

Кільцеве розшарування між тілами за локального охолодження коловим стоком тепла

Мар'яна Микитин¹, Христина Середницька², Богдан Монастирський³,
Ростислав Мартиняк⁴

¹ Математик II кат., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

² К. ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

³ К. ф.-м. н., ст.н.с., Університет Каліфорнії, Девіс, США

⁴ Д. ф.-м. н., проф., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Розглянуто безфрикційний контакт пружного півпростору з жорсткою термоізолюваною основою за локального розшарування між ними по кільцевій ділянці під дією розподілених по колу стоків тепла, розміщених у півпросторі на деякій віддалі від його поверхні. Відповідна контактна задача термопружності зведена до сингулярного інтегрального рівняння відносно висоти утвореного кільцевого зазору. Розв'язок сингулярного інтегрального рівняння та внутрішній і зовнішній радіуси зазору визначено числово, використовуючи метод колокацій і метод послідовних наближень. Проаналізовано залежності форми зазору та нормальних контактних напружень від відстані між стоком тепла і поверхнею півпростору та від інтенсивності стоку тепла.

Ключові слова: пружний півпростір, жорстка термоізолювана основа, розподілені по колу стоки тепла, кільцеве розшарування, сингулярне інтегральне рівняння.

Вступ. Взаємодія тіл з узгодженими поверхнями може супроводжуватися виникненням зазорів між ними під дією силових і теплових чинників, локалізованих в приповерхневих областях. У праці [1] зроблено огляд досліджень розшарувань між тілами, зумовленими механічними навантаженнями. Термомеханічне порушення контакту півпросторів, зумовлене локальними ділянками з термоопором або термоізоляцією на поверхнях розмежування, вивчено у працях [2-5]. Досліджено термомеханічне розкриття та частковий контакт берегів міжфазної тріщини за наявності теплопроникного заповнювача тріщини та плівок на її берегах [6-9]. Вивчено розшарування на лінії контакту двох півплощин, зумовлене підповерхневим круговим включенням в одній з них, при нагріванні спряжених тіл за гладкого їх контакту [10] та контакту зі зчепленням і фрикційним проковзуванням [11]. Розглянуто [1,12,13] виникнення кругового зазору між пружним півпростором і жорсткою термоізолюваною або ізотермічною

основною за дії зосередженого стоку тепла. Виявлено [13], що коловий стік тепла може зумовити появу колового або кільцевого розшарування між півпростором та основою.

У праці [14] досліджено осесиметричне температурне поле в кусково-однорідному просторі за дії в кожному півпросторі колового джерела тепла та наявності кругової міжфазної плівки із заданою температурою. Температурні поля і напруження у півпросторі, однорідному і кусково-однорідному просторі за тепловиділення на круговій області досліджено у працях [15-19].

У цій статті розглянуто контактну задачу термопружності про взаємодію пружного півпростору з жорсткою термоізолюваною основою за появи між ними кільцевого зазору під дією колового стоку тепла в півпросторі. Проаналізовано зміну форми і розташування зазору та контактної тиску зі зміною інтенсивності стоку тепла та відстані від поверхні півпростору до стоку.

1. Формулювання задачі

Розглянемо пружний теплопровідний ізотропний півпростір $z > 0$, що під дією прикладеного на нескінченності тиску p контактує без тертя з термоізолюваною жорсткою основою $z = 0$. У півпросторі в паралельній до його межі площині $z = d$ вздовж кола радіуса R діють рівномірно розподілені стоки тепла інтенсивності ω . Вважаємо, що між тілами реалізується односторонній контакт, за якого через поверхню спряження передаються лише стискальні нормальні напруження. Неможливість появи розтягувальних нормальних зусиль реалізується шляхом розходження поверхонь тіл і утворення між ними зазорів.

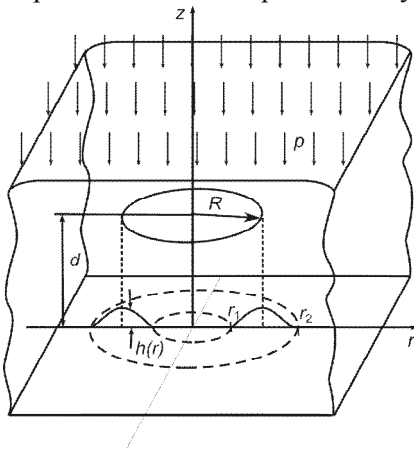


Рис. 1

r_1 і r_2 відповідно (рис. 1). Вважаємо, що поверхня зазору теплоізолювана і вільна від напружень.

Зазор не впливає на температурне поле в пружному півпросторі, оскільки вся його поверхня залишається теплоізолюваною. Тому температура у частково

У праці [13], виявлено, що такі стоки тепла за збільшення їх інтенсивності можуть зумовити два види розшарування: кільцеве, якщо відстань від стоків до поверхні менша за деяке критичне значення d_{cr} , де $d_{cr} \approx 1,1R$, та кругове, якщо $d > d_{cr}$.

Тут дослідимо контакт пружного півпростору і жорсткої основи за кільцевого розшарування між ними під дією колового стоку тепла.

Розглянемо виникнення кільцевого міжконтактного зазору, внутрішній і зовнішній радіус якого дорівнюють

відшарованому півпросторі буде такою ж, як і в півпросторі за повного його контакту з основою [13]:

$$T(r, z) = -\frac{R\omega}{\pi^2\lambda} \left[\frac{1}{D_-} K(4rR/D_-^2) + \frac{1}{D_+} K(4rR/D_+^2) \right],$$

Тут $D_- = \sqrt{(r+R)^2 + (z-d)^2}$, $D_+ = \sqrt{(r+R)^2 + (z+d)^2}$;

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-m(\cos x)^2}}, \quad E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-m(\sin x)^2} dx \quad \text{— повні еліптичні}$$

інтеграли I і II роду відповідно.

Тензор напружень σ і вектор переміщень u в півпросторі подамо у вигляді сум

$$\sigma = \sigma^0 + \sigma^1, \quad u = u^0 + u^1.$$

Тут σ^0 , u^0 описують основний напружено-деформований стан півпростору при його повному контакті з основою за дії прикладеного на нескінченності тиску p і розподіленого по колу стоку тепла інтенсивності ω ; σ^1 , u^1 — збурення напружено-деформованого стану, зумовлені кільцевим розшаруванням між півпростором і основою. Основний напружено-деформований стан описаний формулами (4) праці [13], відповідно до яких нормальні напруження $\sigma_{zz}^0(r, z)$ мають вигляд

$$\sigma_{zz}^{(0)}(r, z) = -p + \mu \frac{\omega R \alpha_t (1+\nu)}{\pi \lambda (1-\nu)} \left[\frac{1}{D_-} K(4rR/D_-^2) + \frac{1}{D_+} K(4rR/D_+^2) - \frac{(z-d)^2}{((r-R)^2 + (z-d)^2) D_-} E(4rR/D_-^2) - \frac{(z+d)^2}{((r-R)^2 + (z+d)^2) D_+} E(4rR/D_+^2) \right],$$

де ν — коефіцієнт Пуассона, μ — модуль зсуву, α_t — коефіцієнт лінійного теплового розширення півпростору.

Поле збурень задовольняє такі крайові умови:

$$z = \infty: \sigma_{rz}^1 = 0, \quad \sigma_{zz}^1 = 0, \quad r \in [0, \infty);$$

$$z = 0: \sigma_{rz}^1 = 0, \quad r \in [0, \infty);$$

$$\sigma_{zz}^1 = -\sigma_{zz}^0, \quad r \in [r_1, r_2],$$

$$u_z = 0, \quad r \in [0, r_1] \cup [r_2, \infty).$$

2. Сингулярні інтегральні рівняння задачі

Використовуючи метод функцій міжконтактних зазорів [20, 21, 22] та інтегральне перетворення Ганкеля, компоненти тензора напружень σ^1 і вектора переміщень u^1 подамо через висоту зазору $h(r)$ між півпростором і основою.

Для визначення функції $h(r)$ отримаємо сингулярне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{h'(\rho) d\rho}{\rho - r} - \frac{1}{2\pi r} \int_{r_1}^{r_2} h'(\rho) \ln|\rho - r| d\rho - \frac{1}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} h'(\rho) k_c(r, \rho) d\rho = \sigma_{zz}^0(r, 0), \quad r \in [r_1, r_2],$$

(8)

$$\text{де } k_c(r, \rho) = \begin{cases} \frac{1}{\rho - r} \left(E\left(\frac{r}{\rho}\right) - 1 \right) + E\left(\frac{r}{\rho}\right) \frac{1}{r + \rho} + \frac{1}{2r} \ln|\rho - r|, & r < \rho, \\ \frac{2}{r} K\left(\frac{\rho}{r}\right) + \frac{1}{\rho - r} \left(E\left(\frac{\rho}{r}\right) - 1 \right) - E\left(\frac{\rho}{r}\right) \frac{1}{r + \rho} + \frac{1}{2r} \ln|\rho - r|, & r > \rho. \end{cases}$$

$K(r)$, $E(r)$ — повні еліптичні інтеграли першого та другого роду відповідно.

Ядро $k_c(r, \rho)$ неперервне при $\rho \rightarrow r$, в чому можна переконатися, розвинувши еліптичні інтеграли в ряд в околі одиниці.

Функція $h(r)$ повинна задовольняти умови плавного змикання берегів зазору

$$\begin{aligned} h(r_1) &= h(r_2) = 0, \\ h'(r_1) &= h'(r_2) = 0. \end{aligned}$$

Умови (11) служать для визначення внутрішнього і зовнішнього радіусів кільцевого розшарування r_1 і r_2 .

Для числового розв'язування СІР (8) за умов (10), (11) використано розвинуту у праці [23] методику, що базується на поданні функції $h(r)$ у вигляді ряду за поліномами Чебишева другого роду і методі колокацій та на ітераційній процедурі визначення радіусів кільцевого зазору r_1 , r_2 на основі методу послідовних наближень.

3. Аналіз результатів

Числові розрахунки проведено для безрозмірних величин $\bar{d} = \frac{d}{R}$, $\bar{a} = \frac{a}{R}$, $\bar{r} = \frac{r}{R}$,

$\bar{\omega} = \frac{\omega a_t (1 + \nu)}{\pi \lambda (1 - \nu)}$, $\bar{p} = \frac{p}{\mu}$, $\bar{h} = \frac{h}{R}$, $\bar{\sigma}_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{\mu}$. Тут $a = r_2 - r_1$ — ширина кільцевого зазору.

Аналізували залежність форми зазору та контактних напружень від відстані \bar{d} між коловим стоком тепла та поверхнею півпростору за умови, що ширина кільця розшарування залишається незмінною ($\bar{a} = 0.2$).

На рис. 2 зображено висоту зазору та його розташування на поверхні розмежування півпростору й основи для чотирьох різних відстаней від стоку тепла до поверхні: $\bar{d} = 0.4$ (крива 1), $\bar{d} = 0.6$ (крива 2), $\bar{d} = 0.8$ (крива 3), $\bar{d} = 1$ (крива 4) за інтенсивності стоку тепла $\bar{\omega} = 0.00025$, $\bar{\omega} = 0.00027$, $\bar{\omega} = 0.000287$, $\bar{\omega} = 0.00029$ відповідно. Нормальні стискальні напруження на безмежності фіксовані ($\bar{p} = 0.001$). Бачимо, що при віддаленні стоку від поверхні висота зазору стрімко зменшується. Так при збільшенні відстані \bar{d} від 0.4 до 1 максимальна висота зазору зменшується приблизно в 67 разів. Водночас при цьому відбувається дрейф зазору до осі симетрії $z = 0$: за відстані від стоку до поверхні $\bar{d} = 0.4$ внутрішній радіус зазору $\bar{r}_1 = 0.69$, а за відстані $\bar{d} = 1$ він в 17 разів менший — $\bar{r}_1 = 0.065$.

На рис.3 подано розподіл нормальних контактних напружень $\sigma_{zz}(r, 0)$ між півпростором і основою для трьох значень відстані \bar{d} від стоку до поверхні та інтенсивності $\bar{\omega}$ стоку (крива 1 — $\bar{d} = 0.4$, $\bar{\omega} = 0.00025$, крива 2 — $\bar{d} = 0.8$, $\bar{\omega} = 0.000287$, крива 3 — $\bar{d} = 1$, $\bar{\omega} = 0.00029$). Графіки мають три характерні ділянки: перша відповідає контактному тиску на круговій області контакту $\bar{r} < \bar{r}_1$, друга — зазору $\bar{r}_1 < \bar{r} < \bar{r}_2$, третя — області контакту $\bar{r} > \bar{r}_2$ ззовні зазору. На круговій ділянці контакту нормальні контактні напруження досягають мінімуму в центрі цієї ділянки (при $z = 0$). Вздовж зазору $\bar{\sigma}_{zz}(r, 0) = 0$, оскільки поверхня зазору ненавантажена. Зовні зазору при віддаленні від нього нормальні контактні напруження спадають, асимптотично прямуючи до заданих на нескінченності стискальних напружень $\bar{\sigma}_{zz} = -0.001$. Що більша відстань від стоку тепла до поверхні, то стрімкіше спадають контактні напруження при віддаленні від внутрішнього і зовнішнього контуру кільцевого зазору. Мінімальні контактні напруження на центральній круговій ділянці контакту завжди більші, ніж прикладені на безмежності напруження.

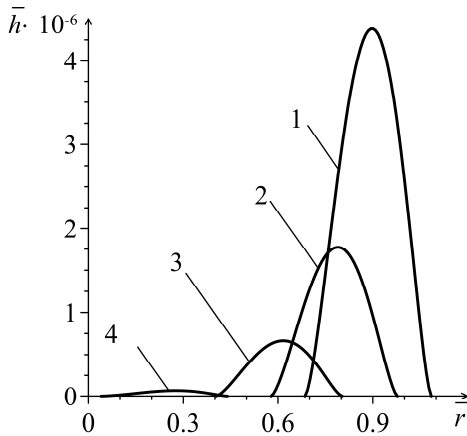


Рис. 2. Висота зазору $h(r)$.

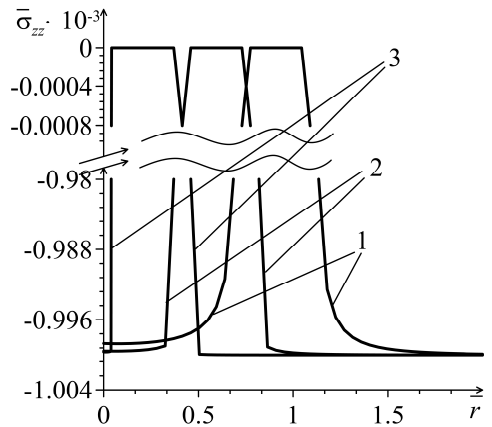


Рис. 3. Розподіл контактних нормальних напружень $\sigma_{zz}(r, 0)$.

Висновки. Розглянуто взаємодію пружного півпростору з жорсткою термоізолюваною основою за виникнення між ними кільцевого зазору під дією колового стоку тепла, розташованого в півпросторі у паралельній до його межі площині. Відповідну задачу термопружності зведено до сингулярного інтегрального рівняння відносно висоти міжконтактного зазору та умов плавного змикання його берегів, що служать для визначення внутрішнього та зовнішнього радіусів кільцевого розшарування. На основі числового розв'язку цього рівняння досліджено висоту і розташування кільцевого зазору та контактний тиск для різних значень інтенсивності стоку тепла і відстані від нього до поверхні півпростору за умови, що ширина зазору фіксована. Виявлено, що з віддаленням стоку від поверхні різко зменшується висота зазору і відбувається його дрейф до осі симетрії. На круговій ділянці контакту нормальні контактні напруження досягають мінімуму в центрі цієї ділянки. Зовні зазору при віддаленні від нього нормальні контактні напруження монотонно спадають до стискальних напружень, заданих на нескінченності.

Література

- [1] *Monastyrskyy B.Ye., Mykytyn M.M.* Axially symmetric problem of local separation of an elastic half-space from a rigid base due to a point source of cooling // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2011. — Vol. 178, No 5. — P. 467-480.
- [2] *Comninou M., Dundurs J.* On lack of uniqueness in heat conduction through a solid to solid contact // *Trans. ASME: J. Heat Transfer*. — 1980. — Vol. 102, No. 2. — P. 156-162.
- [3] *Krishtafovich A.A., Martynyak R.M.* Thermoelastic contact of anisotropic half-spaces with thermal resistance. // *International Applied Mechanics*. — 1998. — 34, № 7. — P. 629-634.
- [4] *Krishtafovich A.A., Martynyak R.M.* Lamination of anisotropic half-spaces in the presence of contact thermal resistance. // *International Applied Mechanics*. — 1999. — 35, № 2. — P. 159-164.
- [5] *Martynyak R.M., Chumak K.A.* Thermoelastic delamination of bodies in the presence of a heat-conducting filler of the intercontact gap // *Materials Science*. — 2009. — 45, № 4. — P. 513-522.

- [6] *Мартыняк Р.М., Середницькая Х.И.* Термоупругость кусочно-однородного тела с межфазной теплопроницаемой трещиной // Теорет. и прикл. механика. — 2012. — Вып. 50. — С. 91–98.
- [7] *Goldstein R.V., Kit H.S., Martynuk R.M., Serednytska Kh.I.* Effect of partial closure of an interface crack with heat-conducting filler and surface films in the case of thermal loading of a bimaterial // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 198, No 1. — P. 75-86.
- [8] *Мартыняк Р.М., Середницька Х.И.* Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. — Львів: Растр-7, 2017. — 168 с.
- [9] *Martynuk R.M.* Thermal opening of an initially closed interface crack under conditions of imperfect thermal contact between its lips // Mater. Sci. — 1999. — 35, No. 5. — P. 612–622.
- [10] *Мартыняк Р.М.* Порухення контакту півпросторів при термомеханічній дії підповерхневого включення // Доп. НАН України. — 1998. — № 12. — С. 71-77.
- [11] *Malanchuk N.I., Slobodyan B.S., Martynuk R.M.* Friction sliding of elastic bodies in the presence of subsurface inclusion // Materials Science. — 2017. — 52, No. 6. — P. 819–826.
- [12] *Kit H.S., Monastyr'skyi B.Ye.* Thermoelastic interaction of two semi-infinite bodies under condition of local contact absence // Therm. Stresses'99: Proc. 3rd Int. Congr. on Thermal Stresses, Cracow (Poland), June 13-17, 1999. — Cracow: Cracow. Univ. of Techn., 1999. — P. 123-126.
- [13] *Монастырский Б.С., Мыкытын М.М.* Контакт упругого полупространства и жесткого основания под действием сосредоточенного источника охлаждения. // Теор. и прикладная механика. — 2009. — Вып. 46. — С. 36-41.
- [14] *Mkhitaryan S.M., Shekyan L.A., Verlinski S.V., Aidun D. & Marzocca P.* Stationary theory of heat-conductivity for anaxi-symmetrical piece homogeneous space with circular inclusion // J/Thermal Stresses. — 2012. — 35, 5. — P. 424-447.
- [15] *Андрійчук Р.М., Кім Г.С.* Осесиметричне стаціонарне температурне поле у біматеріальному тілі за тепловиділення на круговій області // Прикл. проблеми механіки і математики. — 2015. — Вип. 13. — С. 58 — 62.
- [16] *Kit H.S., Andriychuk R.M.* Thermoelastic State of a Half Space with Fixed Boundary Under the Conditions of Heat Generation in a Circular Domain Parallel to the Boundary // Materials Science. — 2017. — 53, № 3. — P. 398–406.
- [17] *Кім Г. С.* Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з тепловиділенням на круговій області (тріщині) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2008. — 51, № 4. — С. 120–128.
- [18] *Кім Г.С., Сушко О.П.* Стаціонарне температурне поле у півбезмежному тілі з теплоактивним або теплоізолюваним дисковим включенням // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2011. — Вип. 13. — С. 67 — 80.
- [19] *Kit H.S., Sushko O.P.* Axially symmetric problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with thermally active or thermally insulated disk inclusion (crack) // Journal of Mathematical Sciences. — 2011. — Vol. 176, No 4. — P. 561-577.
- [20] *Мартыняк Р.М.* Метод функцій міжконтактних зазорів у задачах локального порушення контакту пружних півпросторів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. - 2000. - 43, № 1. - С.102-108.
- [21] *Мартыняк Р.М.* Механотермодифузійна взаємодія тіл з контактено-поверхневими неоднорідностями і дефектами: Дис. ... д-ра фіз.-мат. наук: 01.02.04. — Львів, 2000. — 372 с.
- [22] *Monastyr'skyi B.E., Martynuk R.M.* Contact of Two Half Spaces One of Which Contains a Ring-Shaped Pit. Part 1. Singular Integral Equation // Materials Science. — 2003. — 39, No. 2. — P. 206–213.
- [23] *Monastyr'skyi B.E.* Problem of Contact of Two Half Spaces with a Ring-Shaped Groove in One of Them. Part 2. Numerical Method and Results // Materials Science. — 2003. — 39, No. 4. — P. 505–510.

The ring delamination between bodies under the action of heat sinks distributed along a circle

Maryana Mykytyn, Kristina Serednytska, Bohdan Monastyrskyy, Rostyslav Martynyak

The frictionless contact an elastic half-space and a rigid thermo-insulated base with a local delamination between them on a ring domain under the action of heat sinks distributed uniformly along a circle and located in the half-space some distance away from its surface, is considered. The corresponding contact thermos-elasticity problem is reduced to a singular integral equation for a height of a ring gap. The solution of the singular integral equation and the internal and external radius of the ring are numerically determined using the method of collocation and the method of successive approximations. The dependence of the form of gap and normal contact stresses on the distance between the heat sinks and the surface of the half-space and the intensity of the heat sink are analyzed.

Кольцевое расслоение между телами при локальном охлаждении распределенным по окружности стоком тепла

Марьяна Мыкытын, Христина Середницкая, Богдан Монастырский, Ростислав Мартыняк

Рассмотрено безфрикционный контакт упругого полупространства и жесткого термоизолированного основания при локальном расслоение между ними по кольцевом участке под действием распределенных по окружности стоков тепла, размещенных в полупространстве на некотором расстоянии от его поверхности. Соответствующая контактная задача термоупругости сведена к сингулярному интегральному уравнению относительно высоты образованного кольцевого зазора. Решение сингулярного интегрального уравнения, внутренний и внешний радиусы зазора определены численно, используя метод коллокации и метод последовательных приближений. Проанализированы зависимости формы зазора и нормальных контактных напряжений от расстояния между стоком тепла и поверхностью полупространства и от интенсивности стока тепла.

Отримано 11.12.17