

Долінська Є.Б.,

кандидат економічних наук,
провідний спеціаліст відділу методології
Національного кредитно-рейтингового агентства «Рюрик»,

Долінський Л.Б.,

кандидат економічних наук,
доцент кафедри економіко-математичних методів
Київського національного економічного університету
імені Вадима Гетьмана

ОЦІНКА РИЗИКУ НЕПЛАТЕЖУ В ОПЕРАЦІЯХ ФІНАНСОВОГО ЛІЗИНГУ З ВИКОРИСТАННЯМ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

Розглянуто актуальні питання оцінки надійності операцій фінансового лізингу. Запропоновано ймовірнісний підхід до оцінки надійності лізингових контрактів. Визначено алгоритм, що дає змогу моделювати всі можливі сценарії перебігу подій при виконанні договору лізингу. З використанням теорії графів побудовано моделі, які описують різні сценарії виконання лізингового контракту. На основі цих моделей виведено формули для розрахунку ймовірностей виконання договору фінансового лізингу.

The up-to-date questions of reliability estimation for leasing contracts are considered. The stochastic approach towards reliability estimation for leasing operations is suggested. The algorithm for modeling all possible scenarios of lease contracts execution is determined. The models describing different scenarios of lease execution are developed with the use of graph theory. The formulas for estimation of probability of lease complete fulfilment are based on these models.

Однією із суттєвих перешкод на шляху розвитку української економіки є високий рівень фізичного та морального зносу техніки та технологій, що використовуються нині вітчизняними підприємствами. Без інвестицій в оновлення основних засобів наша держава не може сподіватися на досягнення проголошених нею соціальних та економічних цілей. Для багатьох підприємств України заміна основних фондів є болючим питанням, що потребує термінового вирішення.

Сучасні ринкові засоби розвитку матеріально-технічної бази виробництва характеризуються широким застосуванням суб'єктами господарювання не лише власних, а й залучених коштів. До зручних фінансових механізмів залучення коштів безперечно можна віднести лізингові операції, які є розумною альтернативою борговим цінним паперам та банківському кредитуванню.

В усьому світі механізм лізингу відіграє важливу роль у стимулюванні залучення інвестицій для оновлення виробничих потужностей підприємств. Проте особливу актуальність має лізинг в умовах трансформаційної економіки. Адже він виступає тим ефективним фінансовим механізмом, що дає можливість придбати необхідну техніку на умовах поступової сплати коштів, зароблених, зокрема, на її експлуатації. В сучасних умовах саме лізинг для більшості вітчизняних

© Долінська Є.Б., Долінський Л.Б., 2007

підприємств може стати одним із реальних джерел технічного й технологічного переоснащення.

Сьогодні фінансовий механізм лізингу набуває дедалі більшої популярності в Україні. Проте на шляху його розвитку в нашій державі постають об'єктивні перешкоди, оскільки здійснення лізингової діяльності в умовах трансформаційної економіки нерозривно пов'язане з ризиками. Саме тому важливою складовою лізингових операцій є питання оцінки надійності їх здійснення. Складність такої оцінки є одним з основних деструктивних елементів, що заважає розвитку ринку лізингових операцій та забезпеченню виконання лізингових угод у об'єкті, що оцінюється фахівцями в десятки мільярдів доларів¹.

Таким чином, одним із найважливіших елементів діяльності лізингової компанії на українському ринку є аналіз надійності клієнта та оцінка ризику дефолту (неплатежу) за договорами фінансового лізингу.

Актуальність описаної проблеми зумовила вибір теми роботи. Вона присвячена оцінці надійності лізингових угод з використанням теорії графів.

На наш погляд, питанню оцінки ризику та надійності лізингових операцій у вітчизняній літературі приділяється недостатньо уваги. Наразі в Україні не існує єдиної загальноприйнятої методології оцінки ризику неплатежу, зокрема в лізингових операціях. Законодавча база з питань лізингової діяльності² відрізняється неповнотою. У низці праць³ розглянуто методи розрахунку розмірів лізингових платежів, проте вони не враховують ступеня надійності лізингоодержувача (платника). В окремих працях⁴ описано можливості оптимізації графіка лізингових платежів, однак вони не розглядають питання надійності лізингових операцій.

Деякі моделі оцінки надійності лізингових операцій було розглянуто у праці “Моделі оцінки надійності лізингових операцій з використанням ланцюгів Маркова”⁵, проте підхід з використанням теорії графів висвітлюється вперше.

Кожний договір лізингу є індивідуальним і має свої особливості. Проте при укладанні договору лізингу в ньому обов'язково відображають графік лізингових платежів, їх періодичність та розмір, порядок нарахування пені у разі прострочення оплати, допустиму кількість прострочених платежів до моменту розірвання договору — k , а також порядок розірвання договору при невиконанні лізин-

¹ Дацюк Л. Ще раз про лізинг // Хрещатик. — 2004. — 24 листоп. — с. 7.

² Закон України “Про фінансовий лізинг” № 1381-IV від 11 грудня 2003 року; Закон України “Про податок на додану вартість”. — Відомості Верховної Ради, 1997. — № 21. — Ст. 156 зі змінами.

³ Газман В.Д. Финансовый лизинг: Учебное пособие. — М.: ГУ ВШЭ, 2003. — 392 с.; Прилуцкий Л. Помощь в расчете лизинговых платежей // Лизинг-Курьер, 1999. — № 6. — С. 4—9; Методические рекомендации по расчету лизинговых платежей. — М.: Министерство экономики РФ, 1996.

⁴ Шмырев В.И., Осадчий М.С. Задача оптимизации лизинговых платежей // Сибирский журнал индустриальной математики, 2001. — Том IV. — № 2 (8). — С. 205—211.

⁵ Долінська Є.Б. Моделі оцінки надійності лізингових операцій з використанням ланцюгів Маркова // Моделі управління в ринковій економіці, 2005. — № 8. — С. 69—82.

годержувачем своїх зобов'язань з оплати. Повне виконання договору передбачає сплату усіх лізингових платежів та додаткових зобов'язань з оплати, що виникли під час виконання договору лізингу.

У цій статті аналізуються ймовірності оплати для найпоширенішого типу лізингових договорів, в яких можливе одноразове прострочення платежу з нарахуванням пені ($k = 1$). Прострочення платежу можливе лише до моменту настання часу наступного платежу. Якщо й після цього строку лізинговий платіж не було оплачено, то договір лізингу розривається, а предмет лізингу повертається лізингодавцю.

Використовуючи математичний апарат теорії графів⁶, побудуємо моделі оцінки ризику неплатежу шляхом знаходження ймовірностей виконання лізингової угоди у разі виникнення прострочення оплати у будь-якому періоді.

Вершинами графів будуть події настання оплати певного платежу (A_j) або прострочення певного платежу (B_j , де $B_j = \bar{A}_j$ — подія протилежна події A_j). Окрім того, маємо ще дві вершини — Y та Z , потрапивши до яких, вже не можна перейти до якоїсь іншої вершини. Вершина Y описує настання дефолту (остаточного неплатежу) за договором, а вершина Z — його повне виконання. Вершини графу пов'язані між собою та впорядковані. З вершини кожного платежу (A_j) можна перейти або до наступного платежу (A_{j+1}), або до вершини, що вказує на його прострочення (B_j). З кожної вершини B_j можна перейти або до наступного платежу (A_{j+1}), здійснивши оплату простроченого платежу, або до вершини дефолту договору (Y). Подію оплати простроченого j -го платежу та перехід до $(j+1)$ -го платежу позначимо C_j . До стану повного виконання договору (Z) можна перейти або зі стану оплати останнього платежу (A_n), або зі стану прострочення останнього платежу (B_n) за умови його оплати. Кількість вершин графу є скінченною. Отже, ми використовуємо кінцеві орієнтовані пов'язані графи без циклів з елементарними шляхами⁷.

Наведемо приклад застосування графів для опису лізингової угоди. Нехай лізинговий контракт передбачає здійснення трьох платежів ($n = 3$). За умовами контракту допускається один прострочений платіж у будь-якому періоді до настання розриву договору ($k = 1$). Представимо всі можливі сценарії перебігу подій при виконанні договору у вигляді окремих графів (рис. 1) та наведемо їх короткий опис.

Граф, представлений на рис. 1.1, описує такий випадок, коли при виконанні договору лізингу не виникло прострочень оплати та всі платежі було сплачено вчасно. Графи рис. 1.2—1.4 описують такі випадки, коли на одному з етапів (першому, другому чи третьому відповідно) виникає прострочення платежу, але потім здійснюється його оплата і так далі. Зазначимо, що на графах зображені лише ті можливі варіанти перебігу подій, що сприяють повному виконанню договору. Тому графи містять лише вершини, які вказують на настання оплати чи простро-

⁶ Холл М. Комбинаторика. — М.: Мир, 1970. — 424 с.

⁷ Авондо-Бодино Дж. Применение в экономике теории графов. — М.: Прогресс, 1966. — 160 с.

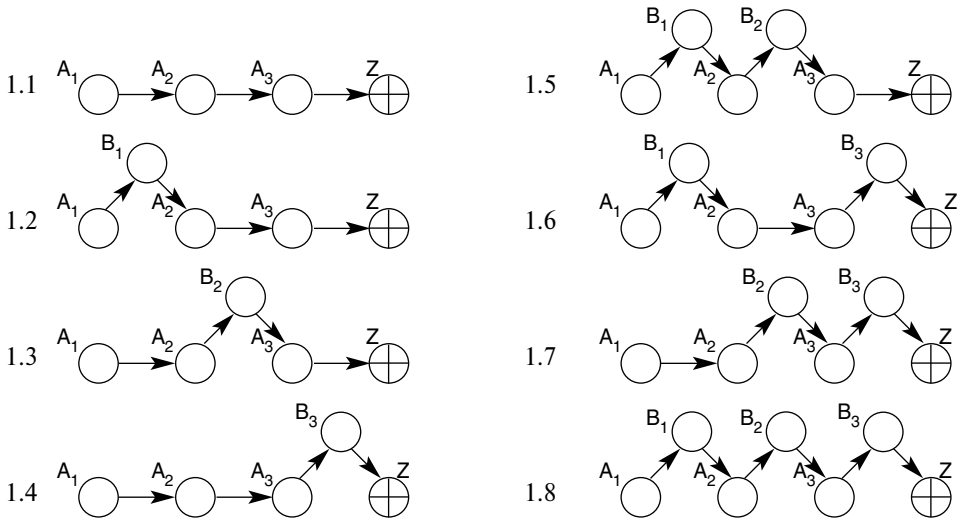


Рис. 1. Представлення можливих позитивних сценаріїв перебігу подій при виконанні договору лізингу за допомогою графів

чення платежу, а також — стан повного виконання договору (вершина Z). Вироджений стан розриву договору (вершина Y) на графах відсутній.

Метою побудови моделей лізингових операцій на основі теорії графів є оцінка надійності лізингової угоди за такими параметрами:

- загальна кількість усіх можливих сценаріїв розвитку подій під час виконання договору;
- ймовірності проходження певного сценарію розвитку подій;
- загальна ймовірність повного виконання договору або його розриву.

Для знаходження ймовірностей виконання договору лізингу необхідно знати усі можливі сценарії перебігу подій при виконанні договору.

Спробуємо знайти сукупну кількість можливих варіантів перебігу подій у загальному вигляді. У зв'язку з тим, що виконання договору лізингу передбачає оплату всіх платежів, зрозуміло, що вершини A_1, \dots, A_n завжди будуть присутні на графі. Більш цікавими для розгляду є вершини B_1, \dots, B_n . Сукупна кількість прострочених платежів (кількість вершин B_j) дорівнює n . Під час виконання договору лізингу може виникнути одне прострочення оплати в будь-якому періоді (див., наприклад, рис. 1.2—1.4). Тоді загальна кількість шляхів (графів) з одним простроченням являтиме комбінацію з n можливих елементів по одному: C_n^1 . Для двох прострочень оплати — C_n^2 і так далі.

Тоді загальна кількість графів-сценаріїв, що описують виконання договору лізингу⁸, становитиме:

$$V = \sum_{j=0}^n C_n^j = 2^n. \quad (1)$$

⁸ Теория статистики с основами теории вероятностей: Учеб. пособие для вузов. Под ред. И.И. Елисейевой. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. — 446 с.

Зауважимо, що якби ми враховували всі можливі сценарії розвитку подій, у тому числі такі, що призводять до невиконання договору лізингу, то кількість графів збільшилася б. Адже з кожного стану прострочення договору — вершини B_j можна потрапити до стану невиконання договору — вершина Y (рис. 2).

На рис. 2 наведено графи, складені на основі рис. 1, що описують можливі сценарії невиконання договору лізингу.

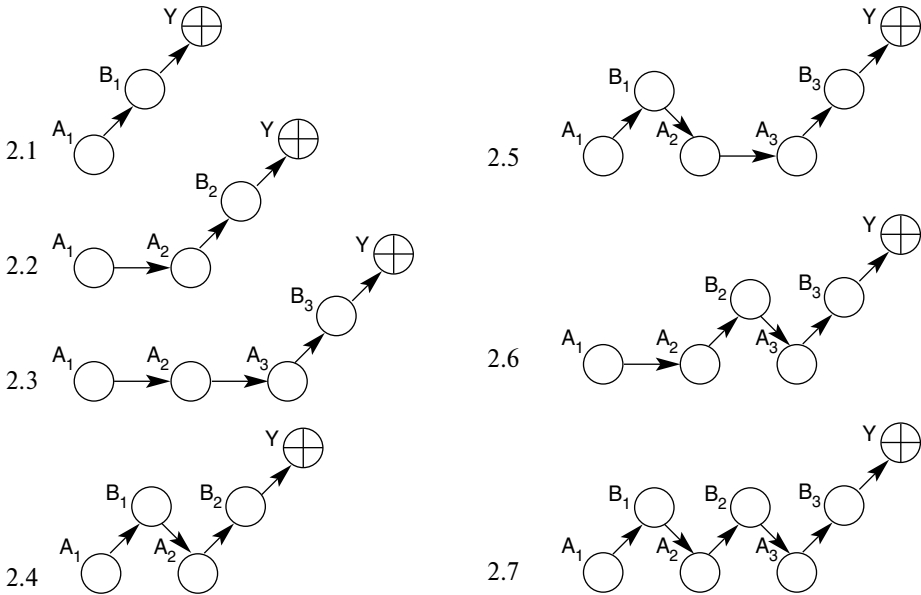


Рис. 2. Графи можливих негативних сценаріїв перебігу подій

На рис. 2 дуга B_jY описує подію несплати простроченого j -го платежу та перехід до стану дефолту договору. Наприклад, граф 2.1 є негативним сценарієм розвитку подій, а відповідним йому позитивним сценарієм є граф 1.2, доповняльним до графу 2.2 є граф 1.3 тощо. Таким чином, у кожному графі можливих позитивних сценаріїв (рис. 1) з простроченням оплати (тобто, окрім першого графу — 1.1) може з'явитися вершина Y , що відповідає негативним сценаріям розвитку лізингової операції (рис. 2). Тоді загальна кількість усіх можливих графів дорівнюватиме:

$$V' = 2^n + 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1. \quad (2)$$

Таким чином, ми отримали загальну кількість графів, що описують всі можливі варіанти перебігу подій при виконанні лізингового контракту. Для розв'язання завдання, поставленого в цій роботі, нас цікавлять усі графи, що описують повне виконання лізингового контракту. Кількість таких графів $V = 2^n$. Далі розглядатимемо лише графи позитивних сценаріїв (приклад таких графів наведено на рис. 1). Для цього введемо матрицю $\|D\|$ розмірності $2^n \cdot n$.

Ця матриця описуватиме усю сукупність графів $\{G_i\}$, де G_i — граф, що описує певний позитивний сценарій виконання лізингового контракту.

Елементи d_{ij} цієї матриці:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо на } j\text{-му етапі } i\text{-го графу виконання договору лізингу виникає} \\ & \text{прострочення оплати, а на графі з'являється вершина } B_j \\ 0, & \text{якщо на } j\text{-му етапі } i\text{-го графу виконання договору лізингу} \\ & \text{прострочення оплати не виникає} \end{cases}$$

Наведемо приклад матриці позитивних сценаріїв для договору лізингу, що передбачає здійснення трьох платежів та одну допустиму несплату (рис. 3).

$$\|D\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 3. Матриця для опису всіх можливих варіантів графів позитивних сценаріїв

Матриця, наведена на рис. 3, описуватиме всі можливі варіанти графів позитивних сценаріїв, представлених на рис. 1. Так, наприклад, варіант графу на рис. 1.1 відповідає першому рядку матриці; граф на рис. 1.2 — п'ятому рядку; рис. 1.5 — сьомому рядку тощо.

У загальному вигляді матриця позитивних сценаріїв для договору лізингу, що передбачає здійснення n платежів та одну допустиму несплату ($k = 1$), складатиметься з рядків, кожен з яких становить двійкове представлення числа:

$$f_i = i - 1, \tag{3}$$

де i — номер рядка матриці.

Рядки цієї матриці перебиратимуть усі 2^n варіантів розташування вершин B_j . Матриця $\|D\|$ описує лише вершини графів B_j , оскільки, як було сказано, вершини A_j на графі присутні завжди.

Отже, після того, як ми вивели загальну кількість можливих варіантів графів-сценаріїв, що описують виконання договору лізингу, та навчилися всіх їх перебирати та описувати, перейдемо до опису імовірнісних характеристик лізингових контрактів на основі цих графів.

У попередніх роботах (див., наприклад, “Імовірнісні моделі оцінки ризику неплатежу операцій фінансового лізингу”⁹) було визначено, що оплата кожного лізингового платежу має випадковий характер. На нашу думку, вона насамперед

⁹ Вітлінський В.В., Долінська Є.Б. Імовірнісні моделі оцінки ризику неплатежу операцій фінансового лізингу // Фінанси України. — 2005. — № 6. — С. 62–68.

залежить від наявних у лізингоодержувача коштів для оплати та обсягу лізингового платежу.

Тут і далі вважатимемо ймовірності оплати наперед визначеними (висхідними) величинами.

Іншою важливою рисою лізингового процесу є властивість відсутності післядії. Адже можливість оплати лізингового платежу в цьому періоді не залежить від оплати в попередньому періоді, а визначається лише фінансовим станом лізингоодержувача в цьому періоді.

Часткову (неповну) оплату ми теж вважатимемо простроченням оплати. Тоді відповідно до прийнятої раніше системи позначень у кожному періоді можливе здійснення лише двох подій: оплати (A_j) та прострочення певного платежу (B_j).

Введемо такі позначення:

ймовірність оплати j -го платежу на i -му графі: $P(A_{ij})$;

ймовірність прострочення оплати j -го платежу на i -му графі: $P(B_{ij}) = 1 - P(A_{ij})$;

ймовірність оплати простроченого j -го платежу та перехід до $(j + 1)$ -го платежу на i -му графі: $P(C_{ij})$;

Оскільки події оплати кожного платежу є незалежними між собою, то ймовірність проходження по графу G_i можна записати так:

$$P(G_i) = \prod_{j=1}^n (P(A_{ij}))^{1-d_{ij}} \cdot ((1 - P(A_{ij})) \cdot P(C_{ij}))^{d_{ij}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 2^n. \quad (4)$$

Наведемо деякі пояснення до виразу (4):

Множник $(P(A_{ij}))$ описує проходження по шляху оплати певного платежу:

$$(P(A_{ij}))^{1-d_{ij}} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } d_{ij} = 1 \text{ (тобто на } j\text{-му етапі } i\text{-го графу виникло прострочення платежу)} \\ (P(A_{ij}))^{1-d_{ij}}, & \text{якщо } d_{ij} = 0 \text{ (тобто на } j\text{-му етапі } i\text{-го графу не було прострочення платежу)} \end{cases}$$

Множник $(1 - P(A_{ij}))$ характеризує появу прострочення певного платежу:

$$(1 - P(A_{ij}))^{d_{ij}} = \begin{cases} (1 - P(A_{ij}))^{d_{ij}}, & \text{якщо } d_{ij} = 1 \text{ (тобто на } j\text{-му етапі } i\text{-го графу виникло прострочення платежу)} \\ 1, & \text{якщо } d_{ij} = 0 \text{ (тобто на } j\text{-му етапі } i\text{-го графу не було прострочення платежу)} \end{cases}$$

Множник $(P(C_{ij}))$ характеризує оплату простроченого платежу, отже:

$$(P(C_{ij}))^{d_{ij}} = \begin{cases} (P(C_{ij}))^{d_{ij}}, & \text{якщо } d_{ij} = 1 \text{ (тобто на } j\text{-му етапі } i\text{-го графу виникло прострочення платежу)} \\ 1, & \text{якщо } d_{ij} = 0 \text{ (тобто на } j\text{-му етапі } i\text{-го графу не було прострочення платежу)} \end{cases}$$

Таким чином, формула (4) дає можливість обчислити ймовірність проходження за кожним сценарієм можливого позитивного перебігу подій. Знаючи значення ймовірностей проходження за кожним сценарієм, можна знайти інші важливі характеристики для оцінки надійності лізингового контракту: мінімальне та максимальне значення ймовірностей, середню ймовірність виконання договору тощо. Окрім того, враховуючи, що подія настання кожного сценарію є випадковою величиною, можна розглядати закони розподілу цих випадкових величин та розраховувати інші статистичні характеристики.

У зв'язку з тим, що події проходження по кожному графу є несумісними, загальну ймовірність виконання всього контракту можна записати так:

$$P = \sum_{i=1}^{2^n} P(G_i). \quad (5)$$

З урахуванням формули (4) вираз (5) набуде такого вигляду:

$$P = \sum_{i=1}^{2^n} \left[\prod_{j=1}^n (P(A_{ij}))^{1-d_{ij}} \cdot ((1 - P(A_{ij}))) \cdot P(C_{ij})^{d_{ij}} \right]. \quad (6)$$

Таким чином, отриманий аналітичний вираз (6) дає можливість оцінити загальну ймовірність виконання лізингового контракту з урахуванням усіх можливих сценаріїв перебігу подій. На нашу думку, цей показник є одним із головних критеріїв оцінки надійності лізингової угоди.

У роботі визначено конструктивний алгоритм, що дає змогу змоделювати усі можливі сценарії перебігу подій при виконанні лізингового контракту. Окрім того, виведено формули для розрахунку ймовірностей виконання лізингового контракту в цілому та для кожного з позитивних сценаріїв. Знаючи ймовірності виконання кожного з позитивних сценаріїв, можна визначити мінімальне та максимальне значення ймовірностей виконання договору лізингу, інші статистичні характеристики.

Отримані оцінки можна використовувати для аналізу виконання договору лізингу та аналізу ризику й надійності лізингового контракту. Побудовані моделі оцінки надійності лізингових операцій дають можливість лізингодавцю отримати необхідну інформацію щодо надійності лізингової угоди та допомагають оптимізувати процес прийняття рішень щодо доцільності укладення лізингової угоди з потенційним лізингодержувачем.

Описаний підхід до оцінки надійності лізингового контракту апробовано та впроваджено в низці лізингових компаній України, що дало можливість підвищити ефективність системи ризик-менеджменту цих підприємств, що, у свою чергу, сприяло підвищенню якості та надійності їх роботи.