

Моделювання руху осцилятора з м'якою пружною характеристикою

Василь Ольшанський¹, Станіслав Ольшанський²

¹ д.ф.-м.н., професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, вул. Алчевських, 44, Харків, 61002

² к.ф.-м.н., Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, вул. Алчевських, 44, Харків, 61002, e-mail: stasolsh77@gmail.com

Розглянуто вільні коливання системи з одним ступенем вільності, в припущенні, що сила пружності пропорційна кубічному кореневі з деформації пружини. Одержано дві форми аналітичного розв'язку нелінійного диференціального рівняння руху осцилятора. В першій переміщення осцилятора у часі виражено через неповні еліптичні інтеграли першого та другого роду. В другій формі розв'язок виражено через періодичні Атеб-функції. Складено таблиці задіяних функцій, які спрощують проведення розрахунків. Виведено також формули для обчислення періодів коливань при наданні осцилятору або початкового відхилення від положення рівноваги або початкової швидкості (миттєвого імпульса) в цьому положенні. Встановлена залежність періода коливань від параметрів осцилятора та початкових умов. Наведено приклади розрахунків коливань з використанням складених таблиць спеціальних функцій і з використанням запропонованих апроксимацій Атеб-функцій. Проведено порівняння числових результатів, одержаних різними способами.

Ключові слова: нелінійний осцилятор, вільні коливання, м'яка характеристика пружності, неповні еліптичні інтеграли, Атеб-функції.

Вступ. Нелінійні механічні коливання з великими амплітудами можуть бути причиною руйнування елементів конструкцій, або причиною передчасного порушення їх працездатності. Тому дослідження закономірностей нелінійних механічних коливань відноситься до актуальних науково-прикладних задач. Незважаючи на порівняно давню історію [1], цей розділ механіки успішно розвивається і в наш час, про що свідчать монографічні видання [2-5], в яких є огляд відповідних літературних джерел. Заслугує уваги і огляд [6], де надана інформація про нелінійні коливання систем змінної маси.

Метою даної статті є математичне моделювання нелінійних вільних коливань осцилятора з м'якою характеристикою пружності на підставі різних аналітичних розв'язків рівняння руху, виражених в спеціальних функціях.

1. Викладення основного матеріалу

Рух осцилятора на координатній вісі Ox описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + c\sqrt[3]{x} = 0, \quad (1)$$

де m – маса рухомої матеріальної точки, $c > 0$ – характеризує жорсткість нелінійної пружини.

Переходом до нових змінних: $\dot{x} = v$, $\ddot{x} = v \frac{dv}{dx}$ рівнянню (1) надаємо вигляд:

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{c}{m} x^{1/3}. \quad (2)$$

Проінтегрувавши (2), одержуємо його загальний розв'язок:

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{c_1 - \frac{3c}{2m} x^{4/3}}. \quad (3)$$

Тут c_1 – довільна сила.

1. Розглянемо далі коливання осцилятора, спричинені початковим відхиленням a проти вісі ox від положення рівноваги $x = 0$. У цьому випадку, на проміжку $x \in [-a; a]$:

$$x(0) = -a; \quad v(0) = 0; \quad v \geq 0$$

і стала інтегрування приймає значення: $c_1 = \frac{3c}{2m} a^{4/3}$.

Враховуючи його, після розділення змінних в (3), отримуємо:

$$\frac{dx}{\sqrt{a^{4/3} - x^{4/3}}} = \sqrt{\frac{3c}{2m}} dt.$$

Інтегрування цього виразу дає залежність:

$$\sqrt{\frac{3c}{2m}} t = \int_{-a}^x \frac{dy}{\sqrt{a^{4/3} - y^{4/3}}},$$

яка після переходу до нової змінної інтегрування $u = -y/a$, набуває форму:

$$\tau = \int_{-x/a}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^{4/3}}}. \quad (4)$$

Тут $\tau = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \sqrt{\frac{3c}{2m}} t$.

Замінивши u на w^3 , du на $3w^2 dw$ вираз (4) зводимо до співвідношення:

$$\frac{\tau}{3} = \int_{\sqrt[3]{-x/a}}^1 \frac{w^2}{\sqrt{1-w^4}} dw. \quad (5)$$

Квадратура в (5) виражається через неповні еліптичні інтеграли першого та другого роду [7, с. 130], а саме:

$$\int_{\sqrt[3]{-x/a}}^1 \frac{w^2}{\sqrt{1-w^4}} dw = \sqrt{2} \left[E\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right], \quad (6)$$

де $\varphi = \arccos \sqrt[3]{-x/a}$.

Використовуючи таблиці неповних еліптичних інтегралів [8, с. 101-106] або [9, с. 427-432], можна для заданого відношення $(-x/a)$ знайти безрозмірний параметр часу τ , коли досягається це відношення. Розв'язування оберненої до цієї задачі ускладнюється через не поруч розміщені таблиці значень $E\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Тому проведемо додаткові перетворення. Уведемо допоміжну функцію:

$$R\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = E\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Тоді вираз (5) приймає вигляд:

$$\frac{\tau}{3\sqrt{2}} = R\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \quad (7)$$

Якщо з рівняння (7) знайти φ для заданого τ , то потім легко обчислити і відношення $(-x/a)$, бо:

$$-x/a = \cos^3 \varphi. \quad (8)$$

Отже, основна задача полягає у визначенні кута φ . З метою спрощення її розв'язання, нижче наводимо складену таблицю значень допоміжної функції $R\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ для різних φ .

Таблиця 1

Значення $R\left(\varphi^0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

φ^0	10R	φ^0	10R	φ^0	10R	φ^0	10R
0	0,0000	23	1,927	46	3,401	69	4,127
1	0,0087	24	2,004	47	3,450	70	4,141
2	0,1745	25	2,079	48	3,496	71	4,155
3	0,2617	26	2,154	49	3,541	72	4,166
4	0,3486	27	2,228	50	3,585	73	4,177
5	0,4354	28	2,300	51	3,627	74	4,187
6	0,5222	29	2,372	52	3,668	75	4,195
7	0,6086	30	2,442	53	3,707	76	4,203
8	0,6948	31	2,512	54	3,744	77	4,209
9	0,7805	32	2,580	55	3,780	78	4,215
10	0,8660	33	2,647	56	3,815	79	4,220
11	0,9511	34	2,713	57	3,848	80	4,224
12	1,036	35	2,778	58	3,879	81	4,227
13	1,120	36	2,841	59	3,909	82	4,230
14	1,204	37	2,903	60	3,937	83	4,232
15	1,287	38	2,964	61	3,964	84	4,2337
16	1,369	39	3,024	62	3,990	85	4,2345
17	1,451	40	3,082	63	4,013	86	4,2353
18	1,532	41	3,139	64	4,036	87	4,2357
19	1,613	42	3,194	65	4,057	88	4,23596
20	1,693	43	3,248	66	4,077	89	4,23604
21	1,772	44	3,301	67	4,095	90	4,23607
22	1,850	45	3,352	68	4,112	-	-

Якщо значення τ в (7) буде таким, що $\frac{\tau}{3\sqrt{2}} > 0,423607$, то для визначення кута φ треба використати наступну властивість допоміжної функції:

$$R\left(\varphi_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,847214 - \frac{\tau}{3\sqrt{2}}, \quad (9)$$

причому $\varphi_1 = 180^\circ - \varphi$.

Наприклад, коли $\frac{\tau}{3\sqrt{2}} = 0,6779$, то в межах прийнятої точності:
 $0,8472 - 0,6779 = 0,1693$ і в табл. 1 йому відповідає $\varphi_1 = 20^\circ$. Отже,
 $\varphi = 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$.

Таке продовження таблиці 1 дає можливість до кінця розрахувати перший напівцикл коливань на проміжку $t \in [0, 0,5T]$, де T – період коливань осцилятора.

Першому напівциклу коливань відповідає графік, зображений на рис. 1.

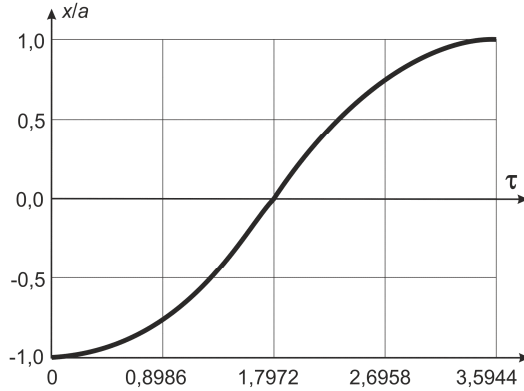


Рис. 1. До розрахунку коливань при $x(0) = -a$, $\dot{x}(0) = 0$

Для поширення графіка на весь цикл коливань його треба повернути на 180° відносно вертикалі $\tau \approx 3,5944$.

Із (4) випливає проста залежність для обчислення періода коливань осцилятора:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}} \sqrt{\frac{3c}{2m}} \frac{T}{4} = I = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^{4/3}}}.$$

Інтеграл I виражається через гама-функцію [7, с. 295], по формулі:

$$I = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(5/4)}.$$

Якщо прийняти до уваги, що [8, с. 52]:

$$\Gamma(3/4) \approx 1,225417, \quad \Gamma(5/4) \approx 0,906402, \quad \text{то } I \approx 1,797212.$$

Тоді:

$$T = 4I \sqrt[3]{a} \sqrt{\frac{2m}{3c}} \approx 5,86967 \sqrt[3]{a} \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Збільшення початкового відношення a супроводжується зростанням періода коливань T , що властиво системі з м'якою нелінійною пружною характеристикою.

2. З'ясуємо далі як будуть проходити коливання осцилятора при наданні йому в положенні рівноваги початкової швидкості v_0 (миттєвого імпульса). Для визначення сталої c_1 в (3) використовуємо початкові умови:

$$x(0) = 0; \quad v(0) = v_0; \quad v \geq 0.$$

Для них стала c_1 приймає значення $c_1 = v_0^2$. Тоді, згідно з (3):

$$\frac{dx}{\sqrt{a_*^{4/3} - x^{4/3}}} = \sqrt{\frac{3c}{2m}} dt, \quad (10)$$

причому $a_* = \left(v_0^2 \frac{2m}{3c} \right)^{3/4}$.

Інтегрування виразу (10) дає:

$$\sqrt{\frac{3c}{2m}} t = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{a_*^{4/3} - y^{4/3}}} = a_*^{1/3} \int_0^{x/a_*} \frac{du}{\sqrt{1 - u^{4/3}}}. \quad (11)$$

Таким чином:

$$\tau_* = \frac{1}{a_*^{1/3}} \sqrt{\frac{3c}{2m}} t = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^{4/3}}} - \int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^{4/3}}}$$

або

$$\tau_* = I - \int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^{4/3}}} = I - 3\sqrt{2}R\left(\varphi_*, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Тут $\varphi_* = \arccos \sqrt[3]{x/a_*}$.

Отже, відносно переміщення осцилятора подається виразом:

$$x/a_* = \cos^3 \varphi_*, \quad (12)$$

у якому φ_* визначається рівнянням:

$$\frac{|I - \tau_*|}{3\sqrt{2}} = R\left(\varphi_*, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad (13)$$

де $0 \leq \tau_* \leq 2I$.

Для обчислення φ_* , що відповідає заданому τ_* , як і раніше, можна використовувати табл. 1.

Геометричним образом, до якого призводять залежності (12), (13), є графік, зображений на рис. 2.

Для поширення графіка на весь цикл коливань, його слід непарним чином продовжити відносно вертикалі $\tau_* \approx 3,5944$.

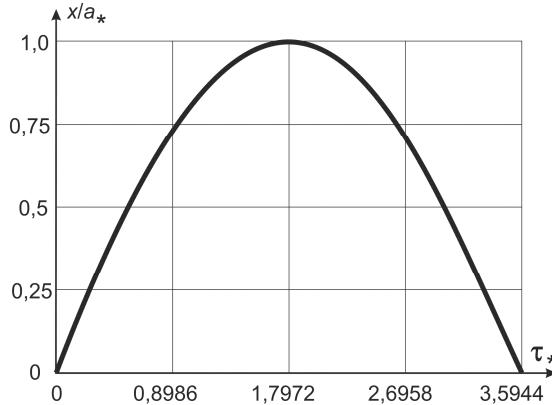


Рис. 2. До розрахунку коливань при $x(0) = -a$, $\dot{x}(0) = v_0$

Щоб знайти період коливань, звернемося до виразу (11). Поклавши там $t = T/4$, $x/a_* = 1$, одержуємо:

$$\frac{1}{a_*^{1/3}} \sqrt{\frac{3c}{2m}} \frac{T}{4} = \frac{1}{\sqrt{v_0}} \left(\frac{3c}{2m} \right)^{3/4} \cdot \frac{T}{4} = I.$$

Звідки випливає, що:

$$T = 4I \sqrt{v_0} \left(\frac{2m}{3c} \right)^{3/4} \approx 5,30385 \sqrt{v_0} \left(\frac{m}{c} \right)^{3/4}.$$

Період коливань осцилятора залежить від величини наданої йому початкової швидкості. Він зростає зі збільшенням цієї швидкості.

3. Одержані вище розв'язки можна подати у більш сучасному вигляді, використовуючи періодичні Атеб-функції [3, 10-12]. Так, формулу (8) можна замінити на:

$$x/a = -Ca \left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3} \tau \right). \quad (14)$$

Тут в правій частині задіяний Атеб-косинус.

Якщо рух осцилятора описується виразом (12), то його можна замінити на:

$$x/a_* = Sa \left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3} \tau_* \right), \quad (15)$$

де в правій частинці записаний Атеб-синус.

Щоб спростити використання формул (14), (15), в табл. 2 вказані значення задіяних періодичних Атеб-функцій. Між ними виконується співвідношення:

$$Sa\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\eta\right) = Ca\left[\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}(I-\eta)\right], \quad (16)$$

де, як і раніше, $I \approx 1,797212$.

Якщо $I \leq \eta \leq 2I$, то:

$$Ca\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\eta\right) = -Ca\left[\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}(2I-\eta)\right], \quad Sa\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\eta\right) = Sa\left[\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}(2I-\eta)\right]$$

і для обчислень Атеб-функції залишається придатною табл. 2.

Таблиця 2

Значення $Sa\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\eta\right)$ і $Ca\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\eta\right)$ при $\eta \leq I$

η	10Sa	10Ca	η	10Sa	10Ca
0,00	0,00	10,00	0,95	7,64	7,04
0,05	0,50	9,99	1,00	7,91	6,73
0,10	1,00	9,97	1,05	8,16	6,40
0,15	1,47	9,93	1,10	8,39	6,06
0,20	1,95	9,87	1,15	8,61	5,71
0,25	2,42	9,79	1,20	8,82	5,33
0,30	2,87	9,70	1,25	9,01	4,95
0,35	3,32	9,59	1,30	9,18	4,56
0,40	3,75	9,47	1,35	9,34	4,15
0,45	4,17	9,33	1,40	9,48	3,72
0,50	4,58	9,17	1,45	9,60	3,29
0,55	4,97	9,00	1,50	9,71	2,84
0,60	5,36	8,81	1,55	9,80	2,39
0,65	5,73	8,60	1,60	9,87	1,92
0,70	6,08	8,38	1,65	9,93	1,45
0,75	6,42	8,15	1,70	9,97	0,95
0,80	6,75	7,89	1,75	9,99	0,47
0,85	7,06	7,62	1,797	10,00	0,00
0,90	7,36	7,34	-	-	-

Замість табл. 2, при наближеному обчисленні $Sa\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\eta\right)$, можна використовувати апроксимацію:

$$Sa\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\eta\right) \approx \begin{cases} \eta & 0 \leq \eta \leq 0,2 \\ -0,0059 + 1,0556\eta - 0,2556\eta^2 & \text{при } 0,2 \leq \eta \leq 0,8 \\ 1 - \frac{1}{3}(I-\eta)^2 & 0,8 \leq \eta \leq 1,7972. \end{cases} \quad (17)$$

Її похибка не перевершує 1,5 %. В цьому переконує порівняння значень Атеb-синуса в табл. 2 і табл. 3.

Таблиця 3

Апроксимовані значення $Sa\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\eta\right)$

η	$10Sa$	η	$10Sa$	η	$10Sa$
0,00	0,00	0,50	4,58	1,200	8,81
0,150	1,50	0,80	6,75	1,400	9,47
0,200	1,95	0,85	7,01	1,7972	10,00

Апроксимація (17) придатна і для наближеного обчислення значень Атеb-косинуса, якщо прийняти до уваги залежність (16).

2. Приклади розрахунків

З метою порівняння результатів, їх одержуємо з використанням різних форм аналітичного розв'язку задачі.

Приклад 1. Обчислимо безрозмірне переміщення осцилятора в момент часу, коли $\tau = 1,245$, при русі, спричиненому початковим відхиленням від положення рівноваги. Для вказаного моменту часу: $\frac{\tau}{3\sqrt{2}} \approx 0,2934 = R\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Користуючись табл. 1, знаходимо, що $\varphi \approx 37,5^\circ$. Отже, по формулі (8) $x/a \approx -(\cos 37,5^\circ)^3 = -0,499$, Якщо проводити обчислення по формулі (14), то треба звернутися до табл. 2. В ній, провівши інтерполяцію, знаходимо, що для вказаного $\eta = 1,245$, $Sa\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\eta\right) \approx 0,499$, а тому $x/a \approx -0,499$, що збігається з попереднім результатом. Третій варіант розрахунку пов'язаний з використанням формул (14), (16), (17). Оскільки $\tau = 1,245$, то $\eta = I - \tau \approx 0,5522$. Для нього по формулі (17) знаходимо, що $Sa\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\eta\right) = Ca\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\tau\right) \approx 0,499$. Отже, згідно з (14), $x/a \approx -0,499$. Усі три способи обчислень дають однакові результати, причому третій спосіб не пов'язаний з використанням таблиць.

Приклад 2. З'ясуємо яким буде x/a , коли $\tau = 2,5$, а $\frac{\tau}{3\sqrt{2}} \approx 0,5893$. У цьому випадку виконується співвідношення (9) $R\left(\varphi_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0,2579$. Для нього в табл. 1 $\varphi_1 \approx 32^\circ$. Тому $\varphi = 180^\circ - 32^\circ \approx 148^\circ$; $\cos^3 \varphi \approx -0,610$ і по формулі (8) $x/a \approx 0,610$. Якщо задіяти другий варіант розрахунку з використанням табл. 2, то $\eta = 2I - \tau \approx 1,0944$. Методом інтерполяції в табл. 2 одержуємо

$Ca\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\tau\right) = -Ca\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\eta\right) \approx -0,610$. Тому по формулі (14) $x/a \approx 0,610$. При розрахунках без таблиць маємо: $I - \eta \approx 1,797212 - 1,0944 \approx 0,7028$. Тоді $Ca\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\tau\right) = -Sa\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}(I - \eta)\right)$. По формулі (17) одержуємо $Sa\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3} \cdot 0,7028\right) \approx 0,610$ і, згідно з (14), $x/a \approx 0,610$. Отже і в цьому прикладі три способи розрахунку дають однаковий наближений результат.

Приклад 3. Нехай осцилятор отримав певну початкову швидкість в положенні $x = 0$. Обчислимо яким буде x/a_* , коли $\tau_* = 0,9$. Для вказаного τ_* $R\left(\varphi_*, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0,2115$. За допомогою табл. 1 знаходимо, що $\varphi_* \approx 25,5^0$; $\cos^3 \varphi_* \approx 0,735$. Тоді, згідно з (12) $x/a_* \approx 0,735$. Якщо розрахунок проводити по формулі (15), то в табл. 2, при $\eta = 0,9$, $Sa\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\eta\right) = 0,736$. Отже, $x/a_* \approx 0,736$, що мало відрізняється від попереднього результату. Нарешті, в третьому способі обчислень по формулі (17), при $\eta = 0,9$, одержуємо $Sa\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\eta\right) \approx 0,732$. Підставивши це значення Атеб-функції в (15), отримуємо $x/a_* \approx 0,732$, що добре узгоджується з результатами обчислень з використанням таблиць.

Приклад 4. Обчислимо безрозмірне переміщення осцилятора x/a_* при $\tau_* = 3,2 > I$. Для цього значення τ_* $|I - \tau_*| \approx 1,4028$, а $\frac{|I - \tau_*|}{3\sqrt{2}} \approx 0,3306$. Використовуючи (13) і табл. 1, одержуємо $\varphi_* \approx 44,1^0$. Подальше обчислення по формулі (12) дає: $x/a_* \approx 0,730$. Якщо проводити розрахунок по формулі (15), то $\eta = 2I - t_* \approx 0,394$. Для нього в табл. 2 $Sa\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}(2I - \tau_*)\right) \approx 0,370$. Тому, згідно з (15), $x/a_* \approx 0,730$, що співпадає з попереднім результатом. При розрахунках без використання таблиць, по формулі (17) одержуємо $Sa\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}(2I - \tau_*)\right) \approx 0,370$. Отже, і третій варіант розрахунку дає одержаний раніше результат.

Висновки. Розглянута задача вільних коливань осцилятора має дві форми аналітичного розв'язку. Перша пов'язана з неповними еліптичними інтегралами першого та другого роду. У другій формі розв'язок виражається через періодичні

Ateb-функції, для яких запропонована досить точна та проста апроксимація. Розрахунки підтвердили вірогідність виведених формул.

Література

- [1] *Ларин А. А.* Очерки истории развития теории механических колебаний — Севастополь: Вебер, 2013. — 403 с.
- [2] *Аврамов К. В., Михлин Ю. В.* Нелинейная динамика упругих систем // Том 1: Модели, методы, явления. — М.-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2010. — 704 с.
- [3] *Пукач П. Я.* Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем — Львів : Львівська політехніка, 2014. — 288 с.
- [4] *Кузнецов А. П., Рыскин Н. М.* Нелинейные колебания — М. : Физматлит, 2002. — 292 с.
- [5] Динаміка дисипативних осциляторів / *В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський, Л. М. Тищенко.* — Харків : Міськдрук, 2016. — 264 с.
- [6] *Sveticanin L.* A reiew on dynamics of mass variable system // Journal of the Serbian Society for Computational Machanics. — 2012. — Vol. 6, № 1. — Pp. 56-74.
- [7] Интегралы и ряды / *А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев* // Элементарные функции. — М. : Наука, 1981. — 800 с.
- [8] Специальные функции / *Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш.* — М. : Наука, 1977. — 344 с.
- [9] *Абрамовиц А.* Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) — М. : Наука, 1979. — 832 с.
- [10] *Грицик В. В., Назаркевич М. А.* Математичні моделі алгоритмів і реалізація Ateb-функцій // Доповіді Національної академії наук України. — Київ, 2007. — № 12. — С. 37-42.
- [11] *Сокіл Б. І.* Про застосування Ateb-функцій для побудови розв'язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ // Доповіді Національної академії наук України. — Київ, 1997. — № 7. — С. 55-58.
- [12] *Возний А. М.* Застосування Ateb-функцій для побудови розв'язку одного класу істотно нелінійних диференціальних рівнянь // Доповіді АН УССР. — Київ, 1970. — № 9. — С. 971-974. — Серія А.

Modeling the motion of an oscillator with a soft elastic characteristic

Vasiliy Olshanskii, Stanislav Olshanskii

The free oscillations of a system with one degree of freedom are considered under the assumption that the elasticity of a spring is proportional to the cubic root of its deformation. Two forms of the analytical solution of the nonlinear differential equation of motion of the oscillator are obtained. In the first displacement of the oscillator in time is expressed in terms of incomplete elliptic integrals of the first and second kind. In the second form, the solution is expressed in terms of periodic Ateb-functions. The tables of the involved functions are made, which simplify the calculation. Formulas are also derived for calculating the oscillation periods when the oscillator is signaled or the initial deviation from the equilibrium position or the initial velocity (instantaneous pulse) in this position. The dependence of the oscillation period on the parameters of the oscillator and the initial conditions is established. Examples of calculations of oscillations are presented with the use of compiled tables of special functions and using the proposed approximations of the Ateb-functions. Comparison of numerical results obtained by different methods is made.

Моделирование движения осциллятора с мягкой упругой характеристикой

Василий Ольшанский, Станислав Ольшанский

Рассмотрены свободные колебания системы с одной степенью свободы в предположении, что сила упругости пружины пропорциональна кубическому корню ее деформации. Получено две формы аналитического решения нелинейного дифференциального уравнения движения осциллятора. В первом, перемещение осциллятора во времени выражено через неполные эллиптические интегралы первого и второго рода. Во второй форме решение выражено через периодические Адеб-функции. Составлено таблицы задействованных функций, которые упрощают проведение расчетов. Выведено также формулы для вычисления периодов колебаний при сообщении осциллятору или начального отклонения от положения равновесия или начальной скорости (мгновенного импульса) в этом положении. Установлена зависимость периода колебаний от параметров осциллятора и начальных условий. Приведено примеры расчетов колебаний с использованием составленных таблиц специальных функций и с применением предложенных аппроксимаций Адеб-функций. Проведено сравнение численных результатов, полученных разными способами.

Отримано 11.05.17