

Моделювання та дослідження температурного поля в межовому шарі живої тканини

Богдан Хапко

¹ к. ф.-м. н., Інститут прикладних проблеми механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Розглянуто задачу про визначення температурного поля в межовому шарі живої тканини, яке зумовлене різницею температур зовнішнього середовища та в глибині тіла, а також метаболічною генерацією тепла і джерелами тепла за залежності від координати коефіцієнта перфузії крові. Задачу теплопровідності, у якій коефіцієнт перфузії крові записано із використанням функції Гевісайда, методом варіації сталої, зведено, до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Для відшукування температури в тілі побудовано числову схему розв'язання інтегрального рівняння з використанням методу квадратурних формул Сімпсона. Наведено числовий аналіз розподілу температури в межовому шарі живої тканини при заданні різних граничних умов на його поверхнях. Проаналізовано розподіл температури у глибину тіла в залежності від метаболічної генерації тепла та джерела тепла, коефіцієнт перфузії крові якого залежить від координати.

Ключові слова: температура, джерела тепла, межовий шар, коефіцієнт перфузії крові, інтегральні рівняння Фредгольма другого роду.

Вступ. Розподіл температури в межовому шарі живої тканини має важливе значення при хірургічних процедурах та лікуванні [1]. Нагрівання окремих частин тіла, або їх заморожування використовується для вибіркового знищення чи видалення хворих тканин [2]. При цьому збільшують температуру хворої тканини і термічно знищують її, використовуючи такі технічні засоби як мікрохвилі, ультразвук, лазер і ін. [3-5].

В зв'язку з цим виникає потреба у математичному моделюванні теплових процесів в таких тканинах та в аналітичному їх дослідженні на основі розв'язків відповідних крайових задач теплопровідності [6]. Для розв'язання задач теплопровідності в живій тканині використовували різні методи зокрема, метод інтегральних перетворень чи функції Гріна [7-8]. Числові і експериментальні підходи до знаходження розподілу температури в тілі застосовувались у роботі [9]. В цих працях при дослідженні температурного поля вважали коефіцієнт перфузії крові сталим в усьому тілі.

Однак, в різних шарах межової тканини коефіцієнти перфузії крові є різними, але приймаємо їх сталими в межах одного шару. Це приводить до неklasичних задач теплопровідності і розвинення нових підходів до їх розв'язання. Побудовою

розв'язків звичайних лінійних диференціальних рівнянь з кусково-сталими і імпульсними коефіцієнтами різними способами займались в працях [10-12].

Досліджено температурне поле в межовому шарі живої тканини спричинене різницею температур довкілля та в глибині тіла, метаболічною генерацією тепла, джерелами тепла за залежного від координати коефіцієнта перфузії крові. Задачу теплопровідності для шару зведено до інтегрального рівняння з інтегральним оператором Фредгольма другого роду. Побудовано числову схему розв'язку інтегрального рівняння з використанням методу квадратурних формул. Наведено результати числового аналізу розподілу температури.

1. Формулювання задачі

Розглядаємо поширення тепла в межовому шарі живої тканини товщини $x=l$ в напрямі перпендикулярному до поверхні $x=0$. Будемо розрізняти різні за товщиною три частини шару живої тканини рис.1: на відрізку $(0, d_1)$ — шкіра, на $[d_1, d_2)$ — жирова тканина та на $[d_2, l)$ — м'язи. На поверхні $x=0$ тіло обмінюється теплом з зовнішнім середовищем за законом Ньютона, або задана температура T_c . В глибині шару на поверхні $x=l$ задана температура тіла T_m , або теплова ізоляція. Межовий шар також нагрівається джерелами тепла $W_r(x)$, та в ньому відбуваються метаболічні процеси (метаболічна генерація тепла) внаслідок яких виділяється тепло інтенсивності W_m .

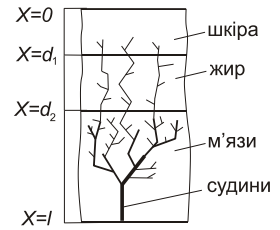


Рис. 1.

Температурне поле у тілі з живих тканин описується рівнянням Пеннеса [14], у якому в нашому випадку коефіцієнт перфузії крові буде кусково-сталою функцією координати, тоді отримуємо частково-вироджене диференціальне рівняння теплопровідності

$$\lambda \frac{d^2 T(x)}{dx^2} - \left\{ \omega_{b1} + (\omega_{b2} - \omega_{b1}) [S_-(x-d_1) - S_+(x-d_2)] + (\omega_{b3} - \omega_{b1}) [S_-(x-d_2) - S_+(x-l)] \right\} \rho_b c_b [T(x) - T_a] + W_m + W_r(x) = 0, \quad (1)$$

яке спочатку розглядаємо за таких граничних умов

$$T(0) = T_c, \quad T(l) = T_m. \quad (2)$$

Тут $T(x)$ — температура живої тканини; ρ_b, c_b — густина і теплоємність крові відповідно; λ — коефіцієнт теплопровідності тіла; $\omega_{b1}, \omega_{b2}, \omega_{b3}$ — коефіцієнти перфузії крові на відрізках межового шару тканини $(0, d_1), [d_1, d_2), [d_2, l)$

відповідно; $S_-(x-d_1)$, $S_+(x-d_2)$ — асиметричні функції Гевісайда; T_a — температура крові.

2. Методика розв'язування задачі

Зробивши заміну

$$\theta(x) = T(x) - T_a \quad (3)$$

задачу (1), (2) перепишемо у вигляді

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} - \kappa_1\theta(x) = \theta(x)\{(\kappa_2 - \kappa_1)[S_-(x-d_1) - S_+(x-d_2)] + (\kappa_3 - \kappa_1)[S_-(x-d_2) - S_+(x-l)]\} - \frac{W_r(x) + W_m}{\lambda}, \quad (4)$$

$$\theta(0) = T_c - T_a, \quad \theta(l) = T_m - T_a, \quad (5)$$

де $\kappa_i = \frac{\omega_{bi}\rho b c b}{\lambda}$, $i = 1, 2, 3$.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (4) складається з суми розв'язку відповідного однорідного рівняння, та часткового розв'язку неоднорідного рівняння, який знаходимо методом варіації сталих. В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} \theta(x) = & C_1 e^{-\kappa x} + C_2 e^{\kappa x} + \gamma_1 \int_0^x \theta(\xi) [S_-(\xi-d_1) - S_+(\xi-d_2)] \operatorname{sh}[\kappa(x-\xi)] d\xi + \\ & + \gamma_2 \int_0^x \theta(\xi) [S_-(\xi-d_2) - S_+(\xi-l)] \operatorname{sh}[\kappa(x-\xi)] d\xi - \\ & - \frac{1}{\kappa} \int_0^x \frac{W_m + W_r(\xi)}{\lambda} \operatorname{sh}[\kappa(x-\xi)] d\xi, \end{aligned}$$

де $\kappa = \sqrt{\kappa_1}$, $\gamma_1 = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa}$, $\gamma_2 = \frac{\kappa_3 - \kappa_1}{\kappa}$, C_1 і C_2 — невідомі сталі величини.

Задовольняючи граничні умови (5), для визначення функції $\theta(x)$ одержимо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду:

$$\theta(x) - \int_{d_1}^{d_2} \theta(\xi) K_1(x, \xi) d\xi - \int_{d_2}^l \theta(\xi) K_2(x, \xi) d\xi = P(x) - \Phi(x), \quad (6)$$

де $P(x) = \eta_2 e^{-\kappa x} + \eta_1 e^{\kappa x}$, $\Phi(x) = \frac{1}{\kappa} \int_0^x \frac{W_m + W_r(\xi)}{\lambda} \text{sh}[\kappa(x-\xi)] d\xi$; $K_i(x, \xi) = -\gamma_i \text{sh}[\kappa(l-\xi)] \frac{e^{\kappa x} - e^{-\kappa x}}{e^{\kappa l} - e^{-\kappa l}} + \frac{\gamma_i}{2} \left(-e^{-\kappa|x-\xi|} + e^{\kappa(x-\xi)} \right)$ — ядра інтегрального рівняння ($i=1,2$); $\eta_2 = T_c - T_a - \eta_1$, $\eta_1 = \frac{T_m - T_a + \Phi(l) - (T_c - T_a)e^{-\kappa l}}{e^{\kappa l} - e^{-\kappa l}}$ — коефіцієнти.

Інтегральне рівняння (6) розв'язуємо чисельно методом квадратур. В основі методу лежить квадратурна формула Сімпсона [15,16]

$$\int_{d_1}^{d_2} \theta(\xi) K_1(x, \xi) dx = \sum_{j=1}^n A_j \theta(\xi_j) K_1(x, \xi_j),$$

де ξ_j — абсциси, які ділять відрізок $[d_1, d_2)$ на $(n-1)$ — одну частини довжиною $h = \frac{d_1 - d_2}{n-1}$; $A_1 = A_n = h/3$, $A_{2n} = 4h/3$, $A_{2n-1} = 2h/3$ — значення коефіцієнтів інтегрування. У нас два відрізки інтегрування $[d_1, d_2)$ і $[d_2, l)$, які ділимо на $(n-1)$ — частину точками ξ_k ($k=1, \dots, 2n-1$), остання точка розбиття першого відрізка співпадає з першою точкою розбиття другого. Тоді рівняння (6) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} \theta(x) = & P(x) - \Phi(x) + \sum_{j=1}^n \theta(\xi_j) K_1(x, \xi_j) A_{j,1} + \\ & + \sum_{j=1}^n \theta(\xi_{j+n-1}) K_2(x, \xi_{j+n-1}) A_{j,2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Тут $A_{j,i}$ ($i=1,2$) — коефіцієнти інтегрування відповідно для відрізків $[d_1, d_2)$ і $[d_2, l)$. Підставляючи в рівняння (7) отримані точки ділення змінної x на відрізках інтегрування $[d_1, d_2)$ і $[d_2, l)$, $\xi_k = x_k$ ($k=1, \dots, 2n-1$), отримаємо систему $2n-1$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих значень шуканої функції $\theta(x)$ в точках x_k :

$$\begin{aligned} \theta(x_k) - \sum_{j=1}^n \theta(\xi_j) K_1(x_k, \xi_j) A_{j,1} - \sum_{j=1}^n \theta(\xi_{j+n-1}) K_2(x_k, \xi_{j+n-1}) A_{j,2} = \\ = P(x_k) - \Phi(x_k), \quad k=1, \dots, 2n-1. \end{aligned} \quad (8)$$

Отримані із системи (8) значення функції $\theta(x_k)$ підставляємо в рівняння (7) в результаті одержимо наближене значення функції $\theta(x)$ в будь-якій точці тіла.

Тоді температуру межового шару тканини $T(x)$ одержимо із формули (3).

Слід відмітити, що за інших граничних умов на межових поверхнях розв'язок задач зводиться до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма другого роду виду (6). Змінюються лише ядра та коефіцієнти. Наведемо деякі з них.

а) Якщо на поверхні $x=0$ відбувається конвективний теплообмін $\lambda \frac{dT}{dx} - h_0(T - T_c) = 0$ з зовнішнім середовищем температури T_c та коефіцієнтом теплообміну h_0 , а на поверхні $x=l$ задана температура тіла $T(l) = T_m$, то коефіцієнти і ядра рівняння (6) відповідно приймають вигляд:

$$\eta_2 = g\eta_1 + \eta, \quad \eta_1 = \frac{T_m - T_a - \eta e^{\kappa l} + \Phi(l)}{g_1},$$

$$K_i(x, \xi) = -\frac{\gamma_i}{g_1} \operatorname{sh}[\kappa(l - \xi)](ge^{-\kappa x} + e^{\kappa x}) + \frac{\gamma_i}{2}(-e^{-\kappa|x-\xi|} + e^{\kappa(x-\xi)}),$$

$$\text{де } g = \frac{\kappa - b}{\kappa + b}, \quad \eta = \frac{b}{\kappa + b}(T_c - T_a), \quad g_1 = e^{\kappa l} + ge^{-\kappa l}, \quad b = \frac{h_0}{\lambda}, \quad i = 1, 2.$$

б) У випадку, коли на поверхні $x=l$ теплова ізоляція, а на поверхні $x=0$ задана температура зовнішнього середовища $T(0) = T_c$, коефіцієнт η_2 буде такими самим як за граничних умов (5), а коефіцієнт

$$\eta_1 = \frac{\Phi'(l) + \kappa e^{-\kappa l}(T_c - T_a)}{k(e^{\kappa l} + e^{-\kappa l})}. \text{ Вигляд для ядер інтегрального рівняння (6)}$$

$K_i(x, \xi)$ буде наступним:

$$K_i(x, \xi) = \varepsilon_i \operatorname{ch}[\kappa(l - \xi)](e^{-\kappa x} - e^{\kappa x}) + \frac{\varepsilon_i}{2}(e^{-\kappa(x-\xi)} - e^{-\kappa|x-\xi|}),$$

$$\text{де } \varepsilon_1 = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{k(e^{\kappa l} - e^{-\kappa l})}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\kappa_3 - \kappa_1}{k(e^{\kappa l} - e^{-\kappa l})}; \quad i = 1, 2.$$

в) Якщо на поверхні шару $x=l$ теплова ізоляція, а на поверхні $x=0$ конвективний теплообмін з зовнішнім середовищем, значення коефіцієнтів наступні:

$$\eta_2 = g\eta_1 + \eta, \quad \eta_1 = \frac{\Phi'(l) + \eta\kappa e^{\kappa l}}{g_1},$$

де $g = \frac{\kappa - b}{\kappa + b}$, $\eta = \frac{b}{\kappa + b}(T_c - T_a)$, $g_1 = \kappa(e^{\kappa l} - ge^{-\kappa l})$,

а ядра інтегралів $K_i(x, \xi)$ мають вигляд:

$$K_i(x, \xi) = -\frac{\kappa\gamma_i}{g_1} \operatorname{ch}[\kappa(l - \xi)](e^{\kappa x} - ge^{-\kappa x}) + \frac{\gamma_i}{2}(-e^{-\kappa|x-\xi|} + e^{\kappa(x-\xi)}); \quad i = 1, 2.$$

У випадку відсутності зовнішніх джерел тепла $W_r(x)$ маємо $\Phi(x) = \Phi_0(x) = \frac{W_m}{\lambda\kappa^2}[\operatorname{ch}(\kappa x) - 1]$. Якщо джерела описуються функцією

$$W_r(x) = P_t \mu e^{-\mu x}, \quad \text{то } \Phi(x) = \Phi_0(x) + \frac{P_t \mu}{\lambda\kappa} \frac{\mu \operatorname{sh}(\kappa x) + \kappa[e^{-\mu x} - \operatorname{ch}(\kappa x)]}{\mu^2 - \kappa^2}.$$

Як показано у роботі [13] температура живої тканини є сталою на віддалі більше 2 — 3 см від поверхні шкіри. Виходячи з отриманих формул за наявності джерел тепла слід зауважити, якщо їх інтенсивність буде великою, то глибина прогрівання живих тканин від поверхні шкіри може бути більшою за 2 — 3 см.

Числові результати і висновки.

Розрахунок температури T в тілі проведено за формулою (3) при наступних даних: $T_c = 25^\circ\text{C}$, $T_m = 37^\circ\text{C}$, $T_a = 37^\circ\text{C}$. На всіх графіках наведено розподіл температури T вздовж товщини x шару.

На рис. 2 та рис. 3 наведено розподіл температури за конвективного теплообміну на поверхні живої тканини з коефіцієнтом теплообміну $\epsilon = 100 \text{ Bm/m}^2\text{C}$, а всередині задано температуру тіла $T_m = 37^\circ\text{C}$ за відсутності джерел $W_r = 0 \text{ Bm/m}^3$ і метаболічної генерації тепла $W_s = 0 \text{ Bm/m}^3$.

Крива 1 на рис.2 відповідає однаковим коефіцієнтам перфузії крові $\omega_{\epsilon 1} = \omega_{\epsilon 2} = \omega_{\epsilon 3} = 0.0005 \text{ ml/s/ml}$ на всіх трьох відрізках вглибину тіла, для 2-гої кривої на першому відрізку (0 м; 0.002 м) коефіцієнт перфузії крові в десять разів менший

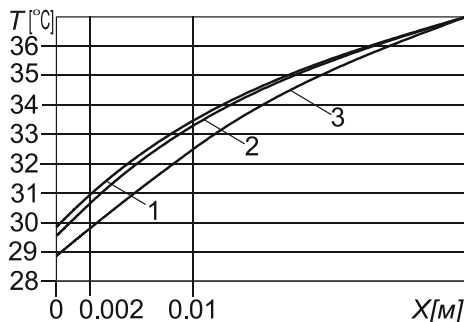


Рис. 2.

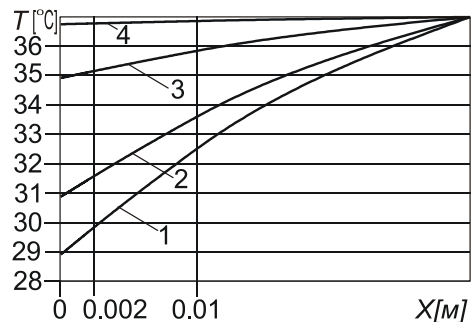


Рис. 3.

($\omega_{e1}=0,00005 \text{ ml/s/ml}$) ніж на двох інших відрізках $[0,002 \text{ м}; 0,01 \text{ м}]$ і $[0,01 \text{ м}; 0,03 \text{ м}]$, де він приймає значення $\omega_{e2}=\omega_{e3}=0,0005 \text{ ml/s/ml}$, а для 3-ої кривої на трьох відрізках вони різні і відповідно на кожному з них приймають значення $(0 \text{ м}; 0,002 \text{ м})$ — $\omega_{e1}=0,00005 \text{ ml/s/ml}$, $[0,002 \text{ м}; 0,01 \text{ м}]$ — $\omega_{e2}=0,0001 \text{ ml/s/ml}$; $[0,01 \text{ м} \text{ } 0,03 \text{ м}]$ — $\omega_{e3}=0,0005 \text{ ml/s/ml}$. Бачимо, що із зменшенням коефіцієнта перфузії на першому відрізку температура живої тканини понижується (крива 2) майже на 0.3 градуса на поверхні тіла в порівнянні з їх однаковими значеннями (крива 1). Зменшення коефіцієнта перфузії на першому відрізку тіла у десять разів і на другому його відрізку у п'ять разів понижує температуру тканини (крива 3) майже на один градус до середини шару від його зовнішньої поверхні.

На рис. 3 наведено розподіл температури вглиб шару живої тканини в залежності від коефіцієнта теплообміну з його зовнішньої поверхні. Тут коефіцієнти перфузії крові приймають такі самі значення на трьох відрізках вглиб тіла, як для третьої кривої на рис. 2. Крива 1 відповідає коефіцієнту теплообміну $\epsilon=100 \text{ Вт/м}^2\text{°С}$, і значення температури на поверхні шару тканини наближається до температури зовнішнього середовища. При зменшенні коефіцієнту теплообміну у два рази ($\epsilon=50 \text{ Вт/м}^2\text{°С}$, крива 2) в порівнянні як для кривої 1 температура на зовнішній поверхні тіла зростає на два градуси, а при подальшому його зменшенні в десять ($\epsilon=10 \text{ Вт/м}^2\text{°С}$, крива 3) та у сто ($\epsilon=1 \text{ Вт/м}^2\text{°С}$, крива 4) разів температура тіла зростає відповідно на 6°С та 8°С. При спрямуванні коефіцієнту теплообміну на поверхні шару до нуля (теплова ізоляція) температура скрізь у тілі вирівнюється до температури крові.

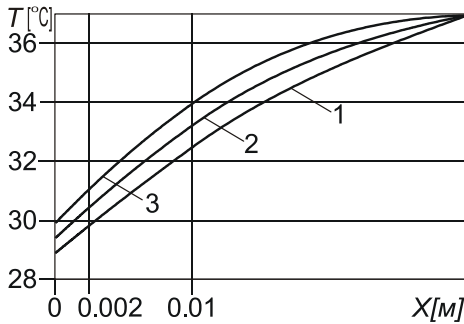


Рис. 4.

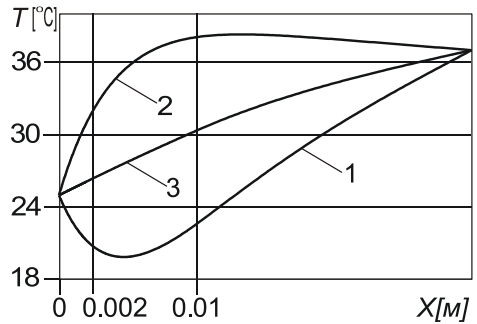


Рис. 5.

Для рис. 4 і рис. 5 коефіцієнт перфузії крові на першому відрізку $(0 \text{ м}; 0,002 \text{ м})$ тіла рівний $\omega_{e1}=0,00005 \text{ ml/s/ml}$, на другому — в два рази більший $\omega_{e2}=0,0001 \text{ ml/s/ml}$, а на третьому відрізку вглиб тіла в п'ять раз більший в порівнянні з другим $\omega_{e3}=0,0005 \text{ ml/s/ml}$.

На рис.4 задано конвективний теплообмін з коефіцієнтом тепловіддачі $\epsilon=100 \text{ Вт/м}^2\text{°С}$ на поверхні тіла $x=0 \text{ м}$, а всередині — температуру тіла $T_m = 37^\circ\text{С}$ за відсутності зовнішніх джерел тепла $W_r=0 \text{ Вт/м}^3$. Розподіл температури в тілі наведений кривою 1 рис. 4 близький до лінійного оскільки не враховує наявності метаболічної генерації тепла $W_s=0 \text{ Вт/м}^3$. Для кривої 2 метаболічна генерація тепла має величину $W_s=3000 \text{ Вт/м}^3$ в цьому випадку температура тіла

збільшується, як на зовнішній гранці шару так і в його середині та монотонно прямує до заданого значення на внутрішній границі. Для кривої 3 $W_s=6000 \text{ Вт/м}^3$ приймає у двічі більше значення ніж для 2-гої кривої. Бачимо, що температура в живій тканині на всій глибині зростає при збільшенні величини метаболічної генерації тепла. Числові дослідження показали, що для збереження температури живої тканини в межовому шарі нижчою за температуру крові метаболічна генерація тепла не повинна перевищувати значення $W_s=6000 \text{ Вт/м}^3$.

На зовнішній границі шару задано температуру середовища ($T_c = 25^\circ\text{C}$) (рис.5) та внутрішній границі — температуру тіла ($T_m = 37^\circ\text{C}$). Метаболічні джерела тепла відсутні $W_r=0 \text{ Вт/м}^3$. Тіло знаходиться під дією зовнішніх джерел тепла розподілених за експоненціальним законом $W_r(x) = P_t \mu e^{-\mu x}$, коли $\mu=250 \text{ м}^{-1}$. Розглянуто випадки як охолодження $P_t = -2000 \text{ Вт/м}^2$ крива 1 так і нагріву $P_t = 2000 \text{ Вт/м}^2$ крива 2 та без джерел $P_t=0 \text{ Вт/м}^2$ крива 3. Як бачимо тіло більше охолоджується ближче до зовнішньої границі тіла та досягає свого мінімуму вздовж лінії, що знаходиться на віддалі $0,0047 \text{ м}$ від неї. Однак максимальне значення температури тіла при нагріванні знаходиться майже у три рази даліше від зовнішньої границі, вздовж лінії $x=0,0132 \text{ м}$.

Висновки. Приведено рівняння, що описує температурне поле в межовому шарі живої тканини за кусково-постійних коефіцієнтів перфузії крові. Розв'язок отриманого частково-виродженого диференціального рівняння зведено до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Врахування пониження коефіцієнта перфузії крові до поверхні шару дає можливість точніше (майже на один градус) визначити розподіл температури у живій тканині в порівнянні коли він однаковий вздовж його товщини. Зі спаданням коефіцієнта тепловіддачі на поверхні живої тканини аж до теплової ізоляції температура на ній підвищується до температури всередині тіла. Зростання величини метаболічної генерації тепла в межовому шарі живої тканини приводить до збільшення його температури, але щоб її величина не перевищила температуру всередині тіла її величина має бути обмеженою.

Література

- [1] *Diller, K. R. Modeling of Bioheat Transfer Processes at High and Low Temperatures / K. R. Diller // Adv. Heat Transfer. — 1999. — 22. — P. 157-357.*
- [2] *Clegg, S. T. Reconstruction of Experimental Hyperthermia Temperature Distributions: Application of State and Parameter Estimation/ S. T. Clegg, R. B. Roemer // ASME J. Biomech. Eng. — 1993. — 115. — P. 380-388.*
- [3] *Liu, J. Studies on the Three-Dimensional Temperature Transients in the Canine Prostate During Transurethral Microwave Thermal Therapy / J. Liu, L. Zhu, L. X. Xu // ASME J. Biomech. Eng. — 2000. — 122. — P. 372-379.*
- [4] *Seip, R. Noninvasive Estimation of Tissue Temperature Response to eating Fields Using Diagnostic Ultrasound / R. Seip, E. S. Ebbini // IEEE Trans. BioMed. Eng. — 1995. — 42. — P. 828-839.*

- [5] *Pustovalov, V. K.* Thermal Processes under the Action of Laser Radiation Pulse on Absorbing Granules in Heterogeneous Biotissues / V. K. Pustovalov // *Int. J. Heat Mass Transf.* — 1993. — **36**. — P. 391-399.
- [6] *Vyas, R.* Green's Function Solution to the Tissue Bioheat Equation / R. Vyas, M. L. Rustgi // *Med. Phys.* — 1992. — **19**. — P. 1319-1324.
- [7] *Gao, B.* Application of the Time-Dependent Green's Function and Fourier Transforms to the Solution of the Bioheat Equation / B. Gao, S. Langer, P. M. Corry // *Int. J. Hyperthermia.* — 1995. — **11**. — P. 267-285.
- [8] *Deng Z. S.* Analytical Study on Bioheat Ntransfer Problems with Spatial or Transient Heating on Skin Surface or Inside Biological Bodits / Z. S. Deng, J. Liu // *ASME J. Biomech. Eng.* — 2002. — **124**. — P. 638-649.
- [9] *Crezee, J.* The Theoretical and Experimental Evaluation of the Heat-Balance in Perfused Tissue / J. Crezee, J. Mooibroek, J. J. W. Lagendijk, G. M. J. Vanleeuwen // *Phys. Med. Biol.* — 1994. — **39**. — P. 813-832.
- [10] *Кушнір, Р. М.* Про побудову розв'язків звичайних лінійних диференціальних рівнянь з кусково-сталими коефіцієнтами / Р. М. Кушнір // *Доп. АН УРСР. Сер. А.* — 1980. — № 9. — С. 54-57.
- [11] *Коляно, Ю. М.* Об одном эффективном методе решения задач термоупругости для кусочно-однородных тел, нагреваемых внешней средой / Ю. М. Коляно, В. С. Попович // *Физ.-хим. механика материалов.* — 1976. — №2. — С. 108-112.
- [12] *Хапко Б. С.* Про розв'язок крайової задачі для диференціальних рівнянь у частинних похідних з імпульсними коефіцієнтами // *Мат. методи і фіз.- мех. поля.* — 2006. — **49**. — № 3. — С. 47-55.
- [13] *Liu, J.* Estimation of Blood Perfusion Using Phase Shift in Temperature Response to Sinusoidal Heating at the Skin Surface / J. Liu, L. X. Xu // *IEEE Trans. Biomed. Eng.* — 1999. — **46**. — P. 1037-1043.
- [14] *Pennes, H. H.* Analysis of Tissue and Arterial Blood Temperatures in the Resting Human Forearm / H. H. Pennes // *J. Appl. Physiol.* — 1948. — **1**. — P. 93-122.
- [15] *Верлань, А. Ф.* Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — Киев: Наук. думка, 1978, — 292 с.
- [16] *Хапко, Б.С.* Температурне поле та прогин півбезмежної пластинки із залежними від координати коефіцієнтами тепловіддачі / Б. С. Хапко, А. І. Чиж // *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології.* — 2009. — Вип. 9. — С. 133-143.

Modelling and investigation of temperature field in the boundary layer of biological bodies

Bogdan Khapko

A problem on finding temperature field in the boundary layer of biological body when blood perfusion coefficient depends on coordinate is solved. Temperature distribution is caused by the temperature differences between the inside and outside of a body and by the outside heat sources and metabolic heat generation. Heat transfer problem is formulated by using generalized Heaviside functions. Applying the variation of constants method this problem is reduced to the Fredholm integral equation of the second kind. Numerical method of Simpson quadratures was used to solve integral equation. Analysis of temperature distribution in the boundary layer for some cases of boundary conditions is performed. Dependence on temperature inside body from metabolic heat generation and outside heat source is analyzed.

Моделирование и исследование температурного поля в приповерхностном слое живой ткани

Богдан Хапко

Рассмотрено задачу об определении температурного поля в приповерхностном слое живой ткани, которое обусловлено разницей температур внешней среды и внутри тела, а также метаболической генерацией тепла и источниками тепла, когда коэффициент перфузии крови зависит от координаты. Задачу теплопроводности в которой коэффициент перфузии крови записано с использованием функции Хэвисайда, методом вариации постоянной сведено, к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Для нахождения температуры в теле построено численную схему решения интегрального уравнения с использованием метода квадратурных формул Симпсона. Приведено численный анализ распределения температуры в приповерхностном слое при задании различных краевых условий. Проанализировано распределение температуры в глубь тела в зависимости от метаболической генерации тепла и источника тепла, коэффициент перфузии крови, которого зависит от координаты.

Отримано 14.03.17