

Варіаційний метод однорідних розв'язків у осесиметричній задачі теорії пружності для кусково-однорідного циліндра

Василь Чекурін¹, Леся Постолак²

¹ д.ф.-м.н., професор, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, Україна, e-mail: v.chekurin@gmail.com

² к.ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, Україна

Варіаційний метод однорідних розв'язків застосовано для розв'язування осесиметричних задач теорії пружності для кусково-однорідного пружного циліндра за заданих на межі з'єднання стрибків напружень та переміщень. В основі цього методу лежить подання функції Лява, яка задовольняє бігармонічне рівняння, у вигляді розв'язування за повними системами власних функцій осесиметричної задачі теорії пружності для півбезмежного циліндра з ненавантаженою бічною поверхнею. Реалізація методу зводить задачу до безмежної системи алгебраїчних рівнянь, яку розв'язували методом редукції. На конкретному прикладі показано збіжність числового розв'язку задачі. Як приклад застосування отриманого розв'язку досліджено концентрацію напружень в околі з'єднання двох різнорідних циліндричних тіл за одновісного розтягу.

Ключові слова: кусково-однорідний циліндр, осесиметричні задачі, функція Лява, варіаційний метод однорідних розв'язків

Вступ. Для отримання аналітичних розв'язків осесиметричних задач теорії пружності для циліндричних тіл використовували методи сингулярних інтегральних рівнянь [1], розклад в ряди Фур'є — Бесселя [2], перехресної суперпозиції [3], інтегральних перетворень [4], метод прямого інтегрування [5].

Варіаційний метод однорідних розв'язків [6] базується на використанні повних систем функцій, які є розв'язками осесиметричної задачі для півбезмежного циліндра з ненавантаженою бічною поверхнею. Відомі його реалізації з використанням представлення Папковича-Нейбера для півбезмежного циліндра [6, 7]. Використання функції Лява приводить до мішаних бігармонічних задач [8]. Їхнє дослідження з використанням варіаційного методу однорідних розв'язків для півбезмежного та скінченного циліндрів подано в публікаціях [8, 9]. Варіаційний метод однорідних розв'язків для бігармонічних задач був застосований раніше у плоских задачах теорії пружності. Зокрема, у статті [10] розглянута плоска задача теорії пружності для безмежної смуги, що складається із двох різнорідних півбезмежних смуг.

Метою цієї статті є застосування варіаційного методу однорідних розв'язків до розв'язування осесиметричної задачі теорії пружності для кусково-однорідного циліндра з ненавантаженою бічною поверхнею та застосування отриманого розв'язку для дослідження концентрації напружень в околі контакту різномірних матеріалів.

1. Формулювання задачі

Розглянемо вільний від навантажень кусково-однорідний циліндр $\mathcal{V} = (0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty \leq \zeta \leq \infty)$, що складається із двох різномірних півбезмежних циліндрів $\mathcal{V}^{(1)} = (0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \zeta > 0)$ та $\mathcal{V}^{(2)} = (0 \leq \xi \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \zeta < 0)$, з'єднаних торцями. Модулі Юнга та коефіцієнти Пуассона складеного циліндра є кусково-постійні функції координати ζ :

$$E = \begin{cases} E^{(1)}, & \zeta > 0 \\ E^{(2)}, & \zeta < 0 \end{cases}, \quad \nu = \begin{cases} \nu^{(1)}, & \zeta > 0 \\ \nu^{(2)}, & \zeta < 0 \end{cases}.$$

У циліндрі діють осесиметричні напруження, зумовлені несумісністю деформацій на межі $\mathcal{S} = (0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \zeta = 0)$, де виконуються умови контакту: $[\sigma_{zz}(\xi, 0)] = \sigma(\xi)$, $[\sigma_{rz}(\xi, 0)] = \tau(\xi)$, $[u_z(\xi, 0)] = u(\xi)$, $[u_r(\xi, 0)] = v(\xi)$. (1)

Тут квадратними дужками позначені стрибки відповідних функцій на межі \mathcal{S} , $\sigma(\xi)$, $\tau(\xi)$, $u(\xi)$, $v(\xi)$ — задані функції. Функція $\sigma(\xi)$ задовольняє умову самозрівноваження $\int_0^1 \xi \sigma(\xi) d\xi = 0$.

Рівняння рівноваги в переміщеннях мають наступний вигляд [11]:

$$\begin{cases} \left(\nabla^2 - \frac{1}{\xi^2} \right) u_r + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial e}{\partial \xi} = 0, \\ \nabla^2 u_z + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial e}{\partial \zeta} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{де } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}, \quad e = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial \zeta}.$$

Компоненти напружень σ_{rr} та σ_{rz} на бічній поверхні циліндра ($\xi = 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < \zeta < \infty$) задовольняють умови ненавантаження:

$$\sigma_{rr}|_{\xi=1} = 0, \quad \sigma_{rz}|_{\xi=1} = 0. \quad (3)$$

Компоненти напружень σ_{rr} , σ_{rz} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} та деформацій ε_{rr} , ε_{rz} , $\varepsilon_{\theta\theta}$, ε_{zz} змагають до нуля, коли $\zeta \rightarrow \pm\infty$.

Використовуючи функцію Лява χ зводимо систему (2) до рівняння

$$\nabla^2 \nabla^2 \chi = 0, \quad (4)$$

а граничні умови (3) до вигляду

$$\left. \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\nu \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial \zeta^2} \right) \right|_{\zeta=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \left((1-\nu) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial \zeta^2} \right) \right|_{\zeta=1} = 0. \quad (5)$$

Таким чином, для визначення напружень в кусково-однорідному циліндрі необхідно розв'язати бігармонічне рівняння (4) і підпорядкувати отриманий розв'язок крайовим умовам (5) та умовам стрибка (1). В термінах функції χ умови (1) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \left[2\mu \frac{\partial}{\partial \zeta} \left((2-\nu) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial \zeta^2} \right) \right]_{\zeta=0} &= \sigma(\xi), \quad \left[2\mu \frac{\partial}{\partial \xi} \left((1-\nu) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial \zeta^2} \right) \right]_{\zeta=0} = \tau(\xi), \\ \left[-\frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi \partial \zeta} \right]_{\zeta=0} &= \nu(\xi), \quad \left[\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial \zeta^2} + 2(1-\nu) \nabla^2 \chi \right) \right]_{\zeta=0} = u(\xi). \end{aligned} \quad (6)$$

2. Подання розв'язку

Шукану функцію $\chi(\xi, \zeta)$ представимо у вигляді розвинення за повними системами розв'язків бігармонічної задачі для півбезмежного циліндра з ненавантаженою бічною поверхнею (так званих однорідних розв'язків) [9]. Щоб задовольнити загасання розв'язку в безмежно віддалених точках $\zeta \rightarrow \pm\infty$ подамо його у вигляді:

$$\chi = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(L_k^{(1)} \exp(-\gamma_k^{(1)} \zeta) f_k^{(1)}(\xi) + \bar{L}_k^{(1)} \exp(-\bar{\gamma}_k^{(1)} \zeta) \bar{f}_k^{(1)}(\xi) \right), & \zeta > 0 \\ \frac{1}{2} \sum_{p=1}^2 \left(L_k^{(2)} \exp(\gamma_k^{(2)} \zeta) f_k^{(2)}(\xi) + \bar{L}_k^{(2)} \exp(\bar{\gamma}_k^{(2)} \zeta) \bar{f}_k^{(2)}(\xi) \right), & \zeta < 0 \end{cases} \quad (7)$$

Тут $L_k^{p(\lambda)}$ ($\lambda=1, 2$) — невідомі комплексні коефіцієнти, $L_k^{1(\lambda)} = L_k^{(\lambda)}$, $L_k^{2(\lambda)} = \bar{L}_k^{(\lambda)}$, $f_k^{1(\lambda)}(\xi) = f_k^{(\lambda)}(\xi)$, $f_k^{2(\lambda)}(\xi) = \bar{f}_k^{(\lambda)}(\xi)$, $\gamma_k^{1(\lambda)} = \gamma_k^{(\lambda)}$, $\gamma_k^{2(\lambda)} = \bar{\gamma}_k^{(\lambda)}$.

Функція $f_k^{(\lambda)}(\xi)$ має вигляд

$$f_k^{(\lambda)}(\xi) = \xi J_1(\gamma_k^{(\lambda)} \xi) \kappa_k^{(\lambda)} - \frac{2}{\pi \gamma_k^{(\lambda)}} J_0(\gamma_k^{(\lambda)} \xi), \quad (8)$$

де $\gamma_k^{(\lambda)}$ — корені трансцендентного рівняння

$$\left(\gamma_k^{(\lambda)}\right)^2 \left(J_0^2(\gamma_k^{(\lambda)}) + J_1^2(\gamma_k^{(\lambda)})\right) + \left(2\nu^{(\lambda)} - 2\right) J_1^2(\gamma_k^{(\lambda)}) = 0. \quad (9)$$

У формулі (8) використано позначення

$$\kappa_k^{(\lambda)} = \frac{2J_1(\gamma_k^{(\lambda)})}{\pi \left(\left(2\nu^{(\lambda)} - 2\right) J_1(\gamma_k^{(\lambda)}) - \gamma_k^{(\lambda)} J_0(\gamma_k^{(\lambda)}) \right)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для кожного λ маємо повну систему $\left\{ \chi_k^{(\lambda)}, k = 1, 2, \dots \right\}$ однорідних комплексних розв'язків осесиметричної задачі для півбезмежного циліндра [9]

$$\chi_k^{(1)} = \exp\left(-\gamma_k^{(1)} \zeta\right) f_k^{(1)}(\xi), \quad \zeta > 0, \quad \chi_k^{(2)} = \exp\left(\gamma_k^{(2)} \zeta\right) f_k^{(2)}(\xi), \quad \zeta < 0.$$

Використовуючи подання компонент напружень та переміщень через функцію Лява [7, 9], отримуємо формули, які виражають їх через корені трансцендентних рівнянь (9):

$$\sigma_{rr}^{(\lambda)}(\xi, \zeta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(L_k \exp\left((-1)^{\lambda} \gamma_k^{(\lambda)}\right) \sigma_{krr}^{(\lambda)}(\xi) + \bar{L}_k \exp\left((-1)^{\lambda} \bar{\gamma}_k^{(\lambda)}\right) \bar{\sigma}_{krr}^{(\lambda)}(\xi) \right), \quad (10)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(\lambda)}(\xi, \zeta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(L_k \exp\left((-1)^{\lambda} \gamma_k^{(\lambda)}\right) \sigma_{k\theta\theta}^{(\lambda)}(\xi) + \bar{L}_k \exp\left((-1)^{\lambda} \bar{\gamma}_k^{(\lambda)}\right) \bar{\sigma}_{k\theta\theta}^{(\lambda)}(\xi) \right), \quad (11)$$

$$\sigma_{zz}^{(\lambda)}(\xi, \zeta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(L_k \exp\left((-1)^{\lambda} \gamma_k^{(\lambda)}\right) \sigma_{kzz}^{(\lambda)}(\xi) + \bar{L}_k \exp\left((-1)^{\lambda} \bar{\gamma}_k^{(\lambda)}\right) \bar{\sigma}_{kzz}^{(\lambda)}(\xi) \right), \quad (12)$$

$$\sigma_{rz}^{(\lambda)}(\xi, \zeta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(L_k \exp\left((-1)^{\lambda} \gamma_k^{(\lambda)}\right) \sigma_{krz}^{(\lambda)}(\xi) + \bar{L}_k \exp\left((-1)^{\lambda} \bar{\gamma}_k^{(\lambda)}\right) \bar{\sigma}_{krz}^{(\lambda)}(\xi) \right), \quad (13)$$

$$u_z^{(\lambda)}(\xi, \zeta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(L_k \exp\left((-1)^{\lambda} \gamma_k^{(\lambda)}\right) u_{kz}^{(\lambda)}(\xi) + \bar{L}_k \exp\left((-1)^{\lambda} \bar{\gamma}_k^{(\lambda)}\right) \bar{u}_{kz}^{(\lambda)}(\xi) \right), \quad (14)$$

$$u_r^{(\lambda)}(\xi, \zeta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(L_k \exp\left((-1)^{\lambda} \gamma_k^{(\lambda)}\right) u_{kr}^{(\lambda)}(\xi) + \bar{L}_k \exp\left((-1)^{\lambda} \bar{\gamma}_k^{(\lambda)}\right) \bar{u}_{kr}^{(\lambda)}(\xi) \right). \quad (15)$$

Тут використані позначення для базисних функцій компонент напружень

$$\sigma_{krr}^{(\lambda)}(\xi) = 2\mu^{(\lambda)} \left(\gamma_k^{(\lambda)}\right)^2 \left[\kappa_k^{(\lambda)} \left(\left(1 - 2\nu^{(\lambda)}\right) J_0(\gamma_k^{(\lambda)} \xi) - \xi \gamma_k^{(\lambda)} J_1(\gamma_k^{(\lambda)} \xi) \right) + \frac{1}{\pi \gamma_k^{(\lambda)} \xi} \left(2\xi \gamma_k^{(\lambda)} J_0(\gamma_k^{(\lambda)} \xi) - 2J_1(\gamma_k^{(\lambda)} \xi) \right) \right],$$

$$\sigma_{k\theta\theta}^{(\lambda)}(\xi) = 2\mu^{(\lambda)} \gamma_k^{(\lambda)} \left[\left(1 - 2\nu^{(\lambda)}\right) \gamma_k^{(\lambda)} \kappa_k^{(\lambda)} J_0(\gamma_k^{(\lambda)} \xi) + 2J_1(\gamma_k^{(\lambda)} \xi) \right] / (\pi \xi),$$

$$\sigma_{kzz}^{(\lambda)}(\xi) = 2\mu^{(\lambda)}\left(\gamma_k^{(\lambda)}\right)^2 \left[\kappa_k^{(\lambda)} \left(2\left(\nu^{(\lambda)} - 2\right) J_0\left(\gamma_k^{(\lambda)}\xi\right) + \gamma_k^{(\lambda)} \xi J_1\left(\gamma_k^{(\lambda)}\xi\right) \right) - \frac{2}{\pi} J_0\left(\gamma_k^{(\lambda)}\xi\right) \right],$$

$$\sigma_{krz}^{(\lambda)}(\xi) = 2\mu^{(\lambda)}\left(\gamma_k^{(\lambda)}\right)^2 \left[\kappa_k^{(\lambda)} \left(2\left(\nu^{(\lambda)} - 1\right) J_1\left(\gamma_k^{(\lambda)}\xi\right) - \xi \gamma_k^{(\lambda)} J_0\left(\gamma_k^{(\lambda)}\xi\right) \right) - \frac{2}{\pi} J_1\left(\gamma_k^{(\lambda)}\xi\right) \right],$$

та переміщень

$$u_{kz}^{(\lambda)}(\xi) = \kappa_k^{(\lambda)} \left(\left(\gamma_k^{(\lambda)}\right)^2 \xi J_1\left(\gamma_k^{(\lambda)}\xi\right) + 4\left(1 - \nu^{(\lambda)}\right) \gamma_k^{(\lambda)} J_0\left(\gamma_k^{(\lambda)}\xi\right) \right) - \frac{2}{\pi} \gamma_k^{(\lambda)} J_0\left(\gamma_k^{(\lambda)}\xi\right),$$

$$u_{kr}^{(\lambda)}(\xi) = \gamma_k^{(\lambda)} \left(\kappa_k^{(\lambda)} \gamma_k^{(\lambda)} \xi J_0\left(\gamma_k^{(\lambda)}\xi\right) + \frac{2}{\pi} J_1\left(\gamma_k^{(\lambda)}\xi\right) \right),$$

$\mu^{(\lambda)} = E^{(\lambda)} / 2\left(1 + \nu^{(\lambda)}\right)$ — модуль зсуву матеріалу для правого та лівого циліндрів.

Функції $\chi_k^{(\lambda)}$ задовольняють умови (5), тож для знаходження розв'язку їх слід підпорядкувати лише умовам (6), вибираючи відповідним чином послідовності комплексних коефіцієнтів $L_k^{(\lambda)}$ ($\lambda = 1, 2$).

3. Варіаційний метод розв'язування задачі

Підпорядкуємо розв'язок (7) умовам (6), застосовуючи варіаційним підхід [9, 10]. Для цього введемо функціонал:

$$F = \int_0^1 \left[\left(\sigma_{zz}^{(1)} \Big|_{\zeta=0} - \sigma_{zz}^{(2)} \Big|_{\zeta=0} - \sigma(\xi) \right)^2 + \left(\sigma_{rz}^{(1)} \Big|_{\zeta=0} - \sigma_{rz}^{(2)} \Big|_{\zeta=0} - \tau(\xi) \right)^2 \right] \xi d\xi + \\ + \int_0^1 \left[\left(u_z^{(1)} \Big|_{\zeta=0} - u_z^{(2)} \Big|_{\zeta=0} - u(\xi) \right)^2 + \left(u_r^{(1)} \Big|_{\zeta=0} - u_r^{(2)} \Big|_{\zeta=0} - \nu(\xi) \right)^2 \right] \xi d\xi, \quad (16)$$

який визначає середньо квадратичне відхилення розв'язку на межі \mathcal{S} від заданих умов (1).

Підставляючи подання (12)-(15) у функціонал (16) та застосовуючи до нього необхідні умови мінімуму

$$\frac{\partial F}{\partial L_m^{(1)}} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial L_m^{(2)}} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{L}_m^{(1)}} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{L}_m^{(2)}} = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

приходимо до безмежної системи лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно невизначених комплексних сталих $L_k^{(\lambda)}$, $\bar{L}_k^{(\lambda)}$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} \left(M_{mk}^{11(11)} L_k^{(1)} + M_{mk}^{11(12)} L_k^{(2)} + M_{mk}^{12(11)} \bar{L}_k^{(1)} + M_{mk}^{12(12)} \bar{L}_k^{(2)} \right) &= K_m^{1(1)} \\
 \sum_{k=1}^{\infty} \left(M_{mk}^{11(21)} L_k^{(1)} + M_{mk}^{11(22)} L_k^{(2)} + M_{mk}^{12(21)} \bar{L}_k^{(1)} + M_{mk}^{12(22)} \bar{L}_k^{(2)} \right) &= K_m^{1(2)} \\
 \sum_{k=1}^{\infty} \left(M_{mk}^{21(11)} L_k^{(1)} + M_{mk}^{21(12)} L_k^{(2)} + M_{mk}^{22(11)} \bar{L}_k^{(1)} + M_{mk}^{22(12)} \bar{L}_k^{(2)} \right) &= K_m^{2(1)} \\
 \sum_{k=1}^{\infty} \left(M_{mk}^{21(21)} L_k^{(1)} + M_{mk}^{21(22)} L_k^{(2)} + M_{mk}^{22(21)} \bar{L}_k^{(1)} + M_{mk}^{22(22)} \bar{L}_k^{(2)} \right) &= K_m^{2(2)}
 \end{aligned} \tag{17}$$

коефіцієнти якої $M_{mk}^{sp(\lambda, \mu)}$ та $K_m^{s(\lambda)}$ ($s, p = 1, 2; \lambda, \mu = 1, 2; m = 1, 2, \dots$) виражаються формулами:

$$\begin{aligned}
 M_{mk}^{sp(\lambda, \mu)} &= \frac{(-1)^{\lambda+\mu}}{2} \int_0^1 \left(\sigma_{mzz}^{s(\lambda)} \sigma_{kzz}^{p(\mu)} + \sigma_{mrz}^{s(\lambda)} \sigma_{krz}^{p(\mu)} + u_{mr}^{s(\lambda)} u_{kr}^{p(\mu)} + u_{mz}^{s(\lambda)} u_{kz}^{p(\mu)} \right) \xi d\xi + \\
 &+ (-1)^{\lambda+\mu+1} \int_0^1 u_{mz}^{s(\lambda)} \xi d\xi \int_0^1 u_{kz}^{p(\mu)} \xi d\xi
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 K_m^{s(\lambda)} &= (-1)^{\lambda+1} \int_0^1 \left(\sigma(\xi) \sigma_{mzz}^{s(\lambda)} + \tau(\xi) \sigma_{mrz}^{s(\lambda)} + \nu(\xi) u_{mr}^{s(\lambda)} + u(\xi) u_{mz}^{s(\lambda)} \right) \xi d\xi + \\
 &+ (-1)^{\lambda} \int_0^1 u(\xi) \xi d\xi \int_0^1 u_{mz}^{s(\lambda)} \xi d\xi
 \end{aligned} \tag{19}$$

У формулах (18), (19) для спрощення запису використано позначення:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{mzz}^{1(\lambda)} &= \sigma_{mzz}^{(\lambda)}(\xi), \quad \sigma_{mzz}^{2(\lambda)} = \bar{\sigma}_{mzz}^{(\lambda)}(\xi), \quad \sigma_{mrz}^{1(\lambda)} = \sigma_{mrz}^{(\lambda)}(\xi), \quad \sigma_{mrz}^{2(\lambda)} = \bar{\sigma}_{mrz}^{(\lambda)}(\xi), \\
 \sigma_{kzz}^{1(\lambda)} &= \sigma_{kzz}^{(\lambda)}(\xi), \quad \sigma_{kzz}^{2(\lambda)} = \bar{\sigma}_{kzz}^{(\lambda)}(\xi), \quad \sigma_{krz}^{1(\lambda)} = \sigma_{krz}^{(\lambda)}(\xi), \quad \sigma_{krz}^{2(\lambda)} = \bar{\sigma}_{krz}^{(\lambda)}(\xi), \\
 u_{mr}^{1(\lambda)} &= u_{mr}^{(\lambda)}(\xi), \quad u_{mr}^{2(\lambda)} = \bar{u}_{mr}^{(\lambda)}(\xi), \quad u_{mz}^{1(\lambda)} = u_{mz}^{(\lambda)}(\xi), \quad u_{mz}^{2(\lambda)} = \bar{u}_{mz}^{(\lambda)}(\xi), \\
 u_{kr}^{1(\lambda)} &= u_{kr}^{(\lambda)}(\xi), \quad u_{kr}^{2(\lambda)} = \bar{u}_{kr}^{(\lambda)}(\xi), \quad u_{kz}^{1(\lambda)} = u_{kz}^{(\lambda)}(\xi), \quad u_{kz}^{2(\lambda)} = \bar{u}_{kz}^{(\lambda)}(\xi).
 \end{aligned}$$

Методи аналізу та розв'язування безмежних систем виду (17) наведені, зокрема, в монографії [12]. За знайденим розв'язком цієї системи, використовуючи формули (10)-(15), можна обчислити компоненти напружень та переміщень у складеному циліндрі.

4. Чисельне дослідження розв'язку задачі

Щоб дослідити кількісно задачу (2), (1), (3) застосуємо для розв'язування системи (17) метод редукції [12], зберігаючи у розвиненнях (12)-(15) скінченне число N доданків ($k = 1, 2, \dots, N$). Трансцендентне рівняння (9) розв'язуємо чисельно шляхом мінімізації нев'язки [6, 9]. Обчислення проводимо для випадку

скло-керамічного пружного циліндра, для якого $E^{(1)} = 70$ ГПа, $\nu^{(1)} = 0.23$ (скло),
 $E^{(2)} = 380$ ГПа, $\nu^{(2)} = 0.25$ (алюміна Al_2O_3).

Перші 15 значень дійсної $\alpha_k^{(\lambda)} = \text{Re}(\gamma_k^{(\lambda)})$ та уявної $\beta_k^{(\lambda)} = \text{Im}(\gamma_k^{(\lambda)})$ частин коренів рівняння (9) для скла та кераміки, заокруглених до п'яти значущих цифр, подані у таблицях 1 та 2 відповідно.

Таблиця 1

k	$\alpha_k^{(1)}$	$\beta_k^{(1)}$	k	$\alpha_k^{(1)}$	$\beta_k^{(1)}$	k	$\alpha_k^{(1)}$	$\beta_k^{(1)}$
1	2.68754	1.36936	6	18.75798	2.16608	11	34.50321	2.46624
2	6.04765	1.63832	7	21.91092	2.24214	12	37.64875	2.50951
3	9.25904	1.82863	8	25.06123	2.30820	13	40.79373	2.54934
4	12.43681	1.96749	9	28.20973	2.36658	14	43.93826	2.58624
5	15.60091	2.07647	10	31.35695	2.41888	15	47.08242	2.62061

Таблиця 2

k	$\alpha_k^{(2)}$	$\beta_k^{(2)}$	k	$\alpha_k^{(2)}$	$\beta_k^{(2)}$	k	$\alpha_k^{(2)}$	$\beta_k^{(2)}$
1	2.69765	1.36735	6	18.75905	2.16604	11	34.50379	2.46622
2	6.05122	1.63814	7	21.91184	2.24211	12	37.64928	2.50949
3	9.26127	1.82853	8	25.06203	2.30817	13	40.79422	2.54932
4	12.43844	1.96742	9	28.21044	2.36656	14	43.93871	2.58623
5	15.60220	2.07642	10	31.35758	2.41886	15	47.08284	2.62059

Досліджуємо напружено-деформований стан циліндра, зумовлений стрибками переміщень на поверхні з'єднання S , приймаючи

$$\sigma(\xi) = 0, \tau(\xi) = 0, u(\xi) = 0, v(\xi) = a\xi, \quad (20)$$

де a — безрозмірна стала.

Відносну похибку отриманого розв'язку, залежно від розмірності $4N \times 4N$ редукованої системи (17), оцінюємо за значенням функціоналу (16), обчисленого на розв'язку, отриманому для вибраного N : $\varepsilon = (F/4)^{1/2}/a$. Залежність похибки ε від N наведена у таблиці 3.

Таблиця 3

N	2	4	6	8	10	12	14
ε	0.04594	0.02514	0.01665	0.01197	0.00919	0.00741	0.00620

Як бачимо, вже при $N = 10$, похибка ε , яка визначає середньоквадратичне відхилення отриманого розв'язку від умов (1), заданих на межі контакту циліндрів S , менша одного відсотка.

Рисунки 1, 2 ілюструють як стрибки компонент напружень та переміщень на поверхні контакту S змагають до заданих функцій (20) зі зростанням N . Тут наведені залежності нормованих значень стрибків напружень $\Delta\sigma_{zz} = (\sigma_{zz}^{(1)} - \sigma_{zz}^{(2)}) / (\mu a)$, $\mu = (\mu^{(1)} + \mu^{(2)}) / 2$ та переміщень $\Delta u_z = (u_z^{(1)} - u_z^{(2)}) / a$, на поверхні контакту S від координати ξ за різних $N = 3, 5, 8$ (криві 1, 2, 3 відповідно). Криві 4, які розраховані для $N = 15$, збігаються із графіком заданих функцій $\sigma(\xi)$ та $v(\xi)$.

Поведінку компонент напружень та переміщень в околі контакту різномірних матеріалів ілюструють криві на рис. 3 — 5, обчислені для $N = 15$. На рис. 3 та 4 наведені залежності напружень $\sigma_{rr}^{(\lambda)} / (\mu a)$ та $\sigma_{\theta\theta}^{(\lambda)} / (\mu a)$ від осьової координати ζ за різних значень радіальної координати $\xi = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ (криві 1 — 5 відповідно).

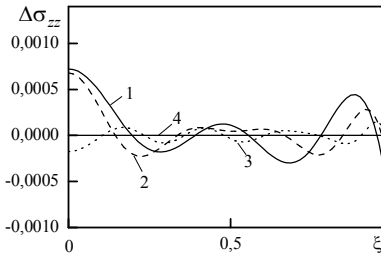


Рис. 1

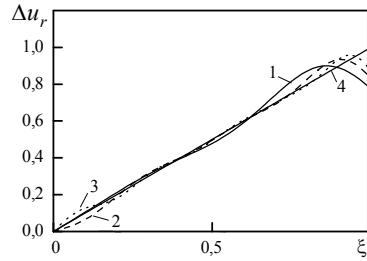


Рис. 2

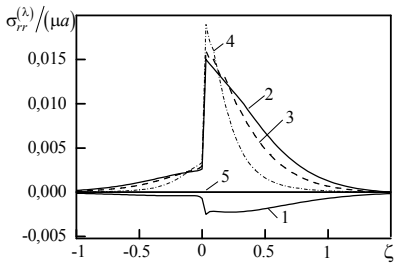


Рис. 3

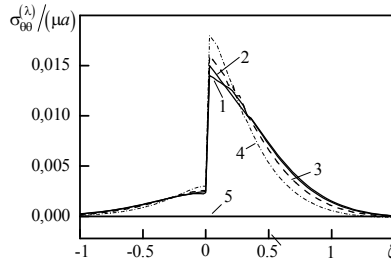


Рис. 4

На рис. 5 наведений графік переміщень $u_r^{(\lambda)} / a$ за різних $\xi = 0.25, 0.5, 0.75, 1$ (криві 1 — 4 відповідно) в залежності від ζ . На рис. 6 для прикладу наведена залежність нормованих компонент напружень $\sigma_{zz}^{(1)} / (\mu a)$ від координати ξ за різних відстаней від межі з'єднання двох півбезмежних циліндрів $\zeta = 0.25, 0.5, 0.75$ (криві 1-3 відповідно).

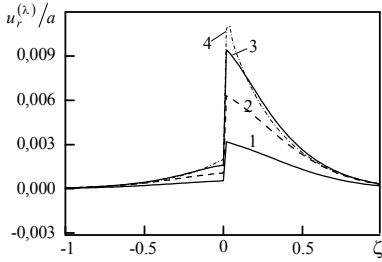


Рис. 5

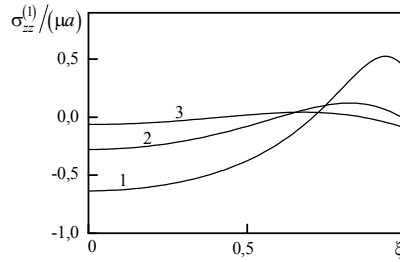


Рис. 6

З числових результатів бачимо, що напруження швидко згасають з віддаленням від торцевої поверхні циліндра і вже на відстані $\zeta=1$ вони практично дорівнюють нулю. Тому отримані розв'язки з достатньою точністю можна використовувати для скінченних кусково-однорідних циліндричних тіл, довжина кожної із складових яких є більша за їхній радіус.

5. Приклад. Концентрація напружень за одновісного розтягу

Застосуємо отриманий розв'язок для дослідження напружень у кусково-однорідному циліндрі радіуса $r=1$ за умов одновісного розтягу. Для цього розв'язок задачі пружної рівноваги такого циліндра подамо у вигляді суми двох складових — основного напружено-деформованого стану $\hat{\sigma}_{rr}^{(\lambda)}$, $\hat{\sigma}_{\theta\theta}^{(\lambda)}$, $\hat{\sigma}_{zz}^{(\lambda)}$, $\hat{\sigma}_{rz}^{(\lambda)}$, $\hat{\varepsilon}_{rr}^{(\lambda)}$, $\hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(\lambda)}$, $\hat{\varepsilon}_{zz}^{(\lambda)}$, $\hat{\varepsilon}_{rz}^{(\lambda)}$, $\hat{u}_z^{(\lambda)}$, $\hat{u}_r^{(\lambda)}$ та збурення $\tilde{\sigma}_{rr}^{(\lambda)}$, $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(\lambda)}$, $\tilde{\sigma}_{zz}^{(\lambda)}$, $\tilde{\sigma}_{rz}^{(\lambda)}$, $\tilde{\varepsilon}_{rr}^{(\lambda)}$, $\tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(\lambda)}$, $\tilde{\varepsilon}_{zz}^{(\lambda)}$, $\tilde{\varepsilon}_{rz}^{(\lambda)}$, $\tilde{u}_z^{(\lambda)}$, $\tilde{u}_r^{(\lambda)}$.

Виберемо

$$\hat{\sigma}_{zz}^{(\lambda)} = \frac{F}{\pi r^2}, \quad \hat{\sigma}_{rr}^{(\lambda)} = \hat{\sigma}_{rz}^{(\lambda)} = \hat{\sigma}_{\theta\theta}^{(\lambda)} = 0, \quad \hat{\varepsilon}_{zz}^{(\lambda)} = \frac{\hat{\sigma}_{zz}^{(\lambda)}}{E^{(\lambda)}}, \quad \hat{\varepsilon}_{rr}^{(\lambda)} = \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(\lambda)} = -\nu^{(\lambda)} \hat{\varepsilon}_{zz}^{(\lambda)}, \quad \hat{\varepsilon}_{rz}^{(\lambda)} = 0, \\ \hat{u}_z^{(\lambda)} = \hat{\varepsilon}_{zz}^{(\lambda)} \zeta, \quad \hat{u}_r^{(\lambda)} = -\nu^{(\lambda)} \hat{\varepsilon}_{zz}^{(\lambda)} \xi.$$

За такого вибору на поверхні контакту виконуються такі умови для основного напружено-деформованого стану

$$\hat{\sigma}_{zz}^{(1)} \Big|_{\zeta=0} - \hat{\sigma}_{zz}^{(2)} \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad \hat{\sigma}_{rz}^{(1)} \Big|_{\zeta=0} - \hat{\sigma}_{rz}^{(2)} \Big|_{\zeta=0} = 0, \\ \hat{u}_z^{(1)} \Big|_{\zeta=0} - \hat{u}_z^{(2)} \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad \hat{u}_r^{(1)} \Big|_{\zeta=0} - \hat{u}_r^{(2)} \Big|_{\zeta=0} = -a\xi,$$

$$\text{де } a = \left(\frac{\nu^{(1)}}{E^{(1)}} - \frac{\nu^{(2)}}{E^{(2)}} \right) \frac{F}{\pi r^2} = \frac{\nu^{(1)}}{E^{(1)}} \left(1 - \frac{\eta_\nu}{\eta_E} \right), \quad \eta_\nu \equiv \frac{\nu^{(2)}}{\nu^{(1)}}, \quad \eta_E \equiv \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}. \quad (21)$$

Щоб забезпечити неперервність компонент векторів напружень та переміщень на поверхні S підпорядкуємо компоненти збурень $\tilde{\sigma}_{zz}^{(\lambda)}$, $\tilde{\sigma}_{rz}^{(\lambda)}$ та $\tilde{u}_z^{(\lambda)}$, $\tilde{u}_r^{(\lambda)}$ умовам

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{zz}^{(1)} \Big|_{\zeta=0} - \tilde{\sigma}_{zz}^{(2)} \Big|_{\zeta=0} = 0, & \tilde{\sigma}_{rz}^{(1)} \Big|_{\zeta=0} - \tilde{\sigma}_{rz}^{(2)} \Big|_{\zeta=0} = 0, \\ \tilde{u}_z^{(1)} \Big|_{\zeta=0} - \tilde{u}_z^{(2)} \Big|_{\zeta=0} = 0, & \tilde{u}_r^{(1)} \Big|_{\zeta=0} - \tilde{u}_r^{(2)} \Big|_{\zeta=0} = a\xi. \end{cases} \quad (22)$$

В результаті прийшли до задачі (4), (5), (22), в якій стала a визначається через модулі пружності формулою (21). Тож, отриманий в п.4 розв'язок дозволяє дослідити вплив пружних властивостей матеріалів на концентрацію напружень в околі поверхні S з'єднання різнорідних матеріалів.

На рис. 7 та 8 наведена залежність стрибків компонент напружень $\Delta\tilde{\sigma}_{rr} = \tilde{\sigma}_{rr}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}$ та $\Delta\tilde{\sigma}_{\theta\theta} = \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}$ в точці $\xi = 0.75$ на поверхні контакту $\zeta = 0$ від η_v , за різних значень параметра $\eta_E = 0.5, 1, 1.5$ (криві 1, 2, 3 відповідно).

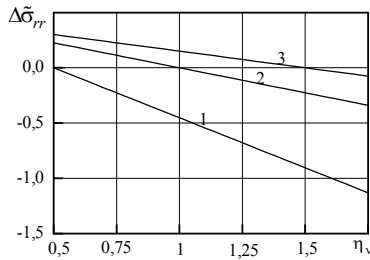


Рис. 7

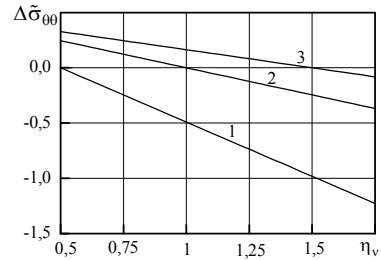


Рис. 8

Як впливає із формули (21), збурення напружень зменшуються і зникають при $\eta_v/\eta_E = 1$, що спостерігається і на залежностях рис. 7 та 8.

Висновки. Розроблено варіаційний метод однорідних розв'язків розв'язування осесиметричної задачі теорії пружності для кусково-однорідного циліндра з використанням функції Лява. Розв'язок задачі подано у вигляді розвинення за повними системами функцій, так званими однорідними розв'язками. Системами однорідних розв'язків є власні функції осесиметричної задачі теорії пружності для циліндричної області. Реалізація варіаційного методу приводить до безмежної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Цей підхід дозволяє отримувати достатньо точні числові розв'язки осесиметричної задачі для кусково-однорідного циліндра, на межі з'єднання якого задано стрибки напружень та переміщень. Проведені з використанням методу редукції числові експерименти показали, що зі збільшенням числа доданків часткових сум рядів точність задоволення умов, заданих на межі з'єднання, покращується, що

свідчить про збіжність розв'язків, отриманих методом редукції. Застосований тут метод можна розвинути і для скінченного кусково-однорідного циліндра.

Література

- [1] *Agarwal V. K.* Axisymmetric solution of the end-problem for a semi-infinite elastic circular cylinder and its application to joined dissimilar cylinders under uniform tension. — International Journal of Engineering Science. — 1978. — 16, № 12. — P. 985-998.
- [2] *Sburlati R.* Three-dimensional analytical solution for an axisymmetric biharmonic problem. — J. Elasticity. — 2009. — 95, № 1. — P. 79-97.
- [3] *Мелешко В. В., Токовий Ю. В., Барбер Д. Р.* Осесиметричні температурні напруження у пружному ізотропному циліндрі скінченної довжини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2010. — 53, № 1. — С.120-137.
- [4] *Popov G. Ya.* Axisymmetric boundary-value problems of the theory of elasticity for cylinders and cones of finite length. — Dokl. Ross. Akad. Nauk. — 2011. — 439, № 2. — P. 192-197.
- [5] *Vihak V. M., Yasinskyu A. V., Tokovyy Y. V., Rychahivskyu A. V.* Exact solution of the axisymmetric thermoelasticity problem for a long cylinder subjected to varying with-respect-to-length loads // J. Mech. Behav. Materials. — 2007.— 18, № 2.— P. 141 — 148.
- [6] *Чекурін В. Ф., Постолакі Л. І.* Варіаційний метод однорідних розв'язків у осесиметричних задачах теорії пружності для півбезмежного циліндра // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2013. — 56, №1.— С. 145-155.
- [7] *Лурье А. И.* Теория упругости. — М.: Наука, 1970. — 940 с.
- [8] *Chekurin V., Postolaki L.* Application of the least square method in axisymmetric biharmonic problems // Mathematical problems in engineering. — 2016. — Volume 2016. — P. 1-9.
- [9] *Chekurin V. F., Postolaki L. I.* A variational method of homogeneous solutions for axisymmetric elasticity problems for cylinder // Mathematical modeling and computing. — 2015. — Vol. 2, № 2. — P. 128-132.
- [10] *Чекурін В., Постолакі Л.* Обернена задача визначення залишкових напружень в околі з'єднання різнорідних матеріалів // машинознавство. — 2010. — № 6. — С. 3-7.
- [11] *Новацкий В.* Теория упругости — М.:Мир. — 1975. — 875 с.
- [12] *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа — М. — Л.: Физматгиз, 1962. — 695 с.

Variational method of homogeneous solutions in axisymmetric elasticity problem for piecewise homogeneous cylinder

Vasyl Chekurin, Lesya Postolaki

Variational method of homogeneous solutions is implemented to axisymmetric elasticity problems for piecewise homogeneous elastic cylinder with a free lateral surface. The strain-stressed state is caused by jumps of stress and displacement components prescribed on the interfacial surface between two homogeneous cylinders. The method is based on representation of the Love strain function, which satisfy biharmonic equation, as series decomposition by complete system of functions being eigen-functions of elasticity problem for semi-infinite homogeneous cylinder with

traction-free lateral surface. The implementation reduces the problem to the infinite system of algebraic equations, which is solved by reduction. Obtained solution is used to study stress concentration in vicinity of joint of two dissimilar materials.

Вариационный метод однородных решений в осесимметричной задаче теории упругости для кусочно-однородного цилиндра

Василий Чекурин, Леся Постолаки

Вариационный метод однородных решений применен для решения осесимметричных задач теории упругости для кусочно-однородного упругого цилиндра при заданных на границе соединения прыжков напряжений и перемещений. В основе этого метода лежит представление функции Лява, которая удовлетворяет бигармоническому уравнению, в виде разложения по полным системам собственных функций осесимметричной задачи теории упругости для полубесконечного цилиндра со свободной боковой поверхностью. Реализация метода сводит задачу к безграничной системе алгебраических уравнений, которую решали методом редукции. На конкретном примере исследована сходимость численного решения задачи. В качестве примера применения полученного решения проведено исследование концентрации напряжений в окрестности соединения двух разнородных цилиндрических тел при одноосном растяжении.

Отримано 14.12.16