

В. Ю. Хохлов

## УПРАВЛІННЯ ПОРТФЕЛЕМ ОБЛІГАЦІЙ

*Розглянуто особливості застосування різних підходів до управління портфелем облігацій та розроблено дві моделі оптимізації — за дюрацією та конвекситі й за дюраціями ключових ставок. Показано, як на практиці імунізувати ряд зобов'язань, утворивши портфель облігацій з допомогою цих моделей.*

*In this paper different approaches to fixed income portfolio management were discussed and two optimization models as a duration-convexity model and a key rate durations model were developed. It is shown how to create a bond portfolio immunizing multiple liabilities with the use of these models.*

**Ключові слова:** інструменти з фіксованим доходом, облігації, управління портфелем, імунізація, дюрація.

Інструменти з фіксованим доходом є одним із двох основних класів активів, традиційно використовуваних в інвестиційній практиці. На відміну від акцій, при управлінні портфелями таких інструментів зазвичай не застосовують складних математичних моделей. Але волатильність світових фінансових ринків та їхня нелінійна динаміка свідчать про обмеженість наявних підходів, актуальною темою є вдосконалення моделей і методів управління портфелями інструментів з фіксованою дохідністю.

Виокремлюють два основних підходи до управління портфелями інструментів із фіксованою дохідністю: підхід, що базується лише на активах (*asset only*, АО), та підхід, на підставі співвідношення активів та зобов'язань (*asset-liability management*, ALM). Як зазначає Ф. Фабоцці [1], саме останній є релевантним для ключових інституційних інвесторів, які оперують інструментами з фіксованим доходом — пенсійних фондів, страхових компаній, комерційних банків. Історично головним методом управління портфелем була імунізація на основі дюрації. У працях Г. Бірвага, Х. Фонга та О. Васічека [2; 3] наведено критерії та умови ефективної імунізації портфеля зобов'язань портфелем активів. Недоліком моделей, що базуються лише на дюрації, є лінійність. Вони працюють за невеликих та паралельних зсувів кривої процентних ставок. Для подолання цих недоліків у дослідженнях Д. Чамберса та В. Карлетона, Р. Реїтано, Т. Хо [4—6] запропоновано концепцію дюрацій ключових ставок (*key rate durations*), яка враховує непаралельні зсуви. У праці Ф. Фабоцці [7] теоретично розглядається застосування моделі подвійного врахування як дюрації, так і конвекситі, що має розв'язати проблему лінійності моделі, але наразі такі багатокритеріальні оптимізаційні моделі не є загальновідомими.

Мета дослідження — вдосконалення інструментарію управління портфелем активів із фіксованою дохідністю. Завдання дослідження: 1) систематизувати

© Хохлов В. Ю., 2013

наявні підходи до управління портфелем активів із фіксованою дохідністю та навести відповідні математичні моделі; 2) розробити математичну модель імунізації портфеля за дюрацією та конвекситі; 3) порівняти результати моделей між собою та зі стратегією наївної імунізації за дюрацією.

Інструменти з фіксованою дохідністю широко використовують в інвестиційній практиці. Хоча дохідність за ними відома заздалегідь, але можливість дефолту та зміни процентних ставок на ринку створюють невизначеність, яка відображається на цінах таких інструментів. Відповідно, їхню дохідність можна змоделювати випадковою змінною та до управління їх портфелем може застосовувати модель Марковиця (*mean-variance optimization, MVO*). Перевагою цього підходу, що базується лише на активах, є стандартність і можливість легко інтегрувати інструменти з фіксованою дохідністю та інші класи активів з метою управління портфелем. Але істотний недолік призвів до дуже обмеженого використання АО-підходу в інвестиційній практиці. Більшість інституційних інвесторів застосовує інструменти з фіксованою дохідністю насамперед для того, щоб компенсувати ризик своїх зобов'язань. Таким чином, адекватнішим підходом для таких інвесторів є ALM-підхід, який враховує взаємозв'язок активів і зобов'язань інвестора. Насправді, він також цілком прийнятний для індивідуальних інвесторів, оскільки життєві потреби людини є квазізобов'язаннями, і для їх фінансування потрібен портфель інструментів, який враховує структуру цих зобов'язань та їхню чутливість до зміни економічних показників. Порівняння типів зобов'язань та підходів, запропоноване В. Шарпом [8], наведено в табл. 1.

Таблиця 1. Типи зобов'язань та підходів до управління портфелем різних інвесторів

Тип інвестора	Тип зобов'язань	Підхід
Індивідуальні інвестори	Життєві потреби, податки, погашення кредитів	Зазвичай АО, рідко ALM
Пенсійні фонди	Пенсійні виплати	Зазвичай ALM, рідко АО
Інвестиційні фонди	Дотримання мандату (інвестиційної політики фонду)	АО
Страхові компанії	Страхові виплати	ALM
Комерційні банки	Виплати за депозитами	ALM

Джерело: Sharpe W. F. *Asset Allocation* / W. F. Sharpe, P. Chen, J. E. Pinto, D. W. McLeavey // *Capital Market Expectations, Market Valuation, and Asset Allocation*. — John Wiley & Sons, 2013. — P. 214.

При АО-підході є такі стратегії управління портфелем [7, с. 85—88]:

1) повна реплікація відомого індексу, за якої ваги облігацій у портфелі дорівнюють їхнім вагам в індексі;

2) дотримання індексу через відповідність основним факторам ризику, коли створюється інвестиційний портфель, основні фактори ризику якого дорівнюють показникам ризику обраного індексу, з метою отримання

портфеля, що поводиться подібно індексному за менших торговельних витрат;

3) дотримання індексу за незначної невідповідності факторам ризику, за якої менеджер свідомо створює портфель, певні фактори ризику якого неістотно відрізняються від показників індексу, з метою отримання дохідності, вищої за індексну;

4) активне управління шляхом значних невідповідностей факторам ризику, коли за основу береться індекс, але менеджер істотно відхиляється від його показників з метою отримання більшої дохідності;

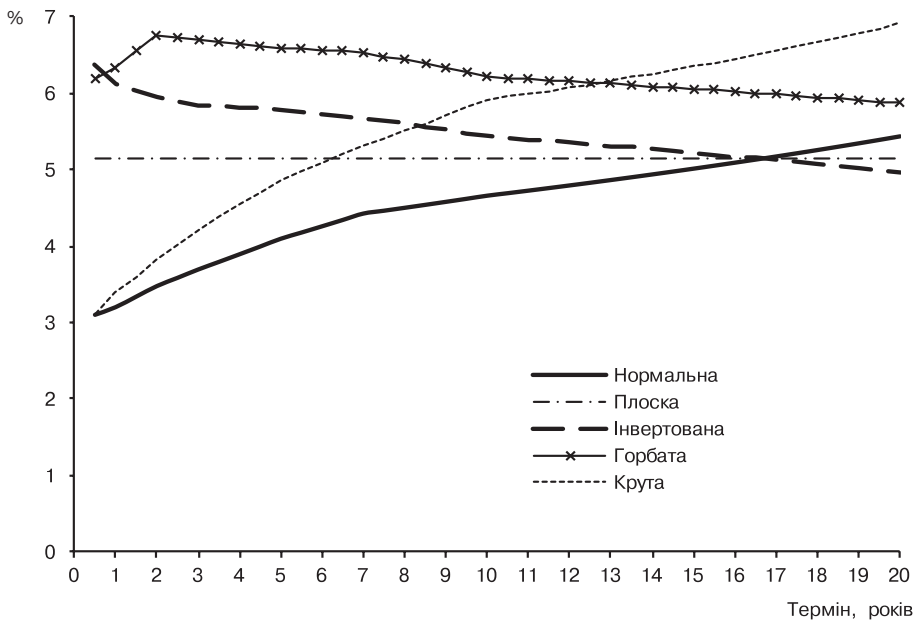
5) повноцінне активне управління, за якого менеджер вибирає активи та їхні ваги незалежно від індексу (наприклад, з допомогою оптимізації (MVO)).

При *ALM-підході* є дві основні стратегії управління портфелем — імунізація та відповідність грошових потоків. Імунізація — це створення такого портфеля активів, що за поточною вартістю (*present value, PV*) покриває всі зобов'язання, а його чутливість до вибраних економічних змінних дорівнює чутливості портфеля зобов'язань. Таким чином, кожна зміна в економіці однаковою мірою збільшує чи зменшує вартість як активів, так і зобов'язань, тому останні будуть покритими в усіх випадках. Звісно, виникає ризик того, що деякі важливі змінні не враховані, змодельовані неадекватно або їхня чутливість розрахована неправильно. Стратегія відповідності грошових потоків полягає в тому, що створюється портфель активів, грошові потоки якого повністю покривають грошові потоки портфеля зобов'язань. Оскільки це досить складно та дорого реалізувати на практиці, стратегія імунізації є поширенішою.

Головним чинником, який впливає на вартість інструментів із фіксованим доходом, є процентні ставки. Теоретично правильним є оцінювання вартості таких інструментів з допомогою кривої спотових безризикових ставок, а не лише однієї ставки (як при використанні дохідності до погашення). У цьому дослідженні ми будемо використовувати саме цю модель. Чинниками ризику, які впливають на зміну вартості інструментів із фіксованою дохідністю, є зміни цієї кривої — паралельний зсув, зміна куту нахилу та складніші зміни її форми. Як базу нами використано “нормальну” криву процентних ставок, яка спостерігалася в середньому протягом 20 років на ринку казначейських облігацій США, та наступні зміни цієї кривої:

- паралельні зсуви на +1, +3, +5, -1 та -3 %;
- сплющення кривої (кут нахилу стає нульовим);
- інверсія кривої (кут нахилу стає від'ємним);
- утворення горбу (кут нахилу додатній у короткостровому діапазоні та від'ємний у довгостроковому);
- зростання куту нахилу кривої.

“Нормальна” крива процентних ставок, яку ми застосовували, та різні сценарії її нелінійних змін показано на рис. 1.



Джерело: побудовано автором.

Рис. 1. Сценарії зміни кривої процентних ставок

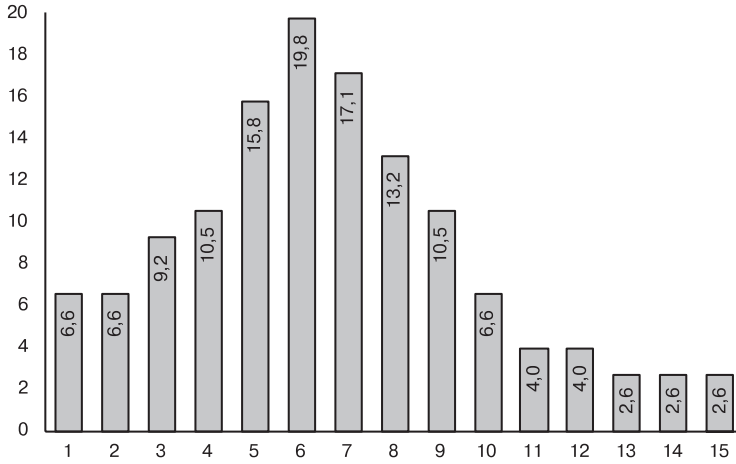
Основна міра чутливості вартості інструментів з фіксованою дохідністю до зміни кривої процентних ставок — дюрація. Це лінійна міра ризику, а оскільки крива процентних ставок зазвичай не є прямою, дюрація адекватно наближає чутливість лише до невеликих її змін. Усі розглянуті зміни є досить великими. Крім того, дюрація враховує лише паралельні зсуви кривої, тобто всі інші зміни її форми теоретично порушують імунізацію з допомогою дюрації.

**“Наївна імунізація”.** Під “наївною імунізацією” будемо розуміти імунізацію без використання оптимізаційних математичних моделей. Нехай інвестор має портфель зобов’язань, розподілених у часі протягом 15 майбутніх років (від 1 до 15 років включно), а поточна вартість усіх зобов’язань дорівнює 100 умовних одиниць (рис. 2).

Для імунізації цього портфеля інвестор може застосувати 10 облігацій (табл. 2).

Щоб “наївно” імунізувати портфель зобов’язань, необхідно та достатньо, щоб PV портфеля активів була не менше PV усіх зобов’язань, а дюрація портфеля активів дорівнювала дюрації зобов’язань. Таким чином, якщо ми створимо портфель з двох облігацій, 73,9 % якого вкладаємо у облігацію № 5, а 26,1 % — у облігацію № 10, то отримуємо імунізований портфель.

**Модель оптимізації за дюрацією та конвекситі.** Оскільки дюрація є лише лінійною апроксимацією чутливості вартості інструментів з фіксованою дохідністю до зміни кривої процентних ставок, якість квадратичної апроксимації



Джерело: побудовано автором.

Рис. 2. Портфель зобов'язань (по роках за номінальною вартістю)

Таблиця 2. Параметри зобов'язань та доступних облігацій

Параметр	Зобов'язання	Облігації									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Номінал		100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
Купон, %		0	0	4	4	5	5	7	4,5	8	7
Строк		1	3	3	5	5	7	7	10	10	20
Z-спред, %			1,6	0,8		1,4	1,0	2,5		3,0	1,9
Поточна вартість (PV)	100,00	96,90	85,67	98,68	99,73	98,06	97,99	100,94	99,43	103,35	100,55
Дохідність до погашення ( $y_i$ ), %	4,39	3,20	5,29	4,48	4,06	5,45	5,35	6,83	4,57	7,51	6,95
Дюрація ( $D_i$ )	5,88	0,97	2,85	2,76	4,45	4,30	5,74	5,39	7,87	6,74	10,35
Конвекситі ( $C_i$ )	48,93	1,88	10,82	10,43	24,95	23,66	41,41	37,57	77,13	61,01	158,20

Джерело: складено автором.

повинна бути кращою за неї. Додамо до моделі крім дюрації (першої похідної) ще й конвекситі (другу похідну). Математична модель імунізації портфеля за дюрацією та конвекситі має вигляд:

$$\max f(w_1, w_2, \dots, w_n) \quad (1)$$

за умов

$$\sum_{i=1}^n w_i D_i = D_L, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i C_i = C_L, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad (4)$$

$$0 \leq w_i \leq 1, i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

де  $w_i$  — вага  $i$ -го інструмента в портфелі;

$f$  — деяка цільова функція (далі ми розглянемо питання вибору цільової функції);

$D_i$  та  $D_L$  — дюрації  $i$ -го інструмента та портфеля зобов'язань відповідно;

$C_i$  та  $C_L$  — конвекситі  $i$ -го інструмента та портфеля зобов'язань відповідно;

$n$  — загальна кількість інструментів, які розглядаються для включення у портфель.

Оскільки обмеження є лінійними за вагами інструментів, то за умови лінійної цільової функції для розв'язання задачі можна використовувати симплекс-метод. Можна також розглядати обмеження-нерівності, які задають коридор дюрації або конвекситі, наприклад, подавши умову (2) у такому вигляді:

$$D_L - \Delta D \leq \sum_{i=1}^n w_i D_i \leq D_L + \Delta D. \quad (6)$$

Теоретичною перевагою цієї моделі є те, що вона відповідає квадратичній апроксимації чутливості вартості інструментів із фіксованою дохідністю до зміни процентних ставок. Але конвекситі, як і дюрація — це міра чутливості до паралельних зсувів кривої, тобто вона не забезпечує значного поліпшення при нелінійних змінах кривої. Як бачимо з табл. 3, модель оптимізації за дюрацією та конвекситі добре спрацьовує на сценаріях паралельного зсуву навіть на +3, -3 та +5 %, але її результати на нелінійних сценаріях є гіршими.

**Модель оптимізації за дюраціями ключових ставок.** Для врахування впливу нелінійних зсувів кривої, у праці Т. Хо [6] запропоновано поняття дюрацій ключових ставок, які є частковими похідними вартості інструмента з фіксованим доходом за окремою спотовою ставкою процента (один рік, два роки, п'ять років тощо). Математична модель імунізації портфеля за дюраціями ключових ставок має вигляд:

$$\max f(w_1, w_2, \dots, w_n)$$

за умов

$$\sum_{i=1}^n w_i D_i^{(k)} = D_L^{(k)}, k = \overline{1, K}, \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad (8)$$

$$0 \leq w_i \leq 1, i = \overline{1, n}, \quad (9)$$

де  $D_i^{(k)}$  та  $D_L^{(k)}$  — дюрації за  $k$ -ою ключовою ставкою  $i$ -го інструмента та портфеля зобов'язань відповідно;

$K$  — загальна кількість ключових ставок.

Таблиця 3. Результати стратегій “наївної імунізації” та оптимізації за дюрацією й конвекситі при різних сценаріях зміни кривої процентних ставок

Показник	Паралельний зсув кривої процентних ставок					Спло-щення кривої	Інверсія кривої	Горбата крива	Збільшення куту нахилу
	+1 %	+3 %	+5 %	-1 %	-3 %				
PV зобов'язань	94,35	84,34	75,79	106,14	120,10	95,69	93,09	88,84	94,63
зміна вартості, %	-5,65	-15,66	-24,21	6,14	20,10	-4,31	-6,91	-11,16	-5,37
<b>“Наївна імунізація”</b>									
PV активів	94,40	84,66	76,49	106,19	120,74	96,39	94,31	89,86	94,53
зміна вартості, %	-5,60	-15,34	-23,51	6,19	20,74	-3,61	-5,69	-10,14	-5,47
різниця, %	0,04	0,31	0,70	0,06	0,64	0,70	1,22	1,02	-0,10
<b>Оптимізація за дюрацією та конвекситі</b>									
PV активів	94,35	84,35	75,81	106,14	120,09	95,85	93,45	89,27	94,24
зміна вартості, %	-5,65	-15,65	-24,19	6,14	20,09	-4,15	-6,55	-10,73	-5,76
різниця, %	0,00	0,01	0,02	0,00	-0,01	0,16	0,36	0,43	-0,40

Джерело: складено автором.

Для розв'язання оптимізаційної задачі, яка відповідає цій моделі, можна також використовувати симплекс-метод. Теоретичною перевагою цієї моделі є те, що вона враховує нелінійні зсуви кривої процентних ставок. Ускладнює модель визначення того, які процентні ставки є ключовими. Чим більше ставок ми відносимо до ключових, тим точніше модель відобразатиме чутливість до зміни кривої процентних ставок, але знадобиться більше даних та обчислень. Також ця модель потребує знання спотової кривої процентних ставок. Інша проблема — відсутність розв'язків у разі застосування несумісних обмежень. Наприклад, у нашому портфелі ми не можемо провести оптимізацію за дюраціями всіх ставок (через відсутність допустимих розв'язків), тому обмежимося лише ставками 1, 3, 5, 7 та 10 років (табл. 4).

Як можна побачити з порівняння зміни вартості портфеля активів та зобов'язань, модель оптимізації за такими ключовими дюраціями показала низький результат. Це пояснюється тим, що загальна дюрація портфеля дорівнює 8,6225, що істотно відрізняється від дюрації зобов'язань (5,8835), тому портфель облігацій реагує на зміну ставок набагато більше, ніж зобов'язання. Для подолання цього недоліку до моделі (7)–(9) додано обмеження (2) та звужено кількість ключових дюрацій до трьох — 1, 5 та 10 років. Це дало змогу значно поліпшити якість імунізації. Хоча при паралельних зсувах така модель і поступається моделі оптимізації за дюрацією та конвекситі, за нелінійних змін кривої якість імунізації достатньо висока порівняно з останньою. Тобто при застосуванні моделі оптимізації за дюраціями ключових ставок і у разі неможливості (або недоцільності) використання обмежень за всіма ключовими ставками до моделі варто додавати обмеження за дюрацією всього портфеля (2).

Таблиця 4. Результати стратегій оптимізації за ключовими дюраціями та за дюрацією й вибраними ключовими дюраціями при різних сценаріях зміни кривої процентних ставок

Показник	Паралельний зсув кривої процентних ставок					Сплюснення кривої	Інверсія кривої	Горбата крива	Збільшення куту нахилу
	+1 %	+3 %	+5 %	-1 %	-3 %				
PV зобов'язань	94,35	84,34	75,79	106,14	120,10	95,69	93,09	88,84	94,63
зміна вартості, %	-5,65	-15,66	-24,21	6,14	20,10	-4,31	-6,91	-11,16	-5,37
<b>Оптимізація за ключовими дюраціями ставок 1, 3, 5, 7, 10 років</b>									
PV активів	91,94	78,66	68,30	109,25	132,25	97,97	96,76	89,85	90,53
зміна вартості, %	-8,06	-21,34	-31,70	9,25	32,25	-2,03	-3,24	-10,15	-9,47
різниця, %	-2,42	-5,68	-7,48	3,11	12,15	2,28	3,67	1,01	-4,11
<b>Оптимізація за дюрацією та ключовими дюраціями ставок 1, 5, 10 років</b>									
PV активів	94,36	84,38	75,85	106,14	120,20	96,04	93,50	89,07	94,74
зміна вартості, %	-5,64	-15,62	-24,15	6,14	20,20	-3,96	-6,50	-10,93	-5,26
різниця, %	0,01	0,03	0,06	0,01	0,10	0,35	0,41	0,23	0,11

Джерело: складено автором.

**Вибір цільової функції.** Запропоновані моделі не є завершеними до визначення цільової функції (1). На відміну від багатьох інших оптимізаційних задач, у нашому випадку цільова функція не має дуже великого значення, бо імунізація портфеля визначається обмеженнями. Навіть якщо обрати як цільову функцію константу, симплекс-метод знайде такий портфель, що імунізуватиме зобов'язання. Але доцільно буде крім власне імунізації здійснити певну оптимізацію портфеля. Для цього можна запропонувати такі цільові функції:

- максимізація доходності до погашення, що дасть змогу вибрати найдокладніший портфель, що імунізує зобов'язання;
- максимізація кредитного рейтингу (за умови переведення стандартних рейтингів Moody's, Fitch, Standard & Poor's у числову форму);
- максимізація обраного спреду (наприклад, Z-спреду, який теоретично має перевагу над доходністю до погашення при визначенні цін інструментів із фіксованим доходом).

У нашому дослідженні ми використовували першу функцію з цього списку:

$$\max y = \sum_{i=1}^n w_i y_i,$$

де  $y_i$  — доходність до погашення  $i$ -го інструмента у портфелі.

Крім того, на практиці можлива ситуація, коли задачі (1)–(5) не мають розв'язків через несумісність обмежень. У такому разі обмеження за дюрацією є ключовим, оскільки вплив дюрації на якість імунізації є більшим, і ми залишаємо обмеження-рівність. Замість обмеження (3) можна мінімізувати різницю між конвекситі портфеля активів і зобов'язань за умови, що ця різниця є додатною, тобто записати цільову функцію (1) та обмеження (3) у вигляді:



$$\min \Delta C_+ = \sum_{i=1}^n w_i C_i - C_L,$$

$$\sum_{i=1}^n w_i C_i > C_L.$$

Отже, найпоширенішою реалізацією ALM-підходу є імунізація. Розроблено математичні моделі імунізації за дюрацією та конвекситі та за дюраціями ключових ставок. Обидві моделі мають істотні переваги над традиційною моделлю імунізації лише за дюрацією. Їх легко застосовувати на практиці, оскільки потрібне використання лише симплекс-методу.

Наше дослідження поведінки моделей на прикладі портфеля з декількох зобов'язань, розподілених у часі між 1 та 15 роками, довело, що модель оптимізації за дюрацією та конвекситі є кращою за “наївну імунізацію” за дюрацією. В умовах України саме цю модель можна застосовувати в комерційних банках для управління портфелем активів замість GAP-аналізу чи імунізації за дюрацією. Крім того, ця модель не потребує знання спотової кривої процентних ставок. Модель оптимізації за дюрацією ключових ставок виявила проблему несумісності обмежень, якщо використовується багато ключових ставок, у протилежному разі якість імунізації є низькою. Для подолання останнього недоліку у модель додано обмеження на повну дюрацію, що дало змогу значно поліпшити якість імунізації. Ця модель придатніша для розвинутих ринків капіталу, оскільки потребує знання кривої спотових ставок процента, має більше обмежень та, відповідно, потребує більшої множини активів для інвестування (тобто великої кількості доступних випусків облігацій).

### Список використаних джерел

1. *Фабозци Ф. Дж.* Управление инвестициями / Ф. Дж. Фабозци ; пер. с англ. — М. : ИНФРА-М, 2000. — 923 с.
2. *Bierwag G. O.* Immunization Strategies for Funding Multiple Liabilities / G. O. Bierwag, G. G. Kaufman, A. Toevs // *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. — 1983. — No. 18. — P. 113—124.
3. *Fong H.* A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization / H. Fong, O. Vasicek // *The Journal of Finance*. — 1984. — Vol. 39, No. 5. — P. 1541—1546.
4. *Chambers D.* A Generalized Approach to Duration / D. Chambers, W. Carleton // *Research in Finance*. — 1988. — No. 7. — P. 163—182.
5. *Reitano R. R.* Non-Parallel Yield Curve Shifts and Spread Leverage / R. R. Reitano // *Journal of Portfolio Management*. — 1991. — Vol. 17, No. 3. — P. 82—87.
6. *Ho T.* Key Rate Durations: Measures of Interest Risk / T. S. Y. Ho // *The Journal of Fixed Income*. — 1992. — Vol. 2, No. 2. — P. 29—44.
7. *Fixed Income Readings for the Chartered Financial Analyst Program* / F. J. Fabozzi (ed.). — Frank J. Fabozzi Associates, 2000. — 306 p.
8. *Asset Allocation* / W. F. Sharpe, P. Chen, J. E. Pinto, D. W. McLeavey // *Capital Market Expectations, Market Valuation, and Asset Allocation*. — John Wiley & Sons, 2013. — P. 205—319.