19}$$

Запишемо рівняння стану (19) в явному вигляді. Для простоти обмежимося ізотермічним наближенням. Розвинемо вільну енергію f за збуреннями параметрів стану і для малих збурень обмежимося у цьому розвиненні квадратичними членами. Відтак, для ізотропного початково однорідного тіла маємо

$$f = f_0 + \mu_{\pi 0}\rho_m + \frac{1}{2\rho_0}\left(K - \frac{2}{3}G\right)I_1^2 + \frac{G}{\rho_0}I_2 +$$

$$+\frac{d_\rho}{2}\rho_m^2 - \frac{K\alpha_\rho}{\rho_0}I_1\rho_m - \frac{\chi_m}{2}\left(\nabla\mu'_\pi\right)\cdot\left(\nabla\mu'_\pi\right). \tag{20}$$

Тут $I_1 = \hat{\boldsymbol{e}} : \mathbf{I}$, $I_2 = \hat{\boldsymbol{e}} : \hat{\boldsymbol{e}}$; $\mu_{\pi 0}$ та ρ_0 — значення потенціалу μ'_π та густина маси у природному стані безмежного однорідного середовища; K — модуль об'ємного стиску за сталої питомої густини наведеної маси; G — модуль зсуву; α_ρ — коефіцієнт об'ємного розширення, спричиненого локальним зміщенням маси; χ_m — коефіцієнт, що характеризує локальне зміщення маси, зумовлене градієнтом потенціалу μ'_π; d_ρ — ізохоричний коефіцієнт залежності потенціалу μ'_π від питомої густини наведеної маси.

На основі формул (19) та (20) для прийнятого вище ізотермічного наближення лінійні рівняння стану набувають вигляду

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = 2G\hat{\boldsymbol{e}} + \left[\left(K - \frac{2}{3}G\right)e - K\alpha_\rho\rho_m\right]\hat{\mathbf{I}}, \tag{21}$$

$$\mu'_\pi = \mu_{\pi 0} + d_\rho\rho_m - \rho_0^{-1}K\alpha_\rho e, \qquad \boldsymbol{\pi}_m = -\chi_m\nabla\mu'_\pi. \tag{22}$$

3. Розв'язувальна система рівнянь

Замкнена система рівнянь нелокального типу моделі механіки, що враховує взаємозв'язок процесів деформування, теплопровідності та локального зміщення маси, охоплює: рівняння балансу механічного імпульсу, ентропії, маси та наведеної маси, а також відповідні геометричні та фізичні співвідношення. Загалом це нелінійна система рівнянь. Кількість рівнянь у цій системі можна зменшити, якщо співвідношення (14), (18), (19) підставити у балансові рівняння (1), (6), (8), (9).

Запишемо розв'язувальну лінеаризовану систему рівнянь моделі ізотропного тіла за ізотермічного наближення. З цією метою підставимо у рівняння (6), (8) співвідношення (14), (21), (22). Взявши за ключові функції вектор переміщень **u** та питому густину наведеної маси ρ_m, отримаємо таку систему рівнянь

$$\left(K + \frac{1}{3}G\right)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + G\Delta\mathbf{u} - K\alpha_\rho\nabla\rho_m + \rho_0\mathbf{F} = \rho_0\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}, \tag{23}$$

$$\Delta\rho_m - \frac{1}{d_\rho\chi_m}\rho_m = \frac{K\alpha_\rho}{\rho_0 d_\rho}\Delta(\nabla\cdot\mathbf{u}). \tag{24}$$

Якщо ж за ключові функції вибрати вектор переміщень **u** та потенціал $\tilde{\mu}'_\pi$, то розв'язувальна система рівнянь набуде вигляду

$$\left(K + \frac{1}{3}G - \frac{K^2\alpha_\rho^2}{\rho_0 d_\rho}\right)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + G\Delta\mathbf{u} - K\frac{\alpha_\rho}{d_\rho}\nabla\tilde{\mu}'_\pi + \rho_0\mathbf{F} = \rho_0\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}, \tag{25}$$

$$\Delta\tilde{\mu}'_\pi - \frac{1}{d_\rho\chi_m}\tilde{\mu}'_\pi = \frac{K\alpha_\rho}{\rho_0 d_\rho\chi_m}\nabla\cdot\mathbf{u}. \tag{26}$$

Бачимо, що наслідком урахування локального зміщення маси є наявність у ключовій системі додаткового рівняння (24) або (26), а також модифікація рівнянь руху (23) та (25), які містять доданки, пов'язані з цим процесом. Оскільки локальне зміщення маси вважаємо пружним, то рівняння (24) та (26) стаціонарні. Їх розв'язок залежить від знака коефіцієнта $(d_\rho\chi_m)^{-1}$. Зазначимо, що параметр $l_* = \sqrt{d_\rho\chi_m}$ має розмірність довжини і є характерною віддаллю для приповерхневих явищ [2].

4. Крайові умови

Постановка крайових задач нелокальної теорії деформації твердих тіл включає формулювання ключових рівнянь для шуканих функцій у відкритій області, яку займає тіло, задання умов спряження полів на внутрішніх поверхнях контакту різнорідних частин тіла, а також співвідношень, які визначають шукані поля на поверхнях, що обмежують тіло. У разі формулювання нестаціонарних задач до вказаних співвідношень слід долучити відповідні початкові умови. Крайові умови забезпечують однозначність розв'язку сформульованих задач математичної фізики. Запишемо контактні та граничні умови, що відповідають розробленій нелокальній математичній моделі пружного тіла з урахуванням впливу локального зміщення маси на зв'язані поля.

На поверхнях контакту різнорідних тіл повинні виконуватися умови спряження полів, узгоджені з відповідними балансовими рівняннями й умовою суцільності середовища. Вважаємо, що контакт тіл ідеальний. У такому разі на поверхні $\left(\Sigma^{\text{int}}\right)$ контакту маємо умови на стрибки переміщень і зусиль

$$\mathbf{u}^{(1)}-\mathbf{u}^{(2)}=0\,,\qquad \left[\hat{\sigma}_*^{(1)}-\hat{\sigma}_*^{(2)}\right]\cdot\mathbf{n}=0\,. \tag{27}$$

потенціалу μ'_π та нормального складника вектора локального зміщення маси

$$\mu_\pi'^{(1)}-\mu_\pi'^{(2)}=0\,,\qquad \left(\boldsymbol{\pi}^{(1)}-\boldsymbol{\pi}^{(2)}\right)\cdot\mathbf{n}=0\,. \tag{28}$$

На зовнішній поверхні тіла $\left(\Sigma^{\text{ext}}\right)$ можна задавати кінематичні або силові механічні граничні умови: $\mathbf{u}=\mathbf{u}_a$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*\cdot\mathbf{n}=\boldsymbol{\sigma}_a$. За граничну умову на локальне зміщення маси візьмемо задання потенціалу μ'_π на поверхні тіла: $\mu'_\pi=\mu'_{\pi a}$. Тут $\mathbf{u}_a$ $\boldsymbol{\sigma}_a$, $\mu'_{\pi a}$ — задані на поверхні $\left(\Sigma^{\text{ext}}\right)$ значення векторів переміщень, зусиль і потенціалу μ'_π.

Покажемо, що сформульовані вище крайові задачі математичної фізики мають єдиний розв'язок. Обмежимось розглядом стаціонарного наближення, за якого замість рівняння руху (8) маємо рівняння рівноваги

$$\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*+\rho\mathbf{F}_*=0\,. \tag{29}$$

5. Теорема єдиності розв'язку стаціонарних задач нелокальної пружності

Т е о р е м а . Для області (V), обмеженої гладкою поверхнею (Σ), і додатних G, $K-\dfrac{2}{3}G-\dfrac{K^2\alpha_\rho^2}{\rho_0 d_\rho}$ і χ_m існує не більше однієї сукупності функцій $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ та $\tilde{\mu}'_\pi(\mathbf{r})$, які $\forall\mathbf{r}\in(V)\cup(\Sigma)$ належать класу $\mathbb{C}^{(2)}$, $\forall\mathbf{r}\in(V)$ задовольняють систему стаціонарних диференціальних рівнянь (25), (26); $\forall\mathbf{r}\in(V)\cup(\Sigma)$ — співвідношення

Коші (14), рівняння стану (21), (22), і граничні умови: $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^a \quad \forall \mathbf{r} \in (\Sigma_\sigma)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}^a \quad \forall \mathbf{r} \in (\Sigma_u)$, $(\Sigma_\sigma) \bigcup (\Sigma_u) = (\Sigma)$, $\tilde{\mu}'_\pi = \mu'_{\pi a} \quad \forall \mathbf{r} \in (\Sigma)$.

Д о в е д е н н я. Приймемо, що існує дві системи шуканих функцій $\mathbf{u}_1(\mathbf{r})$, $\tilde{\mu}'_{\pi 1}(\mathbf{r})$ та $\mathbf{u}_2(\mathbf{r})$, $\tilde{\mu}'_{\pi 2}(\mathbf{r})$. З огляду на лінійність системи рівнянь (25), (26), функції $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ й $\tilde{\mu}'_\pi = \tilde{\mu}'_{\pi 1} - \tilde{\mu}'_{\pi 2}$ задовольнятимуть рівняння (26), однорідне диференціальне рівняння

$$\left(K + \frac{1}{3} G - \frac{K^2 \alpha_\rho^2}{\rho_0 d_\rho} \right) \boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) + G \Delta \mathbf{u} - K \frac{\alpha_\rho}{d_\rho} \boldsymbol{\nabla} \tilde{\mu}'_\pi = 0$$

і однорідні крайові умови

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in (\Sigma_\sigma), \quad \mathbf{u} = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in (\Sigma_u), \ (\Sigma_\sigma) \bigcup (\Sigma_u) = (\Sigma),$$
$$\tilde{\mu}'_\pi = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in (\Sigma). \tag{30}$$

У поданні (20) для вільної енергії врахуємо рівняння стану (21), (22). Отримаємо

$$f - f_0 = \frac{1}{2} \mu'_{\pi 0} \rho_m + \frac{1}{2\rho_0} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \hat{\boldsymbol{e}} + \frac{1}{2} \rho_m \mu'_\pi + \frac{1}{2} \boldsymbol{\pi}_m \cdot (\boldsymbol{\nabla} \mu'_\pi). \tag{31}$$

У формулі (31) врахуємо співвідношення Коші (14) і рівняння рівноваги (29). У результаті нескладних перетворень запишемо

$$\frac{1}{\rho_0} \left(K - \frac{2}{3} G \right) I_1^2 + \frac{2G}{\rho_0} I_2 + d_\rho \rho_m^2 - \frac{2K\alpha_\rho}{\rho_0} I_1 \rho_m + \frac{1}{\chi_m} \boldsymbol{\pi}_m^2 =$$
$$= \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{F}_* \cdot \mathbf{u} + \chi_m (\boldsymbol{\nabla} \mu'_\pi)^2 - \mu'_{\pi 0} \rho_m + \rho_m \mu'_\pi .$$

Звідси, з огляду на формулу $\rho_m (\mu'_\pi - \mu'_{\pi 0}) + \chi_m (\boldsymbol{\nabla} \mu'_\pi)^2 = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\pi}_m \tilde{\mu}'_\pi)$, одержимо

$$\left(K - \frac{2}{3} G \right) I_1^2 + 2G I_2 + \rho_0 d_\rho \rho_m^2 - 2K\alpha_\rho I_1 \rho_m + \frac{\rho_0}{\chi_m} \boldsymbol{\pi}_m^2 =$$
$$= \boldsymbol{\nabla} \cdot (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* \cdot \mathbf{u}) + \rho_0 \mathbf{F}_* \cdot \mathbf{u} - \rho_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\pi}_m \tilde{\mu}'_\pi).$$

Інтегруємо отриманий вираз по об'єму, що займає тіло. За врахування формули Остроградського-Гаусса [15] запишемо

$$\int\limits_{(V)} \left[\left(K - \frac{2}{3} G \right) I_1^2 + 2G I_2 + \rho_0 d_\rho \rho_m^2 - 2K\alpha_\rho I_1 \rho_m + \frac{\rho_0}{\chi_m} \boldsymbol{\pi}_m^2 \right] dV =$$
$$= \int\limits_{(\Sigma)} \boldsymbol{\sigma}_{*\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} \, d\Sigma + \rho_0 \int\limits_{(V)} \mathbf{F}_* \cdot \mathbf{u} \, dV - \rho_0 \int\limits_{(\Sigma)} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\pi}_m \tilde{\mu}'_\pi \, d\Sigma . \tag{32}$$

Оскільки у задачі, яку розглядаємо тут, масові сили відсутні ($\mathbf{F}_* = 0$), то наслідком формул (32) та (30) є

$$\int_{(V)} \left[\left(K - \frac{2}{3} G \right) I_1^2 + 2GI_2 + \rho_0 d_\rho \rho_m^2 - 2K\alpha_\rho I_1 \rho_m + \frac{\rho_0}{\chi_m} \boldsymbol{\pi}_m^2 \right] dV = 0.$$

За умови, що $K - \frac{2}{3}G - \frac{K^2 \alpha_\rho^2}{\rho_0 d_\rho} > 0$, з отриманої рівності в силу невід'ємної визначеності квадратичної форми підінтегрального виразу маємо: $\hat{\boldsymbol{e}} = 0$ і $\rho_m = 0$. З огляду на рівняння стану отримаємо також, що $\tilde{\mu}'_\pi = 0$. Таким чином, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ і $\tilde{\mu}'_{\pi 1} = \tilde{\mu}'_{\pi 2}$, що і слід було довести.

Висновки. З використанням методів нерівноважної термодинаміки одержано замкнену систему рівнянь нелокальної теорії деформації термопружного твердого тіла, що враховує вплив локального зміщення маси на механічні і теплові поля. Показано, що наслідком врахування локального зміщення маси є: (1) розширення фазового простору параметрів стану двома додатковими парами спряжених параметрів стану, які надають цій теорії статусу нелокальної; (2) модифікація тензора напружень; (3) виникнення у рівнянні балансу імпульсу механічного поступального руху додаткової нелінійної масової сили; (4) наявність у розв'язувальній системі додаткового балансового типу диференціального рівняння, якому підпорядковані величини, пов'язані із локальним зміщенням маси. Для лінеаризованого наближення показано, що сформульовані у роботі стаціонарні крайові задачі математичної фізики мають єдиний розв'язок.

Література

[1] *Kröner E.* Elasticity theory of materials with long range cohesive forces // Inc. J. Solids Structures. — 1967. — Vol. 3. — P. 731-742.
[2] *Кунин И. А.* Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости. — Москва: Наука, 1975. — 416 с.
[3] *Engelbrecht J., Braun M.* Nonlinear waves in nonlocal media // Appl. Mech. Rev. — 1998. — Vol. 51, Issue 8. — P. 475-488.
[4] Multiscale modelling of nanomechanics and micromechanics: an overview / *N. M. Ghoniemy, E. P. Busso, N. Kioussis, H. Huang* // Philosophical Magazine. — 2003. — Vol. 83, Nos. 31-34. — P. 3475-3528.
[5] *Papenfuss Ch., Forest S.* Thermodynamical frameworks for higher grade material theories with internal variables or additional degrees of freedom // J. Non-Equlib. Thermodyn. — 2006. — Vol. 31. — P. 319-353.
[6] *Mindlin R. D.* Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity // Int. J. Solids Structures. — 1965. — Vol. 1. — P. 417-438.
[7] *Eringen A. C.* Linear theory of micropolar elasticity // J. Math. Mech. — 1966. — Vol. 16 (6). — P. 909-923.
[8] *Бурак Я. Й.* Визначальні співвідношення локально-градієнтної термомеханіки // Доп. АН УССР. Сер. А. — 1987. — № 12. — С. 19-23.

[9] *Нагірний Т., Грицина О., Червінка К.* Локально-градієнтний підхід у термомеханіці // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2006. — Вип. 3. — С. 72-83.

[10] Математичне моделювання термомеханічних процесів у пружних тілах із врахуванням локального зміщення маси / *Я. Й. Бурак, Є. Я. Чапля, В. Ф. Кондрат, О. Р. Грицина* // Доп. НАН України. — 2007. – № 4. — С. 45-49.

[11] *Бурак, Я. Й., Нагірний Т. С.* Теоретичні основи розрахунку локально-градієнтних термомеханічних систем з врахуванням поверхневих явищ // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 1993. — № 4. — С. 24-30.

[12] *Нагірний, Т. С., Червінка К. А.* Модель термопружного твердого тіла з урахуванням ефектів локальної градієнтності та тензорного характеру хімічного потенціалу // Доп. НАН України. — 2000. — № 2. — С. 50-53.

[13] *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. — Москва: Мир, 1964. — 456 с.

[14] *Новацкий, В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. — Москва: Мир, 1984. — 159 с.

[15] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). — Москва: Наука, 1974. — 832 с.

[16] *Новацкий, В.* Теория упругости. — Москва: Мир, 1975. — 872 с.

The boundary problems of nonlocal thermoelasticity with local mass displacement

Olha Hrytsyna

Using the approaches and methods of nonequilibrium thermodynamics and solid mechanics, a complete system of equations of nonlocal theory of deformation of thermoelastical solids is formulated. This theory takes into account the interrelation of deformation processes, thermal conductivity, and local mass displacement, with which the material structure changes of a fixed small element are associated. The mathematical physics' value-boundar- problems corresponding to this non-local theory were formulated. The uniqueness theorem of the solution of the stationary problems of mechanics, which takes into account the effect of the local mass displacement on mechanical fields, is proved for linearized approximation.

Краевые задачи нелокальной термоупругости с учетом локального смещения массы

Ольга Грицина

С использованием подходов и методов неравновесной термодинамики и механики сплошной среды сформулирована полная система уравнений нелокального типа математической модели термоупругого твердого тела, учитывающая взаимосвязь процессов деформирования, теплопроводности и локального смещения массы, с которым связывают изменения структуры материала в пределах физически малого элемента тела. Дана постановка соответствующих модельному описанию краевых задач математической физики. Для линеаризованного приближения доказана теорема единственности решения стационарных задач механики, учитывающих влияние локального смещения массы на механические поля.

Представлено доктором технічних наук Я. П'янилом

Отримано 13.05.15