Найман Е.Л.,
доктор економічних наук,
керуючий партнер компанії "Capital Times"

Хохлов В.Ю.,
кандидат технічних наук,
консультант з корпоративних фінансів
та інвестиційного менеджменту

РОЗПОДІЛ ЩОДЕННОЇ ДОХІДНОСТІ АКЦІЙ

Показано переваги використання розподілів Стьюдента й Лапласа над нормальним розподілом при моделюванні дохідності акцій і біржових індексів. Доведено, що в деяких випадках ще кращі результати дає використання розподілу, запропонованого Е. Найманом.

In this paper we show that the Student's t and Laplace distributions are superior to the normal distribution for modeling daily stock and stock indices returns. It was argued that in some cases the better results may be achieved using a new distribution proposed by E.Nayman.

Ключові слова: розподіл дохідності акцій, великі "хвости" розподілу, розподіл Стьюдента, розподіл Лапласа.

Останнім часом у інвестиційній сфері точиться дискусія щодо великих "хвостів" у розподілах дохідності цінних паперів, у першу чергу акцій і біржових індексів. Особливо запеклою вона стала після виходу книги Н. Талеба "Чорний лебідь"[1], у якій автор піддав різкій критиці використання нормального розподілу та взагалі поставив під сумнів обґрунтованість сучасної портфельної теорії. Сутність проблеми полягає в тому, що фактична ймовірність отримання дуже великих збитків у тисячі чи навіть мільйони разів перевищує ймовірність у "хвостах" нормального розподілу. Тому постає нагальна потреба в застосуванні при моделюванні динаміки дохідності цінних паперів і управлінні ризиками таких розподілів, що адекватно описують імовірність та враховують ризики екстремальних збитків.

Використання нормального розподілу для моделювання дохідності цінних паперів та управління ризиками, яке досі є дуже поширеним, бере початок у фундаментальних працях І. Марковиця, У. Шарпа, М. Міллера та ін. Утім, у жодній із цих праць нормальний розподіл не є передумовою для виведення положень сучасної портфельної теорії. Як показано в статтях Г. Чемберлена[2] та Дж. Оуена й Р. Рабіновича[3], теорія так само працює за умови, що дохідність цінних паперів

[1] *Талеб Н.Н.* Черный лебедь. Под знаком непредсказуемости. — М.: КоЛибри, 2009. — 528 с.

[2] *Chamberlain G.* A characterization of the distributions that imply mean-variance utility functions // Journal of Economic Theory. — 1983. — Vol. 29, Issue 1. — P. 185—201.

[3] *Owen J., Rabinovitch R.* On the Class of Elliptical Distributions and their Applications to the Theory of Portfolio Choice // The Journal of Finance. — 1983. — Vol. 38, No 3. — P. 745—752.

(або її логарифм) описується будь-яким еліптичним розподілом. До таких окрім нормального належать розподіли Стьюдента, Лапласа та логістичний розподіл.

Серед досліджень емпіричного розподілу дохідності та порівняння його з теоретичними можна виділити, зокрема, дослідження Ф. Апарісіо та Дж. Естради[4], у якому з використанням тестів Пірсона, Колмогорова — Смірнова та Харкі — Бера було відкинуто нормальність розподілу дохідності акції скандинавських країн, а також експоненційний і логістичний розподіли, але розподіл Стьюдента було визнано прийнятним. У доповіді К. Едкока й Н. Міда[5] було досліджено нормальний розподіл, розподіл Стьюдента та різні його узагальнення, а також показано, що симетричний розподіл Стьюдента є найкращим для моделювання акцій США й Великобританії, але гірше підходить на ринках Японії та Південної Африки. Водночас Я. Кім та Дж. МакКуллох[6] досліджують місячні розподіли дохідності ринку акцій США та показують, що симетричний розподіл Стьюдента є для цього значно гіршим за асиметричний. Дослідження використання розподілу Лапласа на прикладі акцій Фінляндії у праці М. Ліндена[7] свідчить про те, що цей розподіл є прийнятним як для щоденних дохідностей, так і для дохідностей за більший період часу.

Незважаючи на згадані дослідження, ідея використання ненормальних розподілів для моделювання дохідності ще не набула загального визнання. Як теоретики, так і практики часто використовують саме нормальний розподіл. Однією з причин цього є недостатньо чіткі рекомендації щодо вибору конкретного розподілу та його параметрів. Окрім того, ці дослідження стосувалися розвинених ринків, можливість їх застосування на фондовому ринку України досі не перевірялася.

Метою цього дослідження є перевірка відповідності теоретичних розподілів дохідності акції емпіричним даним. У зв'язку з цим автори поставили перед собою такі завдання: 1) довести чи спростувати ненормальність емпіричного розподілу; 2) перевірити відповідність інших еліптичних розподілів фактичному розподілу дохідності; 3) запропонувати розподіл, який відповідає емпіричним даним, та показати його зв'язок із відомими теоретичними розподілами; 4) надати рекомендації щодо вибору розподілу та визначення його параметрів.

[4] *Aparicio F., Estrada J.* Empirical Distributions of Stock Returns: Scandinavian Securities Markets, 1990-95 // European Journal of Finance. — 2001. — No 7. — P. 1—21.

[5] *Adcock C.J., Meade N.* Characterising Non-Normality In Asset Returns Using The Generalised Skew Student Distribution: [Електр. ресурс] // Proceedings of European Financial Management Association 2007 Annual Meeting. — Vienna, 2007. —http://www.efmaefm.org/0EFMAMEETINGS/EFMA ANNUAL MEETINGS/2007-Vienna/Papers/0426.pdf.

[6] *Kim Y.I., McCulloch J.H.* The Skew-Student Distribution with Application to U.S. Stock Market Returns and the Equity Premium: [Електр. ресурс] // 17th Annual Meeting of the Midwest Econometrics Group, St. Louis, MO, October 13, 2007. — http://web.econ.ohio-state.edu/~ykim /Skew t_Equity premium.pdf.

[7] *Linden M.* A model for stock return distribution // International Journal of Finance & Economics. — 2001. — No 6. — P. 159—169.

Ненормальність розподілу дохідності цінних паперів

У даному дослідженні під дохідністю розуміється логарифмічна дохідність, тобто натуральний логарифм відношення ціни закриття поточного дня до ціни закриття попереднього дня. Нормальний розподіл такої дохідності відповідає логнормальному розподілу звичайної дохідності. Щоб дослідити ефект великих "хвостів" розподілу (або ефект "чорного лебедя"), розглянемо чотири активи — індекс Dow Jones Industrial Average (DJIA), біржовий фонд SPY, що слідкує за індексом Standard & Poor's 500 (S&P 500), акції корпорацій "General Electric" (GE) та "Exxon Mobil" (XOM). Для цього використовуємо великі вибірки даних (23 981 спостереження для DJIA, 4510 — для SPY, по 5024 — для GE та XOM).

У табл. 1 наведені дані щодо ймовірності отримання дуже великих збитків (4, 5 і 6 стандартних відхилень від середньоденної дохідності) протягом одного дня, яка показана через середню кількість років, котра знадобиться для того, щоб зустріти такий "чорний день" на фондовому ринку.

Таблиця 1. **Кількість років, яка знадобиться для отримання екстремального денного збитку за умови заданого розподілу щоденної дохідності**

Денний збиток,%	Кількість років для розподілу			Фактична кількість років
	Нормального	Стьюдента (df = 3)	Лапласа	
DJIA				
−6,9	3 466 480	4,14	73,75	3,41
−5,8	15 878	2,50	17,28	2,17
−4,6	120	1,28	3,55	0,93
SPY				
−7,4	3 249 506	4,12	57,72	3,59
−6,2	13 994	2,46	13,74	2,25
−5,0	148	1,33	3,27	1,12
GE				
−11,3	4 141 433	4,20	55,20	10,04
−9,4	13 745	2,46	12,54	2,01
−7,5	121	1,28	2,85	0,84
XOM				
−9,3	4 646 854	4,24	37,36	6,70
−7,7	13 312	2,45	8,79	3,35
−6,2	140	1,32	2,26	1,83

Як видно з табл. 1, якщо припустити нормальний розподіл дохідності, то в середньому знадобиться від 3,2 до 4,6 млн років, щоб отримати величезний збиток у 6 стандартних відхилень (від 7 до 11 % залежно від активу), тоді як на практиці подібні "чорні дні" виникали для DJIA раз на 3,4 року, для SPY — на 3,6, для XOM — на 6,7, для GE — на 10. Таким чином, нормальний розподіл майже в мільйон разів недооцінює ймовірність таких екстремальних збитків. Звичайно, для менших збитків різниця буде відповідною. Так, на 5-ти стандартних відхиленнях порядок недооцінки буде тисячі разів, а на 4-ох стандартних відхиленнях — близько ста разів. Утім, недооцінити ризик у сто разів у інвестиційній професії так само неприпустимо як і в мільйон разів.

Якщо розглянути, скільки років знадобиться для того, щоб отримати такий величезний збиток за умови ненормального розподілу дохідності, то побачимо іншу картину. Так, розподіл Стьюдента з трьома ступенями свободи дає майже ті самі значення, що ми спостерігаємо на реальних цінових даних на всьому діапазоні, а розподіл Лапласа — значення, які недооцінюють ризик від 2—3 разів для чотирьох стандартних відхилень та до 6—20 разів для шести стандартних відхилень (порівняно з мільйоном разів для нормального розподілу це набагато кращий результат). На рис. 1 показано, як ці три розподіли відповідають фактичному розподілу дохідності DJIA та GE в лівому "хвості". Для DJIA в зоні від −10 до −3 % та для GE в зоні від −10 до −5 % густина нормального розподілу значно менша, ніж у фактичного розподілу, що й призводить до істотної недооцінки ймовірності.

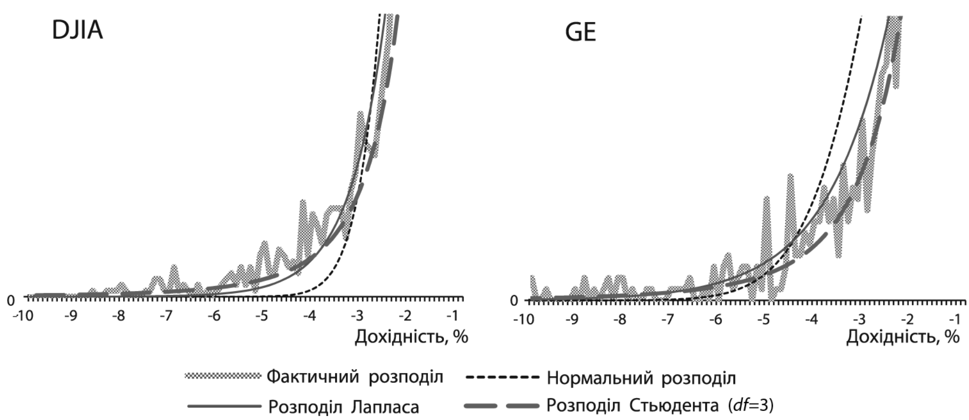

Рис. 1. **Лівий "хвіст" функції густини розподілу дохідності DJIA та GE**

Таким чином, попередній висновок про ненормальність розподілу дохідності цінних паперів та застосовність розподілів Стьюдента чи Лапласа підтверджується. Щоб науково обґрунтувати його, скористаємося відомими статистичними тестами на відповідність розподілів — Пірсона (хі-квадрат) та Колмогорова — Смірнова (КС). Перший краще перевіряє відповідність теоретичної й фактичної функцій густини розподілу при заданій кількості інтервалів, а другий — теоретичної й фактичної кумулятивних функцій розподілу та не має такої залежності від визначення інтервалів.

Значення тестових статистик наведені в табл. 2. Критичні значення χ^2 для тесту Пірсона — 233,99 (5 %), 249,56 (1 %), 267,54 (0,1 %). Для КС-тесту ми

Таблиця 2. **Значення тестових статистик для тестів Пірсона та Колмогорова — Смірнова**

Актив	Значення χ^2 тесту Пірсона			Значення K КС-тесту		
	Нормальне	Стьюдент (3)	Лаплас	Нормальне	Стьюдент (3)	Лаплас
DJIA	1 427 363 104 075	368,98	3106,25	13,3216	2,9779	3,4750
SPY	7 697 207 461	260,49	628,59	5,6397	1,8815	1,8229
GE	91 023	439,25	518,93	5,5924	2,0564	2,1811
XOM	4 056 522	424,59	421,57	3,7918	3,2614	1,9703

використовуємо значення $K = D\sqrt{N}$, де D — тестова статистика КС-тесту, N — величина вибірки. Критичні значення K — 1,22 (5 %), 1,36 (1 %), 1,63 (0,1 %). Таким чином, хоча розподіли Стьюдента й Лапласа є значно кращими за нормальний, особливо за тестом Пірсона, ми все ж відкидаємо гіпотезу щодо відповідності фактичного розподілу цим теоретичним розподілам із імовірністю вище 99 %.

Застосування розподілів Стьюдента й Лапласа

Застосування розподілу Стьюдента для моделювання дохідності цінних паперів вимагає вибору кількості ступенів свободи. Існуючі дослідження не дають однозначної рекомендації щодо цього вибору, хоч і вказують діапазон від 3-х до 6-ти. Крім того, Я. Кім і Дж. МакКуллох доводять, що симетричний розподіл Стьюдента поступається асиметричному для опису місячних дохідностей на ринку акцій США[8]. Ми досліджуємо щоденні дохідності, проте на наявних вибірках не спостерігаємо значної асиметрії (табл. 3), тому використання асиметричного розподілу видається нам невиправданим ускладненням.

Таблиця 3. **Значення коефіцієнтів асиметрії та ексцесу обраних активів на ринку США**

Показник	DJIA	SPY	GE	XOM
Асиметрія	−0,56	−0,05	0,02	0,06
Надлишковий ексцес	22,04	10,11	8,07	9,01

Отже, в даному дослідженні ми обмежуємося симетричним розподілом Стьюдента та варіюємо кількість ступенів свободи (v) між 2,7 і 6. Тестові статистики для обраних значень ступенів свободи наведені в табл. 4. Як видно, кращі результати показують розподіли з нецілими кількостями ступенів свободи, а саме 2,8 і 3,7, причому що більший надлишковий ексцес, то меншу кількість ступенів свободи потрібно брати. За потреби цілого значення ми рекомендуємо обирати 3.

[8] *Kim Y.I., McCulloch J.H.* Зазнач. праця.

Таблиця 4. **Результати тестів розподілу Стьюдента з різною кількістю ступенів свободи (ν)**

Актив	Значення χ^2 тесту Пірсона				Значення *K* для КС-тесту			
	ν = 2,8	ν = 3	ν = 3,7	ν = 4	ν = 2,8	ν = 3	ν = 3,7	ν = 4
DJIA	398,84	*368,98*	684,72	928,20	*2,9055*	2,9779	5,9419	6,3446
SPY	*201,82*	260,49	231,18	314,93	*1,8412*	1,8815	2,9037	3,0419
GE	*377,32*	439,25	392,90	477,31	2,0909	2,0564	*1,9249*	2,0047
XOM	462,90	424,59	*238,97*	258,65	3,2684	3,2614	*1,2410*	1,2660

Примітка: найкращий розподіл виділено курсивом.

Застосування розподілу Лапласа для моделювання дохідності цінних паперів залежить від способу визначення параметрів μ та b у формулах:

$$f(x) = \frac{1}{2b}\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right);$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{sgn}(x-\mu)\left(1 - \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right)\right)\right].$$

Ми розглядаємо чотири способи визначення цих параметрів:

1) L1: використовуємо вибіркове середнє для оцінки μ та середнє абсолютне відхилення від μ для оцінки b;

2) L2: використовуємо вибіркове середнє для оцінки μ та вибіркове стандартне відхилення для оцінки b:

$$\hat{b} = \hat{\sigma}/\sqrt{2};$$

3) L3: використовуємо вибіркову медіану для оцінки μ та середнє абсолютне відхилення від μ для оцінки b;

4) L4: використовуємо вибіркову медіану для оцінки μ та вибіркове стандартне відхилення для оцінки b:

$$\hat{b} = \hat{\sigma}/\sqrt{2}.$$

Тестові статистики для розподілів Лапласа наведені в табл. 5. Хоча виходячи з тесту Пірсона важко визначити найкращий варіант вибору параметрів, за результатами КС-тесту можна рекомендувати третій варіант оцінки параметрів (вибіркова медіана та абсолютне відхилення від неї).

Таблиця 5. **Результати тестів розподілу Лапласа за варіантами оцінки параметрів**

Актив	Значення χ^2 тесту Пірсона				Значення *K* КС-тесту			
	L1	L2	L3	L4	L1	L2	L3	L4
DJIA	3106,25	1859,74	3050,63	*1810,45*	3,4750	4,4437	*2,9970*	5,0539
SPY	628,59	456,49	638,30	*454,74*	1,8229	1,7932	*1,2872*	1,9338
GE	518,93	*486,87*	524,15	491,21	2,1811	2,1413	*1,6900*	2,0458
XOM	*421,57*	431,24	433,49	443,12	*1,9703*	2,0497	2,6858	2,7475

Примітка: найкращий розподіл виділено курсивом.

Розподіл дохідності українських акцій

Наведені вище результати були отримані на великих вибірках щоденних дохідностей активів на ринку США. Загалом вони відповідають результатам досліджень, одержаних на розвинених ринках США та Європи. Але чи існує проблема "чорних лебедів" на ринку України та чи будуть розподіли Стьюдента й Лапласа так само значно кращими за нормальний для моделювання дохідності вітчизняних акцій?

Результати нашого дослідження показали: як індекс Української біржі, так і найбільш ліквідні акції не демонструють таких явних ознак наявності "чорних лебедів", як акції США. Але це може бути наслідком дуже обмеженої вибірки цінових даних (430 спостережень). Результати тестів Пірсона та КС (табл. 6) загалом підтверджують висновки про те, що розподіли Стьюдента й Лапласа є кращими для моделювання дохідності акцій на ринку України, так само як і на розвинених ринках, хоча статистика для нормального розподілу не є такою ж поганою, як у табл. 2.

Ринок акцій України має цікаву особливість: ми не можемо відкинути гіпотезу про те, що майже всі розглянуті активи мають дохідність, розподілену за Лапласом, із імовірністю ні 99, ні 95 %. Тобто цей розподіл дуже добре підходить для моделювання дохідності українських акцій.

Розподіл Наймана

На підставі дослідження фактичного розподілу індексу Dow Jones та індексу долара Е. Найман запропонував розподіл, який є подібним до розподілу Лапласа, але краще враховує великі "хвости". Функція густини цього розподілу:

$$f(x) = \frac{1}{k}\left(\alpha \cdot m \cdot 10^{-\frac{\alpha|x-\mu|}{l}} + 1\right),$$

де α — параметр масштабу, котрий визначає пік фактичного розподілу (вибіркова частота, що відповідає моделі розподілу);

μ — параметр зсуву (вибіркова медіана);

m — розмір вибірки;

l — довжина інтервалу (див. нижче);

k — параметр нормування, що визначається як:

$$k = \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha \cdot m \cdot 10^{-\frac{\alpha|0,5(x_{i-1}+x_i)-\mu|}{l}} + 1\right),$$

де, на нашу думку, вся сукупність спостережень розбивається на n рівних інтервалів $(x_0, x_1]$, $(x_1, x_2]$, ..., $(x_{n-1}, x_n]$.

Проблемою звичайних розподілів, у першу чергу нормального, є те, що у "хвостах" розподілу ймовірність швидко зменшується та стає близькою до нуля.

Таблиця 6. **Вибіркові статистики та результати тестів українських акцій**

Показник	Індекс УБ	ALMK	BAVL	CEEN	DOEN	MSICH	STIR	UNAF	USCB	UTLM	ZAEN	Медіана
Величина вибірки	433	431	431	431	431	431	431	431	431	431	430	405
Середнє, %	−0,0020	−0,0972	−0,0883	−0,0299	−0,1816	0,0203	−0,1001	0,2360	−0,0888	−0,0142	−0,0292	−0,0972
Стандартне відхилення, %	2,3578	3,8488	2,8248	2,7540	3,0971	2,9722	3,3968	3,2602	3,2357	2,5831	3,6462	3,8721
Асиметрія	−0,3158	0,5780	0,0452	0,3922	−0,0648	0,0863	0,0197	0,7961	0,1373	−0,2616	1,8299	−0,0287
Надлишковий ексцес	10,3812	9,3648	8,0860	6,2423	11,2565	9,1545	3,2322	12,5902	8,5785	6,6144	29,3094	8,3266
Значення χ^2 тесту Пірсона												
Нормальний розподіл	729,41	235,56	364,96	575,27	185,33	429,41	339,79	335,48	187,41	639,31	385,17	364,96
Розподіл Стьюдента (3)	191,82	175,07	225,91	316,45	154,17	214,81	350,51	196,30	167,43	258,48	221,88	214,81
Розподіл Стьюдента (4)	*178,35*	175,49	205,54	272,72	*143,76*	219,21	294,38	222,59	*151,96*	242,55	260,07	219,21
Розподіл Лапласа	185,67	*157,82*	*203,26*	*248,58*	147,19	*205,57*	*268,51*	*172,25*	152,52	*239,61*	*197,80*	*197,80*
Значення *K* КС-тесту												
Нормальний розподіл	2,2941	1,3869	1,5465	1,0992	1,0396	1,8935	1,4252	2,5947	0,8143	1,8984	1,7676	1,5465
Розподіл Стьюдента (3)	0,6526	2,3011	1,1967	1,0431	1,9532	1,0502	2,6926	1,6741	1,8218	*0,7019*	*1,1018*	1,1967
Розподіл Стьюдента (4)	1,3370	1,6030	0,7774	0,6212	1,3763	*0,8926*	2,0354	1,9608	1,1238	0,8419	1,3088	1,3088
Розподіл Лапласа	*0,6057*	*0,7580*	*0,7161*	*0,5724*	*1,1463*	0,9653	*0,6862*	*1,2178*	*0,6192*	0,9543	1,1717	*0,7580*

Примітка: найкращий розподіл виділено курсивом.

Фактично це означає, що на скінчених вибірках більшість інтервалів не матиме жодного спостереження всередині. Ідея розподілу Наймана полягає в тому, що в будь-якому інтервалі дискретизації повинна бути ненульова ймовірність отримання дохідності. Тому ми штучно додаємо ймовірності у “хвости” розподілу так, що вони стають істотно відмінними від нуля. Звісно, це вимагає скінченого інтервалу визначення, тому $f(x) = 0$ для всіх $x < x_0$ та $x > x_n$. Відмінність розподілу Наймана від розподілу Лапласа можна побачити, порівнявши функції їхньої густини в лівому “хвості” (рис. 2).

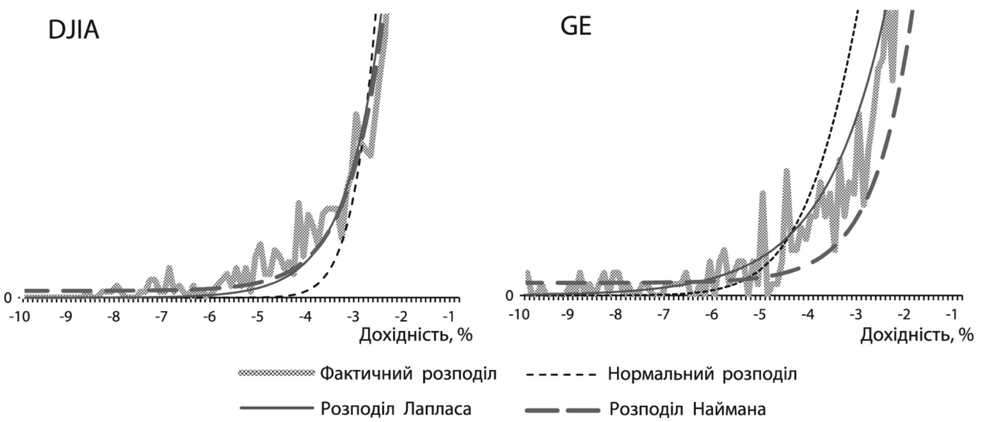

Рис. 2. **Порівняння функції густини розподілів Лапласа та Наймана для DJIA і GE**

Кумулятивна функція розподілу Наймана має такий вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0, x < x_0 \\ \dfrac{1}{2}+\operatorname{sgn}(x-\mu)\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{m}{k\ln 10}10^{-\frac{\alpha|x-\mu|}{l}}\right]-\dfrac{m}{k\ln 10}10^{-\frac{\alpha|x_0-\mu|}{l}}+\dfrac{x-x_0}{k}, x_0 \le x < x_n. \\ 1, x \ge x_n.\end{cases}$$

На великих вибірках можна покласти $k = 2m/\ln(10)$, тоді вказаний вище вираз спрощується до такого, який і було використано в КС-тесті:

$$F(x) \approx 0,5+\operatorname{sgn}(x-\mu)\left[0,5-0,5\cdot 10^{-\frac{\alpha|x-\mu|}{l}}\right]-0,5\cdot 10^{-\frac{\alpha|x_0-\mu|}{l}}+\frac{x-x_0}{k}.$$

Результати тестів розподілу Наймана наведені в табл. 7. Зокрема, він показав найкращий результат за КС-тестом при моделюванні розподілу Dow Jones, а також дає непогані показники на індексі Української біржі та акціях українських емітентів (CEEN, UTLM).

Підсумовуючи викладене, доходимо таких висновків. Статистичні тести відповідності нормального розподілу, розподілів Стьюдента й Лапласа фактичному розподілу денної дохідності акцій на ринку США показали, що проблема великих

Таблиця 7. **Параметри та результати тестів розподілу Наймана**

Показник	DJIA	SPY	GE	XOM	Індекс УБ	CEEN	UTLM
μ, %	0,0483	0,0661	0	0,0140	0,0321	−0,0635	−0,0191
α, %	5,8421	6,1641	5,3749	4,7997	3,4642	3,7123	4,1763
m	23 981	4510	5042	5042	433	431	431
k	21 058,9	4119,6	4577,6	4578,7	577,0	575,4	575,3
χ^2 тесту Пірсона	506,8	251,2	1060,4	496,0	196,7	215,3	228,8
K КС-тесту	2,5026	2,5171	7,0634	4,8602	1,3092	1,6099	1,8928

"хвостів" розподілу існує та є істотною при моделюванні динаміки показників акцій та управлінні ризиками. Використання нормального розподілу є неприйнятним, оскільки в багато разів (тисячі й навіть мільйони) недооцінює ймовірність екстремальних збитків. Розподіли Стьюдента й Лапласа значно ближчі до фактичного, що доводять тести Пірсона та Колмогорова — Смірнова.

Ми рекомендуємо при моделюванні дохідності акцій використовувати розподіл Стьюдента з числом ступенів свободи від 2,8 до 3,7 (непогано показало себе значення 3) або розподіл Лапласа.

Розподіл дохідності українських акцій та індексу Української біржі не виявив таких значних відхилень від нормальності, хоча також не є нормальним. Утім, цей висновок, напевно, отриманий не через якісну відмінність динаміки паперів на українському ринку, а через набагато меншу величину вибірок. На відміну від ринку акцій США на ринку України використання розподілу Лапласа є найкращим для моделювання дохідності акцій.

Також у статті запропонований розподіл Наймана, який є подібним до розподілу Лапласа, але має більшу ймовірність у "хвостах". Цей розподіл показав себе найкращим при моделюванні дохідності індексу Dow Jones, що найбільше відрізняється від нормального. Він теж непогано підходить для моделювання дохідності українських акцій та добре зарекомендував себе в практиці визначення ціни опціонів на Українській біржі.